

INTERNATIONAL JOURNAL
OPTICA ACTA

European Journal
of Optics

Journal Européen
d'Optique

Europäische Zeitschrift
für Optik

VOLUME 7

7-8

Printed and Published by

TAYLOR & FRANCIS LTD

RED LION COURT, FLEET STREET, LONDON, E.C.4

CONTENTS OF VOLUME 7

NUMBER 1—JANUARY 1960

	Page
Analyse spectrale des images photographiques. Mme AEBISCHER-NÉOSCHIL, Mlle GAULTIER DU MARACHE, P. M. DUFFIEUX, J. CH. VIÉNOT et W. J. OBERT	1
Temperaturmessungen an einer Russflamme. FRITZ RÖSSLER	20
Electrical and optical techniques in the operation of infra-red detectors. R. H. MCFEE	35
Constantes optiques et variations de phase de l'or en couches minces. R. PHILIP	47
Nachweis für die Überschreitbarkeit der von den Sampling-Expansion-Theoremen postulierten Informationsschranken. HANS WOLTER	53
Contrast transmission and the image evaluation problem. E. H. LINFOOT	65
Nouveaux dispositifs de spectroscopie à grande luminosité. A. GIRARD	81
Minutes of the Fifth Session of the International Commission for Optics, Stockholm 26 and 29 August 1959	98

NUMBER 2—APRIL 1960

Spectral line broadening measured by shearing interferometric methods. J. ERICSSON and L. P. (JOHANSSON) SJÖFALL	105
Eine Methode zur schnellen Prüfung der Leistungsfähigkeit von Objektiven. F. BELOW und H. GRABKE	113
Semiconducting photo-emitters. A. H. SOMMER	121
Visibility of a fine line in intermittent illumination. D. H. FENDER and STELLA MAYNE	129
Semiconductors and infra-red spectroscopy. R. A. SMITH	137
Le solide de tolérances d'un système optique travaillant à de faibles fréquences spatiales JOSE PASTOR	159
Einige Bemerkungen zum Problem der optischen Bildgütebeurteilung. E. HEYNACHER	173
The problem of optimum optical systems. ROMAN S. INGARDEN	179
Superconducting bolometers and spectrometry in the far infra-red. T. J. DEAN, G. O. JONES, D. H. MARTIN, P. A. MAWER and C. H. PERRY	185

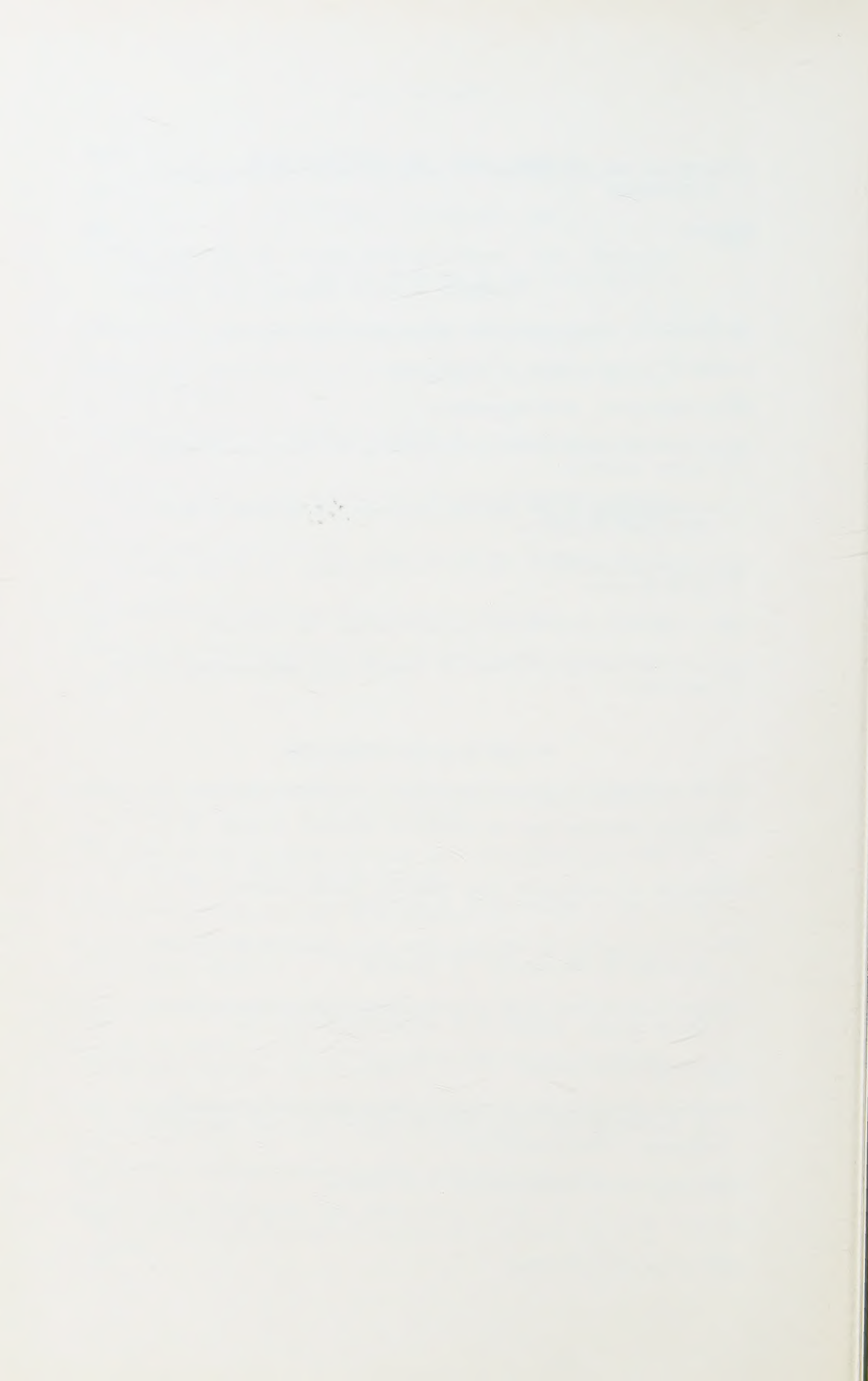
	Page
Construction and performance of a position-sensitive photo-transistor. L. R. BAKER	191
Reviews	199

NUMBER 3—JULY 1960

Electro-optical systems using fibre optics. N. S. KAPANY	201
A study of Troxler's Effect. F. J. J. CLARKE	219
Allvar Gullstrand. MAX HERZBERGER	237
Restitution des images aberrantes par le filtrage des fréquences spatiales. JUMPEI TSUIUCHI	243
A monochromator for the vacuum ultra-violet. L. D. ISAACS, W. C. PRICE and R. G. RIDLEY	263
New infra-red detectors for the 1 to 7 micron region. D. H. LEE and D. H. ROBERTS	271
Colour confusion produced by voluntary fixation. K. J. MCCREE ..	281
Extension du concept d'espaces de Fourier à la spectroscopie. P. JACQUINOT	291

NUMBER 4—OCTOBER 1960

Mesure pyrométrique du seuil visuel absolu. E. BAUMGARDT	305
Small-field tritanopia and the effects of voluntary fixation. K. J. MCCREE	317
Calculation of wavelengths from reflecting echelon patterns. R. A. HANDS, W. A. HESLOP and T. A. LITTLEFIELD	325
Influence du nombre de traits des mires sur la précision des mesures du facteur de transmission. P. LACOMME	331
Changes in the positions of the invariant colours with the state of adapta- tion of the eye. ELAINE G. T. WASSEF and EVONE AZIZ	341
Extra-foveal colour metrics. F. J. J. CLARKE	355
Restitution des images aberrantes par le filtrage des fréquences spatiales. II. Restitution de l'image dont le spectre comprend une partie négative. JUMPEI TSUIUCHI	385
Phase dispersion in interferometry. P. E. CIDDOR	399
Reviews	405
Index of authors (with titles)	407



Analyse spectrale des images photographiques†

par MME AEBISCHER-NÉOSCHIL, Mlle GAULTIER DU MARACHE,
P. M. DUFFIEUX, J. CH. VIÉNOT et W. J. OBERT

Université de Besançon, Besançon, France

(Received 9 October 1959)

Dans l'enregistrement photographique des images, les limites inhérentes au processus photographique lui-même ne permettent qu'une représentation approximative de l'objet.

De façon générale, on peut mettre en évidence le fait que le domaine des fréquences spatiales enregistrées dont on peut tirer une information directement utilisable est toujours réduit.

Quelques méthodes d'étude des spectres d'images photographiques actuellement pratiquées au laboratoire sont exposées, ainsi que les résultats obtenus sur un exemple particulier choisi comme test.

Une amélioration des performances d'un périodographe interférentiel est envisagée en introduisant des fonctions de domaine à décroissance asymptotique. Les possibilités et la réalisation pratique de pupilles à bords dégradés sont illustrées dans la dernière partie.

1. GÉNÉRALITÉS

Les chercheurs du Laboratoire de Physique de l'Université de Besançon se sont tous intéressés—ou s'intéressent—à la photographie, soit à Besançon même, soit dans leurs situations ou activités antérieures. La doctrine actuelle du Laboratoire est la synthèse de ces travaux dont certains sont déjà anciens.

P. M. Duffieux s'est occupé de photographie pour l'Aviation Française en 1917-18 sous la direction de M. Bernard et du Service des Inventions. Les Etats-Majors demandaient si tout ce qui était visible pour un bon observateur à la lunette l'était encore sur une photographie. Des mires constituées, soit par des treillages hexagonaux, soit par des filets à mailles carrées, soit par des palissades de baguettes, le tout blanc ou coloré, furent étudiées. Il fut vérifié que tout ce qui était visible avec un bon oculaire sur l'image donnée par un objectif photographique laissait des traces perceptibles sur les clichés.

Dès que nous avons été en possession d'une théorie fonctionnelle et non pas géométrique des images, nous nous sommes inquiétés de son extension aux images photographiques. C'est Mlle du Marache qui s'est chargée de ce travail. Celui-ci a été publié en 1942 [1] et 1952 [2]. Dans la deuxième série d'expériences [2] l'émulsion était étudiée en tant que procédé d'enregistrement en utilisant un objet précis: des trames de photogravure équivalentes exactement à des mires de Foucault de pas variés et de contraste 1. Les clichés étaient pris par contact, leurs spectres obtenus par diffraction à l'infini étaient photographiés. L'objet étant pair, la question des phases ne se posait pas. Il fut alors démontré qu'il était impossible ou du moins décevant de chercher un facteur de transmission défini: il y avait distorsion en amplitude et en phase, mais aussi en fréquence, ces distorsions étant liées à la forme des objets. Mlle du Marache essaya de

† Communication présentée à la 5^e Réunion de la Commission Internationale d'Optique, Stockholm, août 1959.

déterminer une figure d'irradiation soit par méthode directe (étude de l'image d'une fente fine [1]) soit indirectement par la méthode du liseré [3]. Il fut impossible de fixer pour une émulsion une figure d'irradiation jouant un rôle dans une convolution de forme classique. La plupart des distorsions gênantes vers les hautes fréquences sont d'origine chimique ou sont liées aux extrémités non rectilignes des courbes de noircissement.

Une suite de ce premier travail a été reprise par Mlle du Marache en 1955 [4]. Un objectif photographique était placé comme intermédiaire entre l'objet et l'image aérienne génératrice de l'image photographique. L'objet était toujours une mire du type Foucault de contraste unité. Certaines de ces mires étaient des glaces gravées de trames d'héliogravure, mais des mires de grandes dimensions ont été construites (65 cm \times 350 cm). Elles sont constituées par un réseau de ressorts d'acier tendus parallèlement [5].

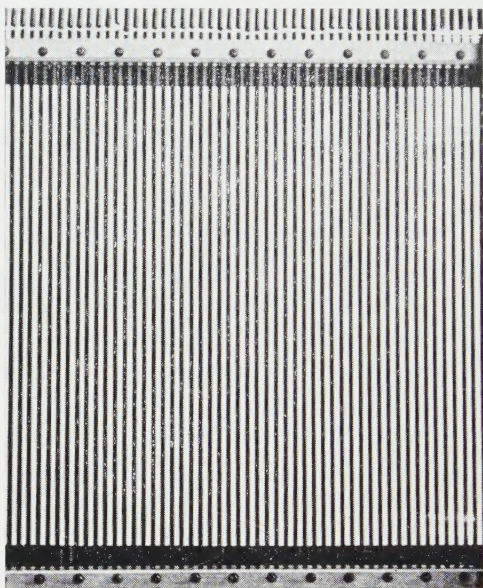


Figure 1. Echantillon d'essai d'une mire de grandes dimensions (1 m² environ).

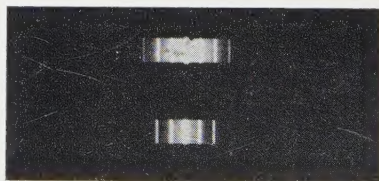


Figure 2. Diffraction à l'infini d'une onde plane cohérente. Photographie du spectre d'une mire obtenu en deux poses de durées différentes.

Deux résultats notables peuvent être tirés de cette étude :

- (1) Transition image aérienne-image photographique : la transition ajoute des termes à ceux de l'image aérienne.

- (2) Limite de transmission et structure visible: si le spectre ne contient plus qu'un terme, il ne subsiste que des traces peu visibles de périodicité sur le cliché, insuffisantes pour identifier la mire.

La période la plus faible obtenue fut de 9 microns soit 110 mm^{-1} .



Figure 3. Spectre réduit aux termes d'ordres $-1, 0, +1$.

Ces travaux, ainsi que tous ceux où l'objet est, soit un test sélectionné connu, soit un objet déterminé comme dans les clichés célestes ou de spectres atomiques ou moléculaires formés de raies fines, appartiennent au même type de problèmes d'information que l'on peut appeler problèmes de la *transmission simple*: ce message est connu et si l'on désire fixer les performances d'une émulsion ou d'un ensemble objectif-émulsion au point de vue du pouvoir de résolution ou du contraste, il suffit d'éléments sporadiques, insuffisants pour une identification.

Tout autre est l'un des aspects du problème posé par H. H. Hopkins à J. Ch. Viénot [6, 7]: il s'agissait d'identifier un ou plusieurs objets inconnus parmi d'autres figurant sur un cliché de type normal (vues aériennes), et de chercher quels éléments permettaient de qualifier les qualités de l'image. Il s'agit alors d'un problème non de présence, mais de probabilité d'identification ou de sélection d'objets, problème de recherche dans lequel le message est ignoré ou du moins appartient à une collection assez vaste pour que son identification exige beaucoup plus d'information que la détection des présences dans le problème précédent.

Les performances des ensembles objectif-émulsion ont été évaluées alors d'après l'extension des spectres des fréquences spatiales attribuables à l'objet et susceptibles d'être distingués du spectre de bruit.

2. MÉTHODES D'ANALYSE SPECTRALE PRATIQUÉES DANS NOTRE LABORATOIRE

2.1. Diffraction par le cliché d'une onde plane cohérente

C'est la méthode de Fraunhofer-Rayleigh. Elle est pratiquée par Mlle du Marache dans les études citées antérieurement. Si $F(x, y)$ est la fonction d'objet définie comme la distribution des transparences en *énergie*, la fonction d'objet cohérent correspondante est $|F(x, y)|^{1/2}$ ce qui atténue les contrastes. En général le spectre est photographié ou enregistré au moyen d'un récepteur à cellule photosensible. On obtient donc le carré du module du spectre $G(u, v)$:

$$G(u, v) = T[|F(x, y)|^{1/2}],$$

$$s(u, v) = |G(u, v)|^2.$$

Les clichés sont gradués, la mesure des densités optiques des raies permet le calcul des intensités puis des modules des amplitudes complexes pour chacun des termes du spectre, ce qui est suffisant pour un objet pair.

Les résultats ont plus de sens pour une statistique que pour un cliché individuel. Remarquons que le spectre est bidimensionnel et que les hautes fréquences se répartissent sur des zones de plus en plus grandes à mesure que l'on s'éloigne du centre de fréquence 0, exactement comme les spectres de bruit; ceci est correct pour la comparaison des spectres de bruit et des spectres de fonction d'objet mais réduit les performances constatées par rapport aux essais faits sur des mires de traits, les spectres de granulation et de granularité restant alors bidimensionnels alors que les spectres de mires sont concentrés suivant une seule variable et peuvent émerger plus longtemps des spectres de bruit.

2.2. Méthode de l'analyseur harmonique

On enregistre au microphotomètre, suivant l'axe des x , l'intégration de la fonction objet suivant l'axe perpendiculaire, y , par le spot d'exploration. On obtient ainsi la fonction :

$$f(x) = \int_y F(x, y) dy.$$

On procède à son analyse soit au moyen d'un analyseur mécanique, soit par le calcul. On étudie nécessairement un domaine (D) qui, si l'objet est absolument quelconque, doit être plus étendu suivant les x (domaine de mesure X) que

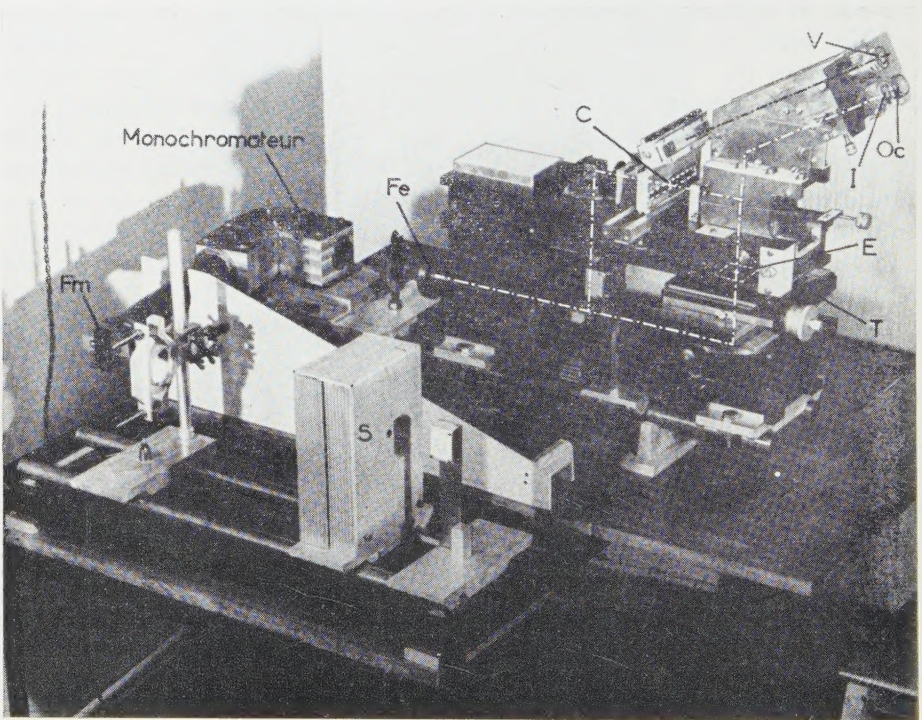


Figure 4. Microphotomètre oculaire. S: source (lampe à vapeur de mercure); Fm: fente d'entrée du monochromateur; Fe: fente d'entrée du microphotomètre; En traits mixtes blancs: trajets de la lumière dans le microphotomètre (quadrilatère classique du Fabry-Buisson); La table de mesure, T, porte l'échantillon, E, dont on mesure la densité optique; C: coin photométrique; Oc: oculaire de mise au point (escamotable); L'opérateur effectue l'égalisation photométrique en regardant à travers l'ocillon I; V: viseur de lecture.

suivant les y . Le spectre peut être, soit une série, soit une intégrale continue, suivant la méthode de calcul et le nombre de points déterminés du spectre. La méthode donne directement les parties réelle et imaginaire du spectre $g(u)$, les phases étant assez faciles à déterminer avec une précision convenable et qui ne dépend en général que des erreurs sur la courbe $f(x)$.

Microphotomètre oculaire (fig. 4). Les courbes photométriques nécessaires aux analyses harmoniques directes, ont été déterminées au moyen du microphotomètre oculaire construit récemment par Mme Aebischer, ingénieur de notre laboratoire [8]. La photométrie oculaire est démodée mais les raisons qui avaient justifié un premier train de modifications apportées au microphotomètre Fabry et Buisson [9] subsistent.

(a) Domaine étendu des éclaircissements et densités mesurables.

(b) Mesure rapide avec une erreur constante de 0,01 sur les densités optiques ce qui est comparable aux performances des appareils automatiques.

(c) Réglage stable permettant sans délai des mesures intermittentes. Les photomètres oculaires sont les plus commodes pour les travaux intermittents et dans les laboratoires d'Université où l'on dispose de peu de personnel spécialisé, mais de nombreux étudiants de bonne volonté aux yeux jeunes et décontractés.

2.3. Méthode du périodographe

Ella diffère de la précédente par le mode d'analyse. Elle a été exposée [6, 7] et nous ne la rappellerons que sommairement. On fait défiler dans le sens des x une répartition sinusoïdale indépendante des y (figure 5), cohérente ou

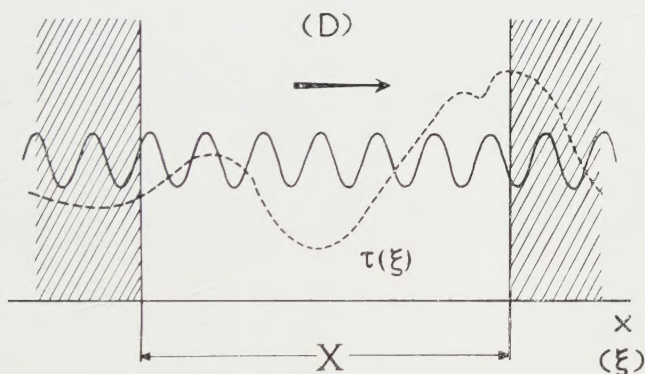


Figure 5. Principe du périodographe.

incohérente, que l'on intègre de toute façon en énergie. Cette répartition est superposée au cliché étudié à l'intérieur du domaine d'analyse. L'enregistrement de l'énergie transmise en fonction de la translation donne une nouvelle distribution sinusoïdale dont la visibilité complexe indique l'ordonnée complexe du spectre pour la fréquence de la répartition sinusoïdale initiale. En général on se contente de la mesure du module correspondant qui est la plus significative des propriétés générales et souvent la seule intéressante.

La manipulation comporte quatre opérations.

(a) Production de la répartition sinusoïdale. Ceci est réalisé au moyen d'un système interférométrique.

(b) Translation des franges. Le balayage est obtenu par la rotation en va-et-vient d'un miroir commandé par came.

(c) Changement de la fréquence, $R = 1/p$, de la répartition, p étant la période des franges. Nous disposons de deux possibilités suivant l'opportunité d'une variation continue de R ou non.

(d) Enregistrement de flux transmis par le cliché.

Le premier ensemble construit et réalisé par J. Ch. Viénot au cours des études initiales a déjà été décrit [7, 10]. Un second appareillage est actuellement en fonctionnement à Besançon. Nous n'insisterons ici que sur quelques caractéristiques et d'autres précisions de détails seront données ailleurs [13].

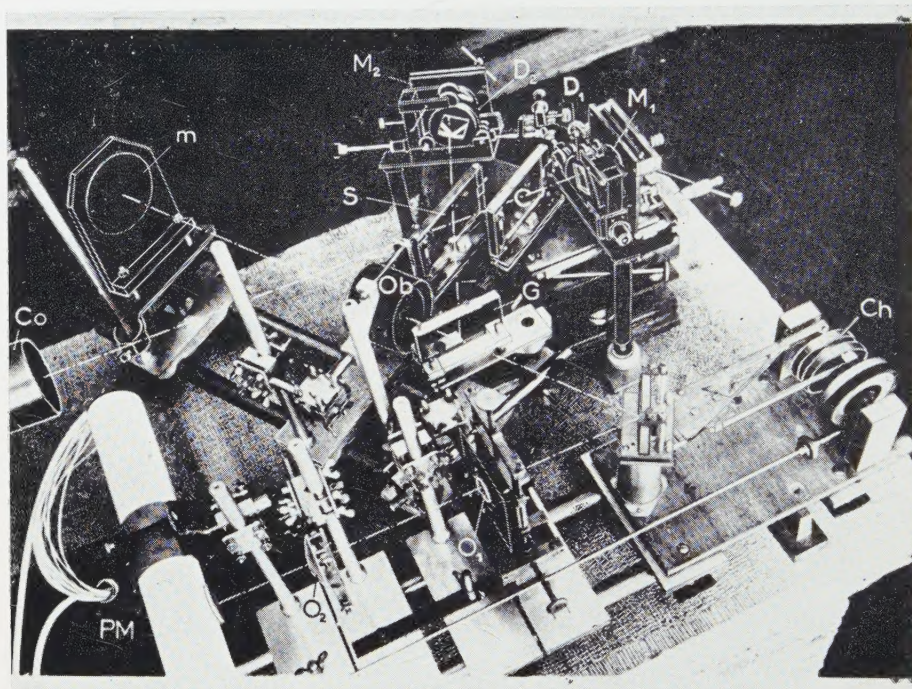


Figure 6. Périodographe: interféromètre et récepteur. Co: collimateur; S: séparatrice. C: compensatrice. M_1 : miroir mobile en profondeur. M_2 : miroir monté sur ressorts plats, orientable autour de son axe vertical. D_1 , D_2 : diasporamètres; le système d'entraînement ne figure pas sur la photo. G: glace semi-transparente placée à la sortie de l'interféromètre. Objectif Ob-miroir m: système afocal donnant une image de (M_1 , M_2) dans le plan du cliché. Ch: came hélicoïdale double. O_1 , O_2 : objectifs collecteurs du flux. PM: photomultiplicateur.

Système d'éclairage. Un monochromateur à prisme de quartz polarise rectilignement le faisceau issu d'une lampe à vapeur de mercure et isole la composante horizontale de la raie verte.

A la sortie du collimateur, Co (figure 6), le faisceau parallèle tombe sur la séparatrice, S, de l'interféromètre suivant l'angle de Brewster.

Interféromètre. Les franges sinusoïdales sont données par un appareil à deux ondes du type Michelson construit sur le principe de ceux de M. Terrien et réalisés au B.I.P.M. [11].

Les éléments essentiels sont visibles dans la photographie (figure 6) sur laquelle on a figuré le trajet du rayon moyen.

Translation et changement de fréquence des franges. Le glissement des franges dans le plan du cliché situé en avant de l'objectif O_1 est effectué au moyen d'un miroir entraîné par la came Ch.

Les variations de la fréquence sont obtenues soit par réglage fin du miroir M_2 (le zéro étant conservé par un système de ressorts), soit au moyen des deux diasporamètres D_1 , D_2 , disposés symétriquement le long des bras de l'interféromètre.

Récepteur. L'énergie recueillie après traversée du cliché est transmise vers la photocathode d'un photomultiplicateur Lallemand, PM, au moyen d'une combinaison sphérique ou cylindrique O_1 , O_2 .

Les variations de cette énergie sont enregistrées par un galvanomètre suiveur de spot placé à la suite d'un amplificateur continu ou encore sur l'écran d'un oscilloscope. Cette dernière technique s'adapte aisément à la détermination des distorsions de phase introduites par la photographie.

Une méthode interférométrique quelque peu différente est actuellement à l'étude. Elle fait l'objet de construction d'un autre appareillage (W. J. Obert).

3. L'IMAGE PHOTOGRAPHIQUE

Il nous semble nécessaire de situer l'image photographique parmi les différents types d'images ou de figuration des formes antérieurs à la photographie actuelle. P. M. Duffieux a développé le 7 mai à la réunion tenue à Marseille par la Section d'Optique de la Société Française de Physique un essai de classification de ces types d'images [12]. Chacun donne lieu à des conventions entre l'émetteur et le procédé de figuration, qui est en quelque sorte un code de transmission, et l'utilisateur du message. Il semble que l'on puisse distinguer deux grandes catégories de codes :

(1) Les codes du trait issus des plus anciennes techniques humaines et qui aboutissent à la définition d'éléments géométriques de discontinuités.

(2) Les codes du modelé presque aussi anciens et qui semblent dériver de la peinture colorée et parallèlement de la sculpture incolore avec le modelé d'ombres par haut ou bas reliefs. Elles aboutissent aux représentations fonctionnelles continues par séries de fonctions élémentaires qui sont les retouches successives d'une forme graduellement précisée.

La photographie appartient à un code du modelé qui est l'image grenue. Elle n'est pas la seule et n'a pas été la première [12]. Elle représente un type de gravure grenue d'automatisme physique presque complet. L'initiative humaine est réduite à la technique de l'émulsion, au choix de ses propriétés dans les gammes possibles, à celui du temps de pose et aux 'cuisines' chimiques qui peuvent accompagner ou suivre le développement et les reports successifs.

Elle y gagne en fidélité de perspective et d'homothétie, en fidélité d'interprétation des valeurs des couleurs et des ombres pour la photographie non colorée, en fidélité de couleurs pour la photographie en couleurs, en rapidité et surtout en accumulation presque encombrante de détails.

Mais elle appartient au code du modelé pur. Presque toujours les dessins et gravures de modelé grenus ou autres sont rehaussés de traits. Nous croyons

que la tradition géométrique des contours a trop influé sur les exigences montrées vis à vis de la photographie.

Relevant d'un code du modelé, l'image photographique relève de la théorie des fonctions et il paraît naturel de l'aborder par les méthodes de Fourier qui se sont montrées utiles pour les images optiques intermédiaires nécessaires entre l'objet et l'image photographique.

4. SPECTRES DES BRUITS PHOTOGRAPHIQUES

On a tracé figure 7 les courbes d'un facteur de transmission objet-image vraisemblable (en trait plein) et les spectres de bruits photographiques. Cette représentation schématique nous a été suggérée à propos d'une étude [13] dont nous tirons un exemple particulier.

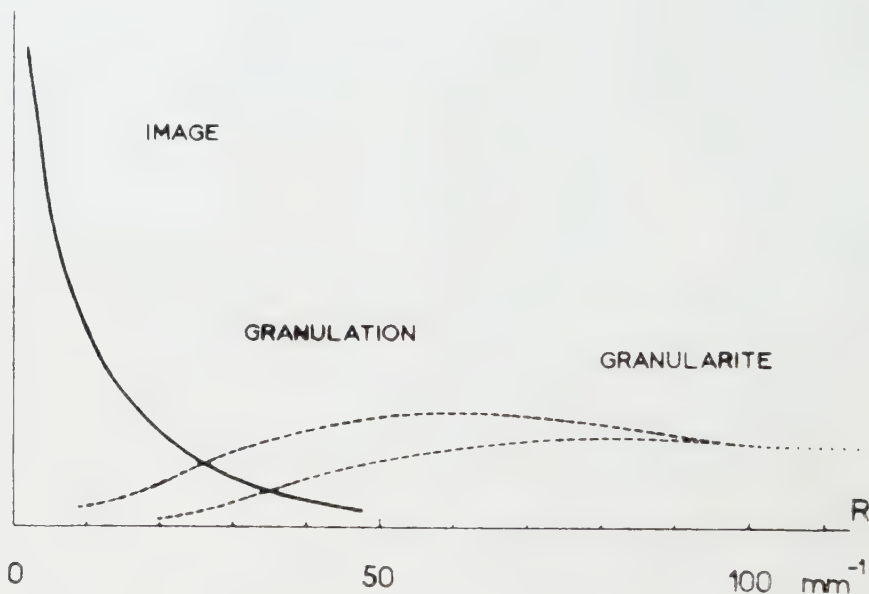


Figure 7. Transmission d'un cliché.

Le facteur de transmission d'image décroît rapidement dès les plus basses fréquences. Cette décroissance résulte du produit de spectre de diffraction et du spectre de diffusion dans l'émulsion translucide. Ce dernier et le premier lui-même sont mal déterminés dès les fréquences moyennes par suite des résidus d'aberrations des appareils d'optique et de déformations d'origines physico-chimiques de la figure d'irradiation théorique, déformations qui dépendent encore de l'image optique elle-même, c'est à dire de l'objet et de son détail local.

On peut diviser le spectre de bruit en trois régions d'importance et de régularité différentes :

(1) De la fréquence zéro jusqu'aux fréquences de 0,1 à 0,5 mm^{-1} le bruit est lié aux irrégularités d'épaisseur, d'homogénéité de l'émulsion, aux gros vices de développement; il dépend donc de la technique de fabrication et d'épandage des émulsions. Pour les films modernes, ces bruits sont presque négligeables.

(2) Pour les fréquences moyennes jusque vers 100 mm^{-1} se développe le spectre de granulation liée à la dispersion plus ou moins régulière des germes. Il y a une part de triage technique des grains, une part plus importante encore de méthode de développement. Suivant les cas d'image de noircissement (variable avec les méthodes chimiques, l'agitation des bains, etc...) le spectre de granulation est plus ou moins envahissant. Dans cette région nous avons figuré une zone étendue de variation.

(3) Le spectre de granularité lié à l'existence de grains d'argent qui n'est plus dans le domaine des fréquences utiles si cette granularité est fine et homogène, ce qui n'est pas toujours le cas.

Il semble que dans les meilleures conditions, le spectre du signal disparaisse sous le bruit dans la région 20 à 30 mm^{-1} pour ne se conserver vers 100 mm^{-1} et parfois 600 ou 800 mm^{-1} que dans des conditions expérimentales tout à fait exceptionnelles en photographie normale.

Lorsqu'on veut identifier ou reconnaître des détails de moyennes fréquences, il ne faut espérer ni des contours ni une identification absolue. La reconnaissance du détail dépend de l'ensemble des détails voisins; à la limite, c'est le contexte qui en donne le sens. Il ne s'agit donc plus d'une question de physique objective mais d'une interprétation subjective.

5. ETUDE D'UNE PHOTOGRAPHIE [13]

Nous prendrons comme exemple une photographie aérienne qui a servi de test pour diverses méthodes pratiquées au Laboratoire. Elle a été proposée par Mr. A. Maréchal à J. Ch. Viénot. Nous en reproduisons en positif un fragment sous deux états de la région étudiée: le positif direct (figure 8a) et un positif d'après un négatif filtré (figure 8b) redonnant de l'importance aux



Figure 8. (a) Fragment de photographie non filtrée;



(b) Fragment de photographie filtrée.

moyennes et hautes fréquences. Ce filtrage a été effectué dans le laboratoire de Dr. A. Maréchal. On a supprimé à droite une image un peu floue sur le ciel parisien que tout le monde eût identifié comme étant la Tour Eiffel. Chaque fragment représente à peu près $0,25 \text{ cm}^2$ de l'original.

En vue directe, ou à très faible grossissement, on distingue sur l'original les masses des immeubles et les rues larges. Au grossissement $10,8$ on reconnaît à gauche, dans la région qui a été prise comme test, l'extrémité d'un immeuble et

son porche, la chaussée avec un liseré plus clair qui suggère le bord d'un trottoir et des objets confus qui sont des arbres ou des autos en stationnement et en marche.

Au grossissement 21, pour le même domaine limité de l'objet, les détails précédents ne sont plus reconnaissables. La granulation est trop visible et domine l'attention de l'observateur. Il ne faut pas oublier le mécanisme d'intégration des images étendues par une fovea centralis en mouvement perpétuel.

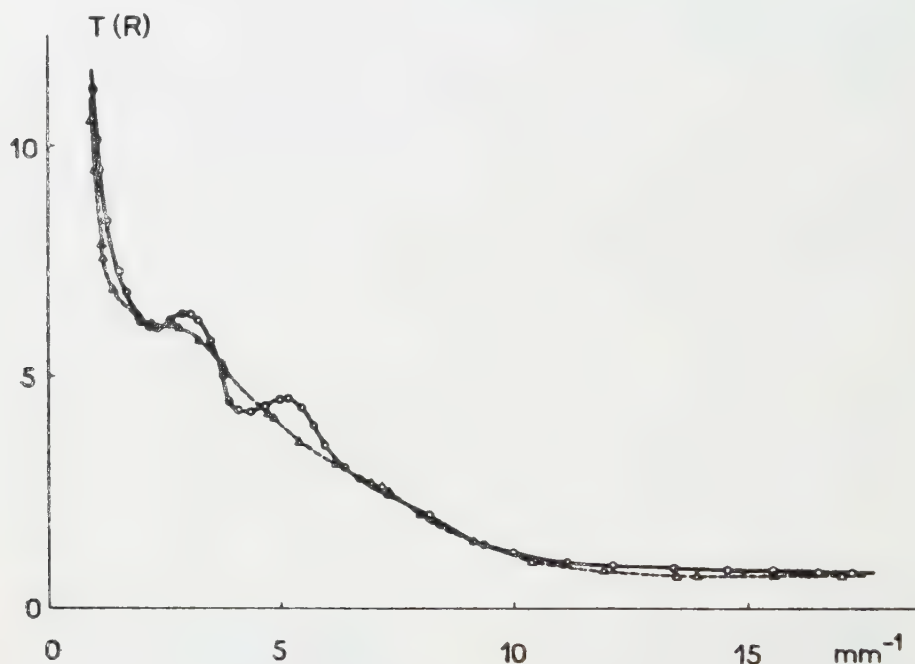


Figure 9. Spectres obtenus au périodographe. La courbe en traits interrompus correspond à la figure 8 (a) et celle en traits pleins à la figure 8 (b).

Le spectre des fréquences spatiales obtenu au moyen du périodographe interférométrique est donné figure 9. La bande analysée a 3200 microns suivant l'axe de balayage. L'abondance des lignes verticales a permis d'intégrer en hauteur suivant les y une bande de 4 mm de hauteur environ.

Le tracé des spectres indique un amortissement rapide des basses fréquences. Les deux bandes spectrales visibles surtout sur les spectres du cliché filtré à 2,5 et 5 mm^{-1} environ, correspondent sans doute aux gros détails tels que les masses d'immeubles. La transmission au dessus de 7 mm^{-1} est sensiblement la même pour les deux clichés et reste faible. Il n'y a pas trace de spectre stochastique de bruit, granulation ou granularité. Peut-être, si les phases avaient été précisées, aurait-on constaté un bruit de phase. C'est que le procédé d'analyse du périodographe intègre les bruits dans l'image explorée. D'autre part, pour un domaine analysé de cette dimension, le pouvoir de résolution reste faible. Les courbes photométriques en transparence, $\tau(\xi)$, déterminées au microphotomètre, sont données figure 10.

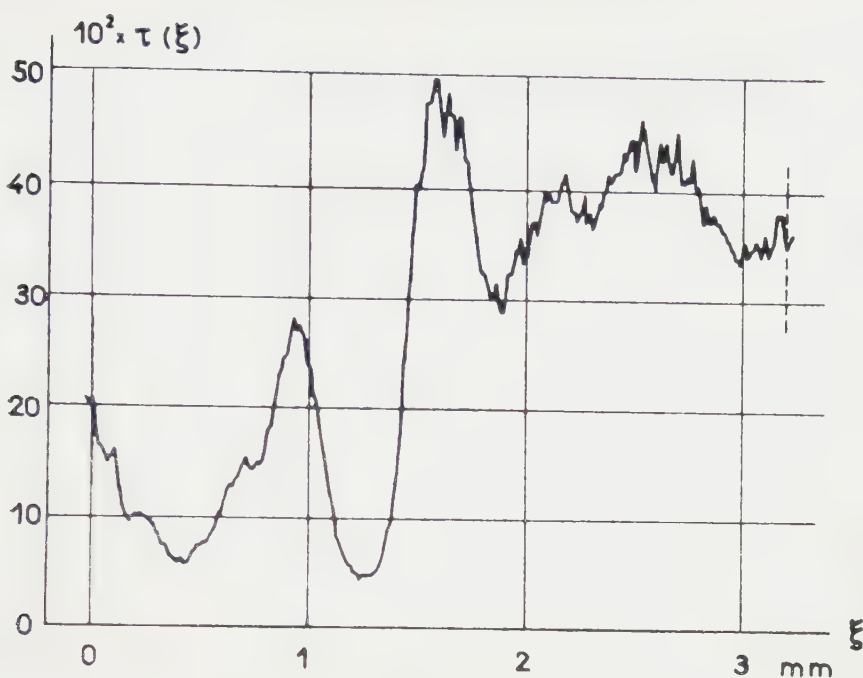
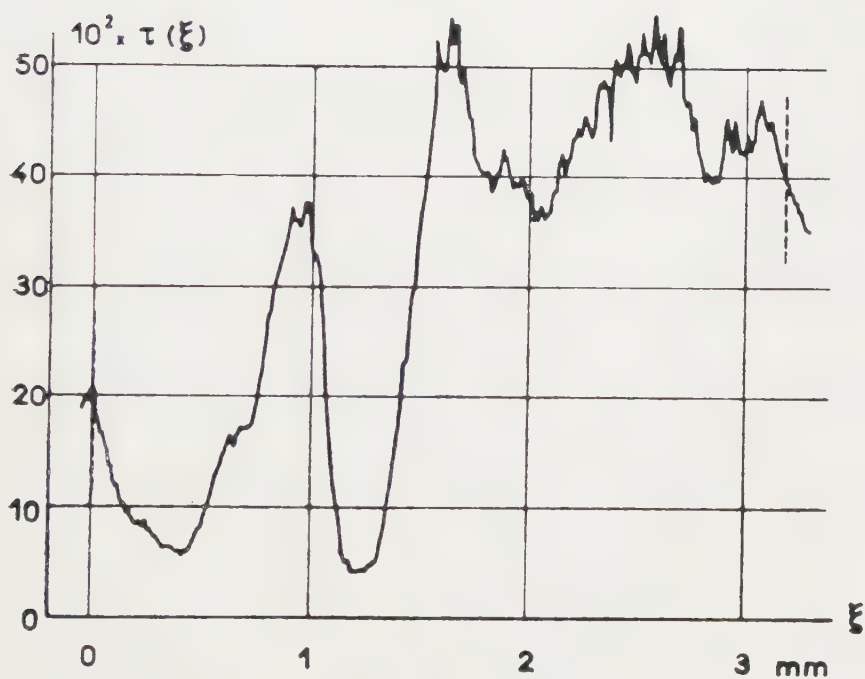
Cl.17Cl.18

Figure 10. Fonctions de transparence déterminées au microphotomètre à l'intérieur du même domaine que celui de la figure 9, mais suivant une hauteur réduite. En (a) transparence du cliché non filtré, en (b) transparence du cliché filtré.

Le spot d'exploration était circulaire, de 25 microns de diamètre. Les mesures ont été effectuées tous les 10 microns, les domaines éclairés étant partiellement superposés. Le spot était trop petit pour que l'intégration sur une aire moyenne de 500 microns carrés puisse amortir les hautes fréquences de granulation et les basses fréquences de granularité†. Il est difficile de reconnaître les détails visibles précédemment. Ce qui paraît le plus remarquable, c'est la transformation de plages uniformes en apparence, comme les fragments de façades d'immeubles, en pics aux pentes déchiquetées. Le modelé subsiste mais les contours ont disparu.

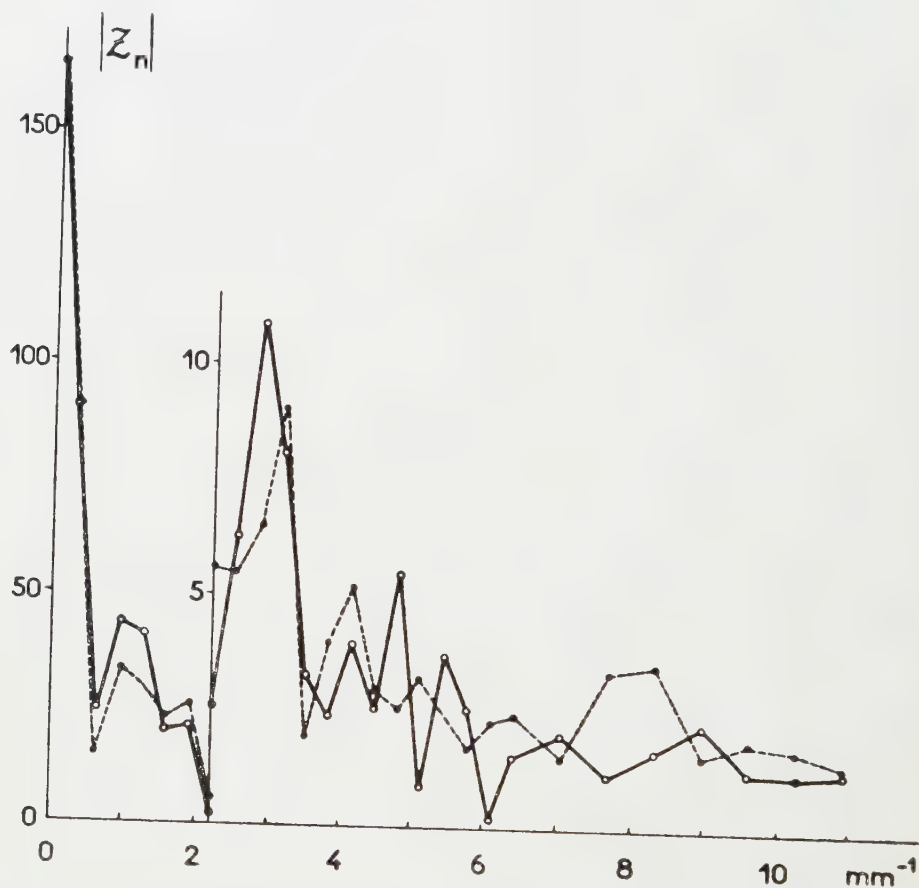


Figure 11. Analyse harmonique des deux fonctions de transparences; Evolution des modules des termes de la Série de Fourier: en traits interrompus pour la courbe 10a, en traits pleins pour la courbe 10b.

Les spectres ont été analysés avec un analyseur mécanique Mader-Ott jusqu'à la fréquence 11 mm^{-1} , c'est-à-dire jusqu'au 34ème terme de la série de Fourier correspondant à la période fondamentale d'analyse de 3200 microns (figure 11). Les points caractéristiques de la série ont été joints par des segments de droites,

† Des études systématiques ont été faites afin de comparer l'influence de l'ouverture d'exploration dans l'intégration de la structure granulaire (cf. par exemple Schade, O. H., *J. Soc. Mot. Pict. Tele. Engrs.*, 1952, **58**, 181).

non pour simuler une intégrale continue de Fourier, mais pour permettre de suivre plus facilement l'évolution des termes. Il a paru inutile de pousser l'analyse aux termes de plus hautes fréquences car aucune comparaison n'était plus possible avec le spectre donné par le périodographe interférentiel. La comparaison est cependant possible dans les moyennes fréquences. On retrouve une bande bien marquée vers la fréquence $2,5 \text{ mm}^{-1}$ presque aussi bien marquée dans le cliché direct que dans le cliché filtré, puis un groupe de trois termes dont deux exceptionnels à la fréquence 5 mm^{-1} pour le cliché filtré, mais rien d'équivalent dans le cliché non filtré.

Il est visible que l'incohérence apparente des deux spectres mesurés à l'analyseur Mader-Ott est liée à la non-intégration du grain et nous devrions même dire que l'absence de structure dans les spectres du périodographe est liée à l'intégration des bruits mais aussi des multiples détails de petites dimensions et qui se confondent avec les bruits. Il doit même exister fatalement une influence réciproque entre les causes de distributions fines irrégulières attribuables à l'image, que l'on peut dans bien des cas qualifier d'aléatoires puisque aussi bien elles sont à priori inconnues, et les causes de distributions analogues, situées dans la même région spectrale et qui sont liées soit à des fluctuations de distribution ou de sensibilité de l'émulsion, soit aux fluctuations d'actions chimiques au développement des négatifs, aux fluctuations de diffusion de la lumière et aux fluctuations chimiques au tirage des positifs et des reports. Cela est bien visible sur les courbes microphotométriques. Une foule de détails de l'ordre du $1/30$ de mm abondent dans la région des arbres et des autos.

Ces structures fines faussées ou même artificielles de l'image photographique doivent être, nous semble-t-il, rapprochées des fausses structures techniques habituelles et même classiques employées depuis toujours par les graveurs et dessinateurs. Une étude superficielle des procédés suivant lesquels ils 'traitent' les objets à structure fine : végétation, cheveux, éléments de matériaux, montrent que leur dessin est beaucoup plus dicté par l'impératif du procédé technique de reproduction, que par celui des objets. Il s'agit de suggérer la reconnaissance d'objets. Peu importe que les feuilles des arbres aient les dimensions ou les formes naturelles. Pour la photographie aérienne, il suffit d'indices caractéristiques évitant la confusion avec des objets dont la présence serait probable.

Il nous paraît alors un peu vain de rechercher une détermination exacte des spectres d'objets dans la région où les spectres de granulation deviennent gênants. Le problème véritable consisterait à changer le rapport signal/bruit dans le domaine compris entre 20 et 100 mm^{-1} environ pour les très bonnes émulsions, soit en perfectionnant les procédés de développement pour reculer vers les hautes fréquences le spectre de granulation, soit en relevant directement sur le premier négatif la transmission des fréquences intéressantes, soit en transposant les dimensions, c'est à dire en prenant les clichés de plus grand format.

Il semblerait donc que si une cuisine de l'image doit intervenir dans son amélioration, c'est au niveau de l'image optique qu'elle serait la plus efficace, la 'cuisine' de développement venant immédiatement après. En ce qui concerne la première, à la suite de notes de P. M. Duffieux [14] et J. Ch. Viénot [15] (profils strioscopiques; mesure de profils en éclairage cohérent), W. J. Obert a mis au point des procédés de lectures des règles en éclairage cohérent [16]. Nous essayons actuellement des améliorations en éclairage incohérent.

6. FONCTIONS D'INFLUENCE EXPONENTIELLES

P. M. Duffieux a exposé à la Réunion d'Octobre 1958 de la section d'Optique de la Société Française de Physique la mise au point d'une longue discussion avec J. Ch. Viénot sur le sens des intégrales de Fourier relatives à des images limitées par des diaphragmes percés dans les écrans opaques et limités par des discontinuités [17]. Il est évident que la très grande valeur du terme de fréquence nulle donnant la valeur moyenne de la transparence du cliché forme le spectre des fluctuations de cette valeur qui dessinent le cliché quand l'analyse est faite avec un périodographe à marche continue qui donne directement l'intégrale de Fourier. Et ceci d'autant plus que les contrastes liés aux fluctuations sont plus faibles. Seuls les termes de la Série de Fourier relative au domaine exploré ont un sens métrologique exact.

Il nous a paru que le rendement du périodographe interférentiel serait amélioré par la substitution au diaphragme limité par des discontinuités à un domaine X , d'une fonction d'influence dégradée à décroissance asymptotique dont on pourrait supposer le domaine pratiquement illimité.

Ce problème a été déjà résolu dans les techniques du temps et nous avons cherché à imiter la technique classique de la mesure d'une fréquence de courant alternatif. La fréquence à l'instant zéro est intégrée sur le passé par l'intermédiaire d'une fonction d'influence de la forme :

$$I(t) = \exp(at) \quad (a < 0).$$

C'est la fonction d'amortissement. Son équivalent optique est obtenu en juxtaposant par leur arête de densité optique nulle deux coins photométriques de même constante. On obtient facilement cette loi symétrique d'amortissement en interposant une matière absorbante entre un biprisme de Fresnel et une surface plane.

La technique de ce genre d'écrans a été mise au point sur les conseils de Mr. Couder [18] par P. M. Duffieux [19] puis par C. Lorius [20] et une application en a été donnée par R. Burtin [21]. Les corps absorbants interposés sont soit des liquides glycériques soit des gélatines teintées, ces dernières permettant un pelliculage en écrans d'épaisseur faible.

Les figures 12 et 13 reproduisent les sections d'écrans réalisés par J. Ch. Viénot : les courbes de transparence, $\tau(\xi)$, ont été mesurées au microphotomètre oculaire et les facteurs de transmission, $T(R)$, déterminés avec le périodographe interférentiel décrit antérieurement. Le spectre obtenu au périodographe pour la fonction d'influence indiquée dans la figure 12 est tout à fait analogue à ceux que l'on obtient dans les techniques du temps par les analyseurs de fréquence basés sur la résonance. Ils sont donc du type usuel en électronique et en électrotechnique. Cela ne veut pas dire que leur interprétation soit plus facile, mais elle est traditionnelle.

La commodité pratique a fait essayer parallèlement les fonctions d'influence réalisées par interposition d'une substance absorbante entre une lentille cylindrique et une surface plane (figure 13). La loi de densité optique est parabolique et la loi de transparence est une fonction de Gauss :

$$\tau(\xi) = A \exp(-C\xi^2).$$

La figure 13 donne la section d'un écran réalisé, la courbe de transparence mesurée au microphotomètre oculaire et le facteur de transmission mesuré au périodographe interférentiel. Les triangles portés sur le graphique correspondent à l'analyse harmonique de la courbe précédente effectuée à l'analyseur Mader-Ott.

Parallèlement à ces courbes, nous donnons les photographies de franges sinusoïdales filtrées par les écrans des figures 12 et 13; la fonction de domaine est en $\exp(-B\xi)$ pour la figure 14 (a) et $\exp(-C\xi^2)$ pour la figure 14 (b). Les photographies ont été prises par J. Clerc.

Dans la mesure où l'on parle en électrotechnique de la fréquence à l'instant t on peut parler, avec ces fonctions de domaine et avec la même définition mathématique, de la fréquence au point x qui correspond à l'axe de symétrie des fonctions de domaine employées.

Afin de nous rendre compte de l'effet produit par ces types de fonctions de domaine, nous avons pris pour test au début de notre travail les spectres obtenus par l'analyse harmonique des courbes photométriques des courbes figure 10 (a) et (b).

L'interposition devant les images analysées au périodographe est alors équivalente à une convolution opérée sur les spectres de ces courbes par le facteur de transmission correspondant à la fonction d'influence utilisée. La méthode a été indiquée par P. M. Duffieux [22]. La technique de calcul adoptée pour cette convolution est la suivante: la fonction de domaine a été choisie pour être réduite à 2/1000 sur une étendue représentant trois fois le domaine des courbes microphotométriques analysées. Les résultats de l'analyse spectrale sont donnés figure 15. Nous avons analysé les courbes déduites de la courbe photométrique relative au cliché filtré de la figure 8 (b) qui est plus incohérent que le cliché non filtré. Il est visible que l'incohérence est réduite mais est encore loin de rejoindre les courbes spectrales de la figure 9 faites au périodographe, où le spectre de granularité est intégré au spectre d'image.

7. CONCLUSIONS

Indépendamment des discussions relatives aux techniques de mesures, on se trouve en présence de deux groupes de résultats contradictoires au moins en première apparence: d'une part les études systématiques de spectres de fréquence montrent indubitablement que la transmission des fréquences étudiée sur l'image d'un objet quelconque permet de négliger les transmissions de fréquences supérieurs à 15 ou 20 mm⁻¹. D'un autre côté les études sur les trames uni- ou bi-dimensionnelles montrent qu'avec des procédés de détection convenables, toutes les fréquences transmissibles par les instruments d'optique peuvent être constatées même avec des émulsions relativement grossières.

S'il s'agit d'identifier un objet de nature ignorée, il est nécessaire que tous les éléments d'identification ou au moins un minimum de ces éléments, qui doit d'ailleurs dépendre de l'objet, soient conservés. C'est ce qui explique la limite assez basse des fréquences transmises acceptables.

Lorsqu'on sait d'avance ce qui a été enregistré sur une photographie, on est plus sensible à la ressemblance qui décide des résultats. C'est parce qu'on les connaît d'avance qu'on peut choisir un procédé physique d'investigation convenable, ou s'attacher aux indices les plus faibles et les plus fragiles pour décider de la ressemblance.

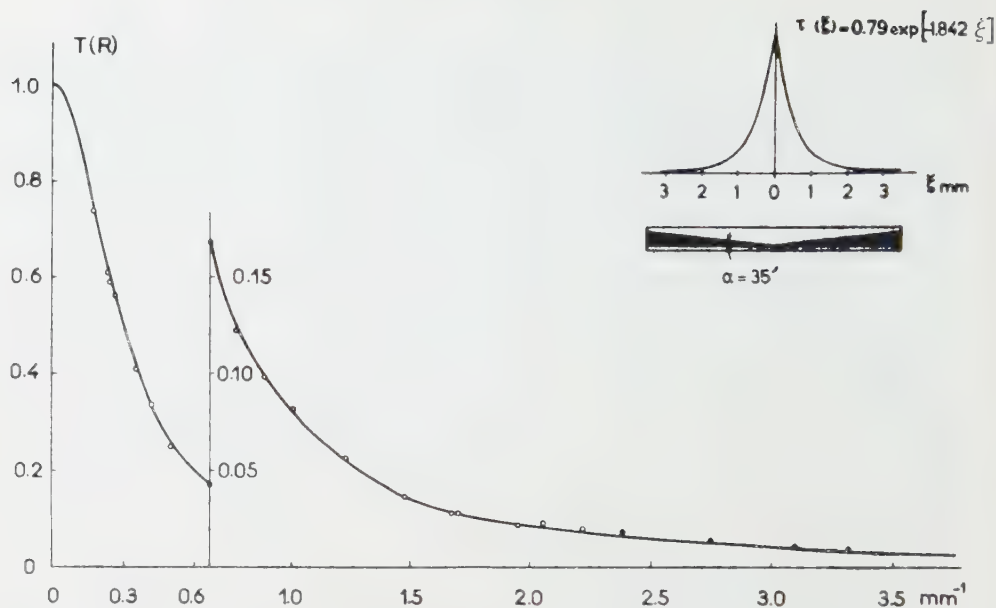


Figure 12. Ecran absorbant à variation de densité linéaire. Le spectre a été calculé à partir des données microphotométriques; les points expérimentaux ont été déterminés au périodographe.

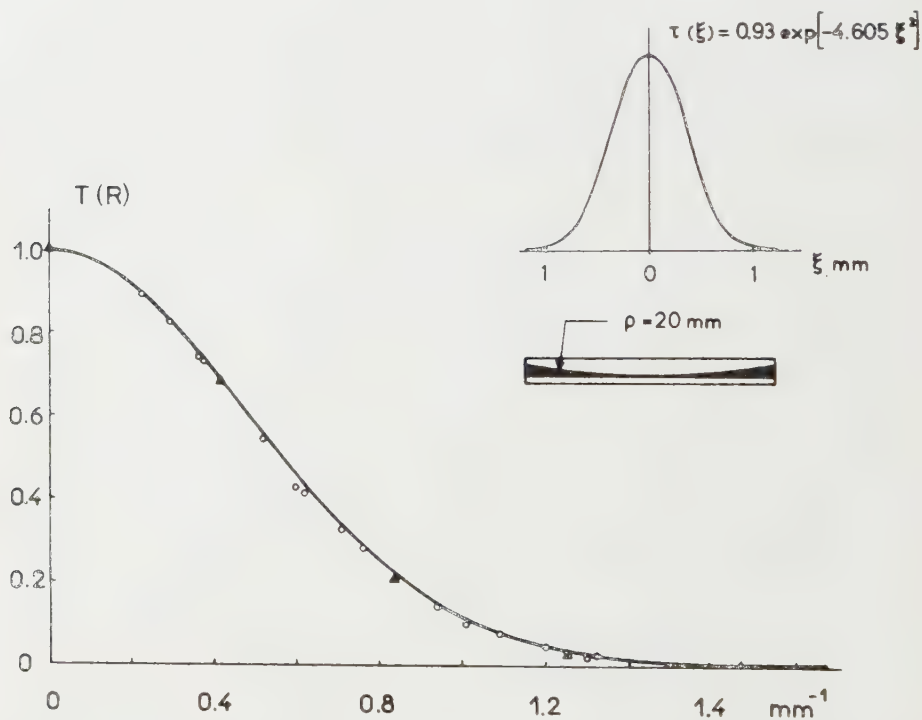


Figure 13. Ecran à variation de densité parabolique. Spectre calculé à partir des données microphotométriques. \circ : points déterminés au périodographe; \triangle : points déterminés à l'analyseur harmonique.

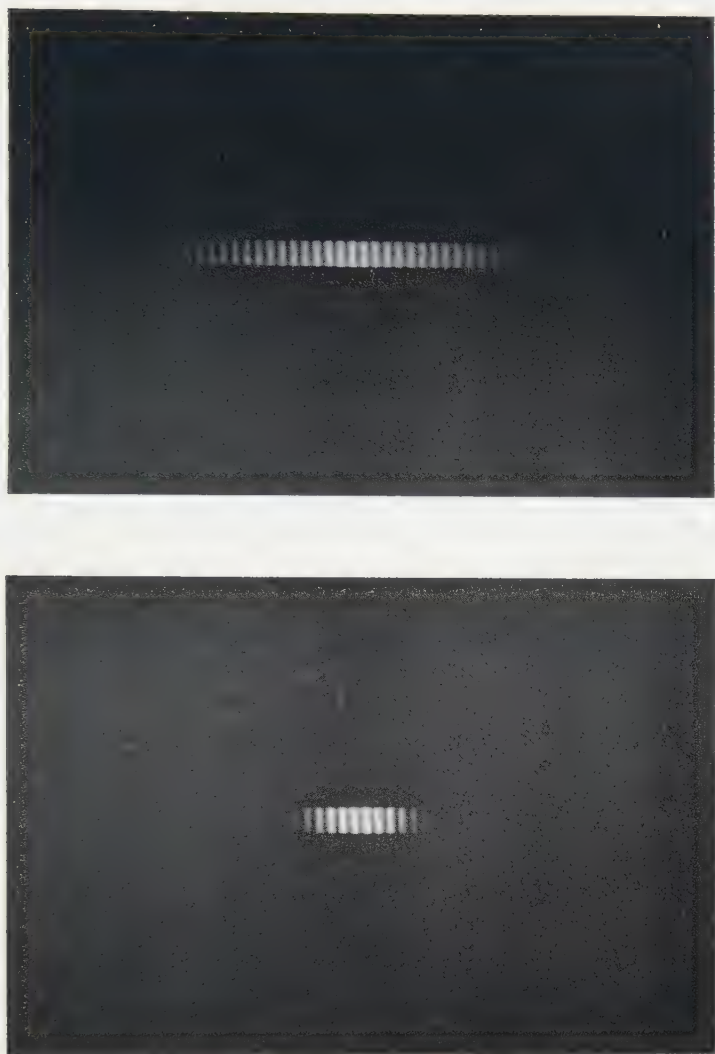


Figure 14. Photographies de franges d'interférences prises à travers un écran absorbant.
(a) du type $\exp(-B\xi)$; (b) du type $\exp(-C\xi^2)$.

Quant à la nature grenue de l'image photographique qui apparaît d'importance primordiale dans la limitation des fréquences identifiables, par conséquent de la ressemblance, il faut se rappeler que si la lithographie et la gravure au trait sur acier n'avaient pas habitué le public au grenu des gravures tracées à la main, on eût difficilement accepté les émulsions au bromure d'argent qui ont paru grossières et n'ont eu de succès que par leur rapidité (il faut songer qu'à l'époque du collodion humide les poses de 5 min au grand soleil étaient courantes). Ces sentiments sont encore très visibles dans le traité de photographie de Charles Fabre, paru en 1889.

Il y a dans le passage du négatif au positif tout un art, qui permet quelquefois de faire ressortir ce qui est demandé au cliché, souvent dans

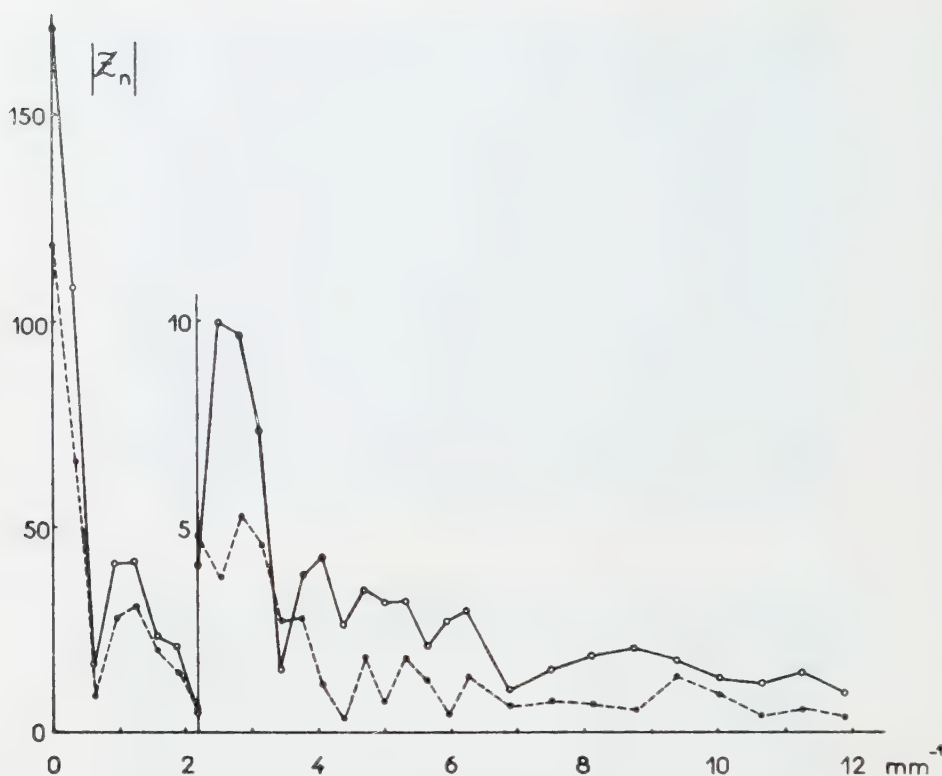


Figure 15. Analyse harmonique du produit de composition,

T [transparence du cliché] $*T$ [transparence de l'écran absorbant].

Le cliché est celui de la figure 8 (b). L'écran est du type $(-B\xi)$ pour la courbe en traits interrompus, et du type $\exp(-C\xi^2)$ pour la courbe en trait plein.

les cas où ce qui intéresse est très bien défini. Il est donc difficile de concevoir que l'étude de la photographie, moyen de reproduction des images, puisse être séparée de cet art.

On peut s'étonner encore de l'abandon complet des procédés sans grain. Ne pourraient-ils être perfectionnés? Ne peuvent-ils être applicables à des techniques modernes particulières, à celles des images électroniques par exemple?

In the photographic recording of an optical image, limitations due to the properties of the sensitive material, processing, etc., do not allow an exact representation of the object.

Useful overall information can be derived from a domain of spatial frequencies which is always limited.

Some methods of investigation of Fourier spectra are presented. They deal with studies of photographic images: results and comparisons are given in a particular case.

Performance of an interference periodograph is improved by using for the image domain to be analysed pupil functions converging uniformly and rapidly. In the last section the possibilities of such functions are shown as well as practical realizations of corresponding soft edge pupils.

Bei der photographischen Aufzeichnung von Bildern erreicht man wegen der Grenzen, die dem photographischen Prozess selbst anhaften, nur eine angenäherte Darstellung des Objektes. Ganz allgemein kann man die Tatsache feststellen, dass der Bereich der aufgezeichneten Ortsfrequenzen, aus denen man eine unmittelbar brauchbare Information erhält, immer verringert ist.

Es werden einige Untersuchungsverfahren der photographischen Bildspektren beschrieben, wie sie gegenwärtig im Laboratorium durchgeführt werden, sowie auch die Ergebnisse, die wir an einem besonderen Beispiel, das als Test gewählt wurde, erhalten haben.

Es wurde eine Verbesserung in der Ausführung eines Interferenz-Periodographen ins Auge gefasst, indem man asymptotisch abnehmende Funktionen einführt. Die Möglichkeiten und praktische Verwirklichung von Pupillen mit verlaufendem Rand werden in dem letzten Teil dargestellt.

RÉFÉRENCES

- [1] DU MARACHE et DUFFIEUX, P. M., 1942, *Sc. et Ind. Phot.*, **13**, 97, 103.
- [2] DU MARACHE, 1952, Thèse, Paris, *Cah. Phys.*, septembre.
- [3] DUFFIEUX, P. M., 1950, *Rev. Opt.*, **29**, 323.
- [4] DU MARACHE et NEWMANN, 1957, *J. Phys.*, **18**, 79 S.
- [5] DU MARACHE, 1955, *J. Phys.*, **16**, 734.
- [6] VIÉNOT, J. CH., 1957, Comm. Int. Symp. Prob. TV en couleurs, Paris; *Optica Acta et Acta Elect.*, **2**, 279.
- [7] VIÉNOT, J. CH., 1958, Thèse, Londres.
- [8] MME AEBISCHER, N., 1959, Thèse d'ingénieur-docteur, Besançon. (Appareil présenté à l'Exp. de la Sté de Physique, Paris, 1959.)
- [9] DU MARACHE et DUFFIEUX, P. M., 1952, *Rev. Opt.*, **31**, 401.
- [10] VIÉNOT, J. CH., 1958, *Proc. phys. Soc., Lond.*, **72**, 661.
- [11] MASUI, T., 1957, *Rev. Opt.*, **36**, 171.
- [12] DUFFIEUX, P. M., 1959, *Comm. Journées d'Optique, Marseille, mai* (à paraître).
- [13] VIÉNOT, J. CH., *Détermination du spectre de Fourier par méthode interférométrique ; contribution à l'étude des images photographiques* (à paraître).
- [14] DUFFIEUX, P. M., 1956, *J. Phys.*, **17**, 76 S.
- [15] VIÉNOT, J. CH., 1956, *Rev. Opt.*, **35**, 517.
- [16] OBERT, W. J., 1958, Thèse 3e cycle, Besançon.
- [17] DUFFIEUX, P. M., 1959, *Rev. Opt.*, **38**, 75.
- [18] COUDER, A., 1944, *C.R. Acad. Sci., Paris*, **219**, 677.
- [19] DUFFIEUX, P. M., 1953, *Rev. Opt.*, **32**, 405.
- [20] LORUS, CL., 1954, Diplôme d'Etudes Supérieures, Besançon.
- [21] BURTIN, R., 1955, *Rev. Opt.*, **34**, 273.
- [22] DUFFIEUX, P. M., 1946, *L'Intégrale de Fourier et ses Applications à l'Optique*, chap. X, (Besançon).

Temperaturmessungen an einer Russflamme

von FRITZ RÖSSLER

Forschungsinstitut St. Ludwig, Weil am Rhein

(Received 7 October 1959)

Die wahre Temperatur einer durch Russ leuchtenden Flamme kann erst dann angegeben werden, wenn die optische Dicke der Flamme bestimmt worden ist. Dazu sind im wesentlichen zwei Methoden bisher genannt und durchgeführt worden. Entweder werden schwarze und Farbtemperatur, oder die schwarze Temperatur der einfachen und der durch Spiegelung verdoppelten Flamme gemessen. Es sind aber noch weitere Methoden, vor allen Dingen die der Messung der Farbtemperatur von einfacher und gespiegelter Flamme, denkbar. Rechnungen dazu und Messungen an der Hefnerflamme werden ausgeführt. Die Ergebnisse werden verglichen und die einzelnen Methoden auch in bezug auf ihre Fehlerquellen diskutiert.

1. PROBLEMSTELLUNG

Hat man es mit einer kontinuierlich strahlenden Flamme zu tun, so genügt zur Temperaturbestimmung eine einzelne pyrometrische Messung nicht, da zwei Grössen der Flamme unbekannt sind. Das ist die wahre Temperatur und die optische Dicke der Flamme. Zur Kenntnis dieser Grössen wird also eine weitere Messung benötigt. Hier trennen sich nun die verschiedenen Methoden voneinander. Vielfach [1, 2] wird die optische Dicke einer Flamme künstlich verdoppelt, indem man die Flamme mittels eines Spiegels in sich selbst abbildet. Es wird dann die schwarze Temperatur sowohl der einfachen wie auch der verdoppelten Flamme gemessen. Man kann aber auch so vorgehen, dass die Flamme unverändert bleibt und die schwarze Temperatur für 2 Wellenlängen [1], oder was diesem Vorgehen ähnelt, die schwarze und die Farbtemperatur [3] gemessen werden.

In dieser Abhandlung sollen beide Methoden miteinander verglichen werden. Dabei werden wir uns auf durch Russ leuchtende Flammen beschränken. Es ist zunächst notwendig, einige Beziehungen für die Schichtverdoppelung abzuleiten. Anschliessend werden Messungen an der Amylacetatflamme ausgeführt und besprochen.

2. BERECHNUNGEN

Wie bereits in einer früheren Arbeit [4] denken wir uns die Strahlung der Flamme aus der Strahlung einzelner Schichten zusammengesetzt. In der dünnen Schicht mit der optischen Dicke† dX wird auf Grund des Kirchhoffschen Gesetzes $E_{\lambda_m T} \cdot dX$ abgestrahlt, wenn $E_{\lambda_m T}$ die Plancksche Funktion kennzeichnet. λ_m ist dabei die Bezugswellenlänge, bei der die Messung stattfindet. Bezeichnen wir die gesamte optische Dicke der Flamme mit D , betrachten die Ausstrahlung in der positiven X -Richtung und lassen die Flamme im Koordinatenanfangspunkt beginnen, dann erfährt die Ausstrahlung der Schicht dX eine Absorption in der Flamme nach Massgabe des zurückgelegten Weges:

† Wie in den früheren Arbeiten ist die optische Dicke das Produkt aus Absorptionskoeffizient und Weg, gibt also direkt die Absorption an.

$D-X$. Die Strahlung beträgt also $E_{\lambda_m T} \cdot dX \cdot \exp [-(D-X)]$. Sie ist dann über die gesamte Flamme zu summieren. Man erhält†:

$$I = \int_0^D E_{\lambda_m T} \cdot \exp [-(D-X)] dX.$$

Wird die Flamme durch Spiegelung in sich selbst abgebildet, so muss die Integration auch noch nach $-D$ fortgesetzt werden. Allerdings wirkt diese Strahlung nur mit dem durch das Reflexionsvermögen r des Spiegels gegebenen Bruchteil‡:

$$\bar{I} = \int_0^D E_{\lambda_m T} \cdot \exp [-(D-X)] dX + r \int_{-D}^0 E_{\lambda_m T} \cdot \exp [-(D-X)] dX,$$

$$\bar{I} = [1 + r \exp (-D)] \cdot \int_0^D E_{\lambda_m T} \cdot \exp [-(D-X)] dX = [1 + r \exp (-D)] \cdot I. \quad (1)$$

Diese Gleichung hätte man entsprechend dem Vorgehen in Arbeit [4] auch aus der dort aufgestellten Differentialgleichung (2) ableiten können. Die Randbedingung für $D=0$ ist dann jedoch gegeben durch $r \cdot I$. Es folgt, wie es ja auch sein muss, wieder Gl. (1).

Im allgemeinen Fall einer Flamme nicht einheitlicher Temperatur über den gesamten Querschnitt (Temperaturänderung nach dem Rande zu) ist es nicht möglich, das Integral sofort zu berechnen. Wie in Arbeit [4] gezeigt wurde, kann aber der Faktor $E_{\lambda_m T}$ abgespalten werden. Der Restfaktor heisst dann das Absorptionsvermögen, das im allgemeinen Fall eine komplizierte Form annimmt (Gl. (8) von Arbeit [4]).

Für das Absorptionsvermögen a_{λ_m} , das durch

$$I = a_{\lambda_m} \cdot E_{\lambda_m T} \quad \text{bzw.} \quad \bar{I} = \bar{a}_{\lambda_m} \cdot E_{\lambda_m T} \quad (2)$$

charakterisiert ist, folgt daraus:

$$\bar{a}_{\lambda_m} = a_{\lambda_m} \cdot [1 + r \exp (-D)]. \quad (3)$$

Damit wird auf Grund der Definitionsgleichung der schwarzen Temperatur S :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{T} - \frac{1}{S_{\lambda_m}} &= \frac{\lambda_m}{c_2} \ln a_{\lambda_m}, \\ \frac{1}{T} - \frac{1}{S_{\lambda_m}} &= \frac{\lambda_m}{c_2} \ln [1 + r \exp (-D)] + \frac{\lambda_m}{c_2} \ln a_{\lambda_m}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\boxed{\delta \frac{1}{S} \equiv \frac{1}{S_{\lambda_m}} - \frac{1}{\bar{S}_{\lambda_m}} = \frac{\lambda_m}{c_2} \ln [1 + r \exp (-D)]} \quad \S \quad (5)$$

Diese Gleichung (5) gibt die Änderung der schwarzen Temperatur durch Spiegelung der Flamme an.

Will man die gleiche Berechnung für die Farbtemperatur durchführen, so hat man zu berücksichtigen, dass die optische Dicke D sich definitionsgemäss

† Dabei ist, was für die gesamte Arbeit gilt, das Reflexionsvermögen der Flamme vernachlässigt worden.

‡ Alle durch Spiegelung entstandenen Grössen seien durch Ueberstreichen gekennzeichnet.

§ Dabei ist allerdings ebenso, wie später bei Gl. (8), vorausgesetzt, dass T durch die Spiegelung keine Erhöhung erfährt.

[5] auf die Wellenlänge λ_m bezieht†. Beim Uebergang zu einer anderen Wellenlänge λ in der Umgebung von λ_m ändert sich die optische Dicke wie [5]

$$D \cdot \left(\frac{\lambda_m}{\lambda} \right)^{n_{\lambda_m}}.$$

Es wird also

$$\bar{a}_{\lambda_m} = a_{\lambda_m} \cdot [1 + r \exp(-D \cdot (\lambda_m/\lambda)^{n_{\lambda_m}})] \equiv a_{\lambda_m} \cdot R \ddagger. \quad (6)$$

Aus der Definition der differentiellen Farbtemperatur (Verteilungstemperatur) f [5, 6]:

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{f} = + \frac{1}{c_2} \cdot \frac{\partial \ln a_{\lambda_m}}{\partial (1/\lambda)} \quad (7)$$

folgt

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{f} = + \frac{1}{c_2} \cdot \frac{\partial \ln \bar{a}_{\lambda_m}}{\partial (1/\lambda)} = + \frac{1}{c_2} \cdot \frac{\partial \ln a_{\lambda_m}}{\partial (1/\lambda)} + \frac{1}{c_2} \cdot \frac{\partial \ln R}{\partial (1/\lambda)},$$

$$\delta \frac{1}{f} \equiv \frac{1}{\bar{f}} - \frac{1}{f} = - \frac{1}{c_2} \cdot \frac{\partial \ln R}{\partial (1/\lambda)},$$

$$\delta \frac{1}{f} = + \frac{\lambda_m}{c_2} \cdot \frac{D n_{\lambda_m} r \cdot (\lambda_m/\lambda)^{n-1}}{\exp [D(\lambda_m/\lambda)^n] + r}.$$

Es genügt für unsere Zwecke, f nur für λ_m zu betrachten. Damit geht in Übereinstimmung mit den Bezeichnungen der Arbeit [5] f_{λ_m} in F über. $F \equiv f_{\lambda_m}$.

$$\boxed{\delta \frac{1}{F} \equiv \frac{1}{\bar{F}} - \frac{1}{F} = \frac{\lambda_m}{c_2} \cdot \frac{n_{\lambda_m} D r}{e^D + r}}. \quad (8)$$

So ist also die Aenderung der Farbtemperatur durch Spiegelung berechnet§.

Wenn wir nun diese Gleichungen zur Bestimmung von D und T einer Flamme benutzen, so wollen wir uns zur Vereinfachung auf homogene Flammen einer einheitlichen Temperaturverteilung beschränken. In diesem Falle lässt sich $E_{\lambda_m T}$ in Gl. (1) als konstante Grösse vor das Integral ziehen und dieses dann leicht ausrechnen.

$$\bar{I} = [1 + r \exp(-D)] \cdot I = (1 + r \exp(-D)) \cdot [1 - \exp(-D)] \cdot E_{\lambda_m T}.$$

Nach der Definition der Gl. (2) wird also:

$$a_{\lambda_m} = 1 - \exp(-D). \quad (9)$$

Nach dem oben Gesagten wird für andere Wellenlängen daraus:

$$a_{\lambda_m} = 1 - \exp[-D(\lambda_m/\lambda)^{n_{\lambda_m}}].$$

† Die Bezeichnungen dieser Arbeit stimmen mit denjenigen von Arbeit [5] überein.

‡ Das Zeichen \equiv ist gleichbedeutend mit der Einführung einer abkürzenden Bezeichnung.

§ Für Gl. (8) ebenso wie für Gl. (5) ist es charakteristisch, dass unabhängig von der Temperaturverteilung in der Flamme sich stets der gleiche Ausdruck ergibt. Das ist einerseits angenehm, auf der anderen Seite entfällt dadurch aber die Möglichkeit, eine Messung von S , \bar{S} , F und \bar{F} dazu zu benutzen, um D , T , A (Randdicke) und G (Temperaturgradient) nach Arbeit [4] zu bestimmen, welches die ursprüngliche Hoffnung und der eigentliche Anlass zu dieser Arbeit war.

Genau wie für R wird $\partial \ln a_{\lambda_m} / \partial (1/\lambda)$ gebildet und auf λ_m spezialisiert. Es ergibt sich:

$$\lambda_m \cdot n_{\lambda_m} \cdot \frac{D}{e^D - 1}.$$

Damit wird dann für homogene Flammen aus Gl. (4), (5) und (7), (8):

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{S_{\lambda_m}} = \frac{\lambda_m}{c_2} \cdot \ln[1 - \exp(-D)], \quad (10)$$

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{\bar{S}_{\lambda_m}} = \frac{\lambda_m}{c_2} \cdot \ln[1 - \exp(-D)][1 + r \exp(-D)], \quad (11)$$

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{F} = \frac{\lambda_m}{c_2} \cdot \frac{n_{\lambda_m} \cdot D}{e^D - 1}, \quad (12)$$

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{\bar{F}} = \frac{\lambda_m}{c_2} \cdot n_{\lambda_m} \cdot D \left(\frac{1}{e^D - 1} + \frac{r}{e^D + r} \right). \quad (13)$$

Diese Gleichungen (10) und (12), wie es auch zu verlangen ist, stehen in Uebereinstimmung mit den früher [3] für homogene einfache Flammen abgeleiteten.

Die wirksame optische Dicke \bar{D} der gespiegelten Flamme errechnet sich jetzt für die homogene Flamme aus Gl. (9) und (11) zu:

$$1 - \exp(-\bar{D}) = [1 - \exp(-D)] \cdot [1 + r \exp(-D)],$$

$$\bar{D} = D - \ln\{1 - r[1 - \exp(-D)]\}. \quad (14)$$

Für $r=1$ wird $\bar{D}=2D$, wie es auch sein muss. Für geringe Schichtdicken wird aus (14):

$$\bar{D} = D(1+r) \quad (14a)$$

Wenn nun je 2 von den 4 Grössen S_{λ_m} , \bar{S}_{λ_m} , F oder \bar{F} gemessen sind, dann lassen sich D und T daraus berechnen.

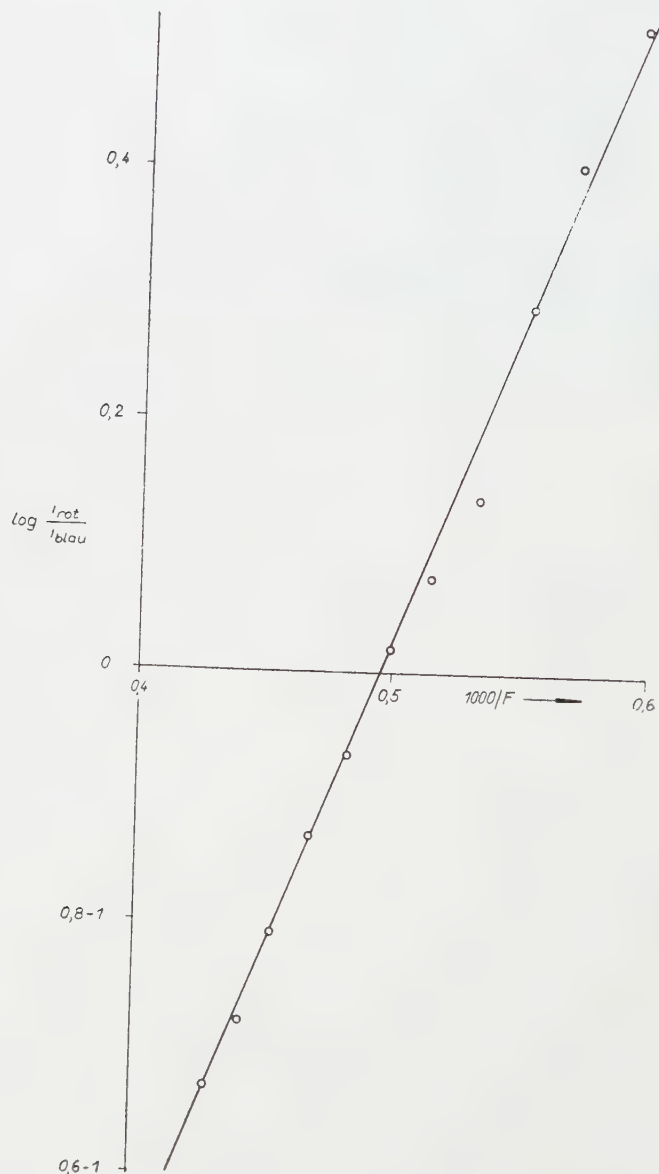
3. MESSUNGEN

Es ist wichtig, dass alle 4 Grössen S_{λ_m} , \bar{S}_{λ_m} , F und \bar{F} zur gleichen Zeit an der gleichen Flamme und in gleicher Höhe gemessen werden. Es hat also in diesem Zusammenhang wenig Sinn, Daten der Literatur zu übernehmen. Als Objekt wurde, wie bisher bei meinen Arbeiten, wegen ihrer guten Definiertheit die Amylacetatflamme, die Hefnerlampe, gewählt.

Die Flamme wurde durch einen Hohlspiegel mit Feinjustierung in sich selbst abgebildet. Wahlweise wurde der Spiegel mit einem matten schwarzen Tuch schräg zur optischen Achse verhangen, so dass auch ein geringes Reflexionsvermögen des Tuches nicht stören konnte. In Verlängerung der Richtung Spiegel-Flamme wurde die Flamme mittels eines Objectives auf eine Blende abgebildet, die zu einem mit 2 Multipliern ausgerüsteten Gerät gehörte. Figur 1 zeigt die Anordnung. Die Blende hatte einen Durchmesser von 4 mm, die Abbildung, im besonderen die Ueberlagerung beider Bilder, liess sich auf ihr sehr gut kontrollieren. Hinter der Blende befand sich Pauspapier. Gemessen wurde in 20 mm Höhe über dem Neusilberrohr der Flamme. Das direkte Licht im Gerät ging durch eine schräg gestellte Glasplatte hindurch, weiter durch ein



Figur 1. Anordnung zur Temperaturmessung



Figur 2. Eichgerade für die Farbtemperatur.

Interferenzfilter† für 433 nm (Schott) zum Multiplier IP21 (RCA). Das an der Glasplatte reflektierte Licht fiel durch ein Interferenzfilter‡ für 680 nm auf einen anderen Multiplier 931 A. Die Multiplier waren gesondert durch Kapselung vollständig gegen Licht anderer Wellenlängen abgeschirmt. Jeder Multiplier wurde mit 1000 Volt betrieben und die Ströme i getrennt abgelesen. Die Multiplier waren nach der Kleinheit ihres Dunkelstromes für diesen Zweck besonders ausgesucht worden. Das rote Licht war durch das schwache Reflexionsvermögen der unbehandelten Glasplatte so stark geschwächt worden, dass das bei der Hefnerkerze recht grosse Rot-Blau-Verhältnis im Stromstärkeverhältnis $i_{\text{rot}}/i_{\text{blau}}$ der Multiplier erheblich verringert wurde. Diese Verhältniszahl hat naturgemäss nur relative Bedeutung. Sie ist eine Konstante der Apparatur.

Wichtig war daher eine Eichung. An die Stelle der Flamme wurde eine Bandlampe bekannter Daten gesetzt. Das Bild des Bandes überdeckte die Blendenöffnung völlig. Wurde der negative Logarithmus des Zellenstromes gegen $1/S_{\lambda_m}$ der Bandlampe aufgetragen, so ergab sich eine Gerade, aus deren Neigung durch Verwendung des Wienschen Strahlungsgesetzes die wirksame Wellenlänge zu 685,0 nm abgeleitet wurde. Genau genommen wurde dann weiter so vorgegangen, dass die schwarzen Temperaturen S_{λ}^* der Bandlampe für $\lambda = 685$ nm berechnet wurden und damit dann die eigentliche Eichgerade für die Ablesung der schwarzen Temperaturen der Flamme neu gezeichnet wurde.

Dasselbe geschah mit der Farbtemperatur der Bandlampe‡ und dem Stromstärkeverhältnis der Zellen. Wie Figur 2 zeigt, ergab sich auch hier eine Eichgerade. Ihre Neigung hängt, wie die zweimalige Anwendung des Wienschen Gesetzes ergibt, mit der reziproken Differenz der beiden Wellenlängen zusammen und führt zur Bestimmung der wirksamen Wellenlänge 441,3 nm des blauen Filters§. Aus den beiden charakteristischen Wellenlängen der Filter errechnet sich nun die für die Farbtemperatur massgebende durch reziproke Mittelung [5]: $2/\lambda = 1/\lambda_1 + 1/\lambda_2$ zu 537,0 nm. In Tabelle 1 sind die Messergebnisse zusammengestellt. Das Flackern der Flamme begrenzt naturgemäss die Genauigkeit.

Tabelle 1. Gemessene Temperaturen der Hefnerlampe in °K

Spiegel ↓	Gemessen		Umgerechnet	
	S_{λ}	f	S_{λ_m}	F
$\lambda_{(\text{nm})} \rightarrow$	685	537	660	660
ohne	1445	1869	1458	1903
mit	1506	1854	1515	1888

† Andere Filter waren für eine Farbtemperaturmessung nicht brauchbar, weil der durchgelassene Bereich zu breit war. Das zeigte sich bei der Eichung.

‡ Dabei wurden die Messungen von de Vos [7] verwertet.

§ Die Veränderung der wirksamen Wellenlänge gegenüber der Wellenlängenangabe der Filter ist bedingt durch den Einfluss der spektralen Empfindlichkeitsverteilung des Multipliers.

|| Die Korrektur des Reflexionsvermögens von S.7 ist bereits berücksichtigt.

Die Daten beziehen sich auf die durch die Messapparatur zufällig gegebenen Wellenlängen. Das wesentliche Ergebnis der Arbeit [5] war die Feststellung, dass die Farbtemperatur einer Flamme durchaus nennenswert von der Wellenlänge abhängig ist. Daher muss nach den in Arbeit [5] ausführlich behandelten Verfahren eine Umrechnung auf die normale Bezugswellenlänge $\lambda_m = 660$ nm erfolgen. Unter Benutzung der Daten von Gl. (10)† und der Umrechnungsgleichungen (31) und (23) für F und (18d) für S (alle aus Arbeit [5]) wurden die Zahlen der rechten Seite von Tabelle 1 erhalten. Dabei wurden für D bzw. \bar{D} in Vorwegnahme späterer Ergebnisse bereits die Werte 0,1 bzw. 0,2 verwandt.

Das Reflexionsvermögen r des Spiegels ergab sich für 660 nm zu 0,85. Es wurde hinter einem Monochromator gemessen, da sich nämlich herausstellte, dass das Reflexionsvermögen von der Wellenlänge abhängig war, was natürlich den Wert der Farbtemperatur im Reflexionsfall erheblich veränderte. Es musste also an dem experimentellen Blau-Ausschlag eine entsprechende Korrektur von +10 Prozent angebracht werden.

Optisch wurde dabei so vorgegangen, dass eine Bandlampe mittels Kondensors auf ein Objektiv abgebildet wurde, das seinerseits den Kondensor wieder auf den Monochromatorspalt abbildete. Dadurch wurde eine extrafokale Abbildung der Bandlampe auf dem Spalt, dafür aber eine homogene Ausleuchtung von Spalt und besonders Multiplier bewirkt. Das durch den Spiegel erzeugte Bild des Bandes befand sich in gleicher Ebene, aber etwas oberhalb des eigentlichen Bandes. Leider liess sich dabei nicht vermeiden, dass das reflektierte Licht den Glaskolben der Lampe durchsetzen musste. Dessen Durchlässigkeit wurde daher mittels einer Hilfslampe noch getrennt bestimmt und berücksichtigt.

4. AUSWERTUNGEN

Wie bereits zu Beginn angedeutet wurde, dienen die auf $\lambda_m = 660$ nm bezogenen Messergebnisse der Tabelle 1 zur Berechnung von D und T . Die Ergebnisse sind in Tabelle 2 wiedergegeben. Durch Kombination von je 2 gemessenen Werten der S bzw. F wurden die angegebenen Werte für D bzw. T erhalten.

Tabelle 2. Berechnete optische Dicke und Temperatur in °K der Hefner-flamme

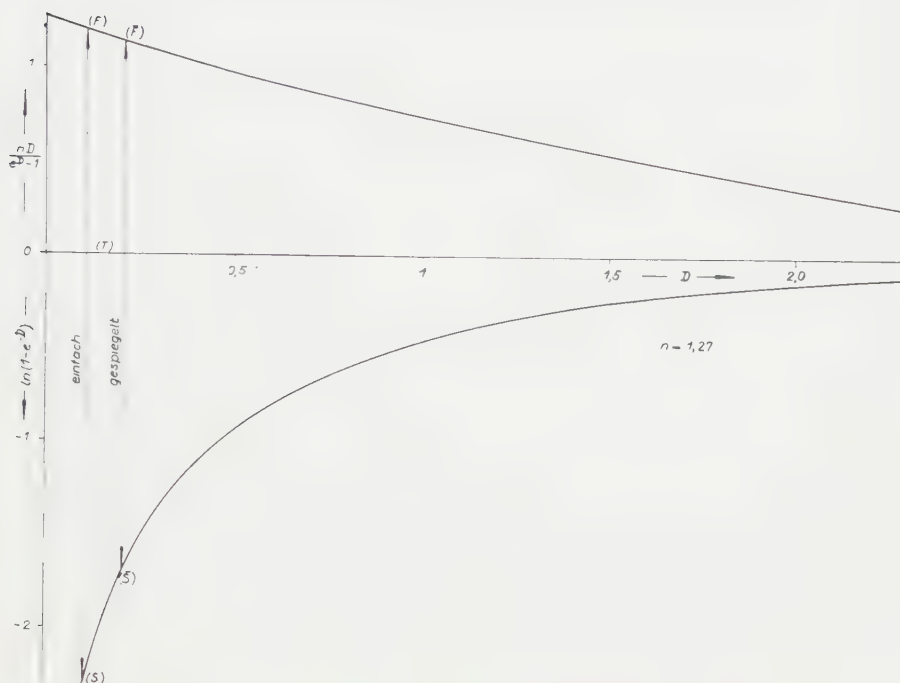
		T-Werte			
		S	F	\bar{S}	\bar{F}
D-Werte	S		1722	1705	1718
	F	0,11		1721	1726
	\bar{S}	0,12	0,11		1718
	\bar{F}	0,11	0,16	0,11†	

† Es können nicht die Nomogramme der Arbeit [5] verwandt werden, weil diese sich auf eine mittlere Russflame und nicht auf die Hefnerflamme beziehen.

‡ Der Wert $\bar{D} = 0,21$ wurde mittels Gl. (14) in den in der Tabelle angegebenen D -Wert umgerechnet.

Im einzelnen wurde dabei so verfahren: Kombinieren wir S_{λ_m} mit F , so entspricht das dem Vorgehen in Arbeit [3]. Für S_{λ_m} und F gelten die Gl. (10) bzw. (12). Ihre Differenz liefert:

$$\frac{1}{S_{\lambda_m}} - \frac{1}{F} = \frac{\lambda_m}{c_2} \left[\frac{n_{\lambda_m} \cdot D}{e^D - 1} - \ln [1 - \exp(-D)] \right] \equiv + \frac{\lambda_m}{c_2} \ln \frac{1}{p}^\dagger. \quad (15)$$



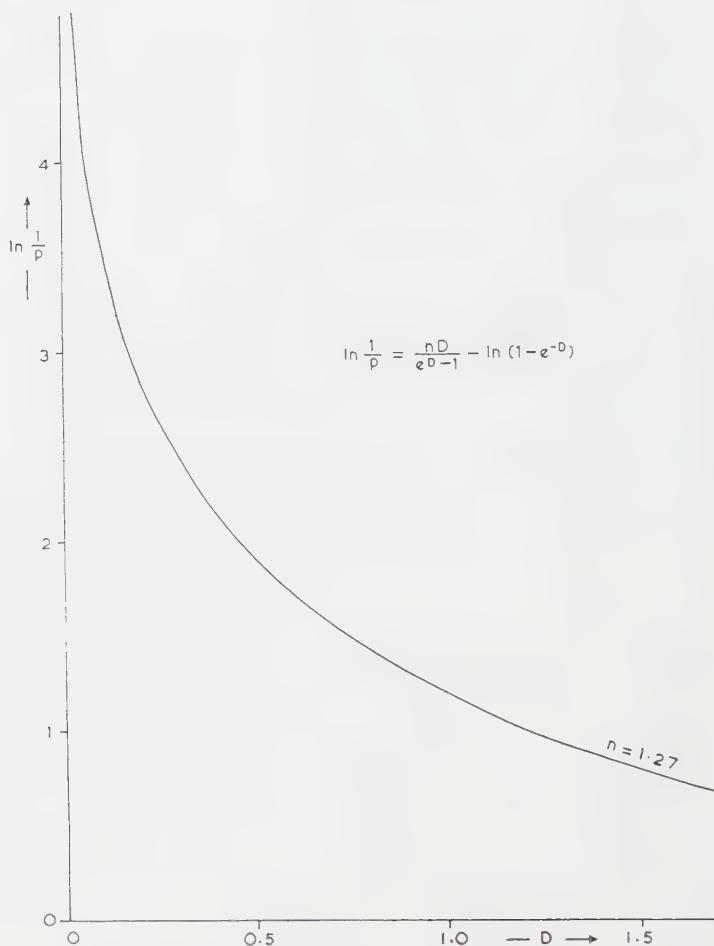
Figur 3. Einfluss der optischen Dicke auf Farb- und schwarze Temperatur.

In Figur 3 sind die Exponentialfunktionen der rechten Seiten der Gl. (12) und (10) dargestellt. Dabei wurde $n_{660} = 1,27$ gesetzt. Später wird noch $c_2 = 1,438 \text{ cm} \cdot \text{grad}$ benötigt werden. Zur leichteren Bestimmung von D aus $\ln p$ ist das Letztere als Funktion von D in Figur 4 noch getrennt dargestellt worden. Mit diesem D berechnet man dann T aus Gl. (10) oder (12). Die Kombination S_{λ_m} und \bar{S}_{λ_m} liefert mittels Gl. (5) direkt D . Gl. (10) ergibt dann T . Entsprechend ergaben F und \bar{F} mittels Gl. (8) D und Gl. (12) schliesslich T . Im letzteren Fall tritt jedoch eine Besonderheit auf. Verfolgt man nämlich den Verlauf der D -Funktionen der Gl. (5) und (8), wie er in Figur 5 dargestellt ist, so sieht man, dass $\delta(1/S)$ zu einem eindeutigen D -Wert führt, $\delta(1/F)$ dagegen nicht mehr. Ausser dem in Tabelle 2 angegebenen $D = 0,16$ ist auch der in unserem Fall allerdings unbrauchbare Wert $D = 3,82$ mit $\delta(1/F)$ verträglich. Die Lage des Maximums der Kurve b ist gegeben durch: $e^D + r - De^D = 0$. Für $r = 0,85$ folgt daraus: $D = 1,24$.

Die an sich unorganischen Kombinationen S_{λ_m} und \bar{F} bzw. \bar{S}_{λ_m} und F benötigen die Differenz der Gl. (10) und (13) bzw. (11) und (12). Zur Bestimmung von D löst man die Gleichung numerisch oder zeichnet die Kurven entsprechend den Figuren 3 und 4, die aber hier nicht wiedergegeben wurden. T folgt dann aus Gl. (10) bzw. (12).

$^\dagger p$ heisst das Farbemissionsvermögen.

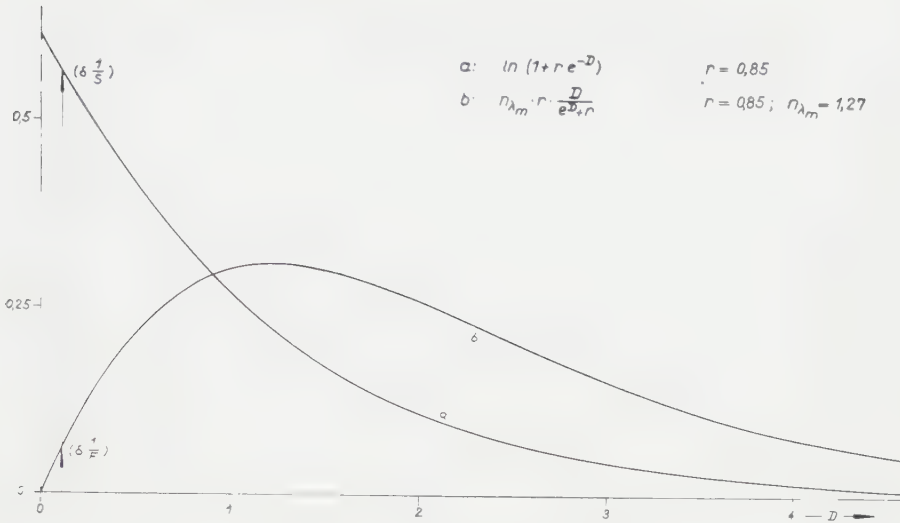
Vergleicht man die jetzigen Ergebnisse mit denjenigen früherer Autoren, wie sie in Arbeit [5] diskutiert wurden, so stimmen die Angaben der Farbtemperaturen mit 1900 K und die der wahren Temperaturen† mit 1720°K ausreichend miteinander überein. Diese Werte kann man damit wohl als genügend gesichert ansehen. Anders ist es dagegen mit dem Betrieb der Flamme und damit zusammenhängend mit der schwarzen Temperatur und der optischen Dicke. Mein



Figur 4. Farbemissionsvermögen p als Funktion der optischen Dicke D .

Wert liegt mit 1460°K 20° unter den von anderer Seite gemessenen. Nun ist das Brennen der Flamme von Luftdruck und Luftzusammensetzung abhängig. Weiter kommt hinzu, dass die Blende von 4 mm Durchmesser, die 2,5 mm der Flamme entsprechen, eine Mittelung der Strahlung bewirkt. Schliesslich besteht noch die Möglichkeit, dass die Flamme eine Kleinigkeit schwächer als vorgeschrieben bei mir brannte. Da aber nicht die Hefnerflamme, sondern nur eine Flamme als Modell untersucht werden sollte, wurde diese Diskrepanz nicht weiter verfolgt.

† Wie die Fehlerdiskussion gleich noch zeigen wird, ist in unserem Falle die Genauigkeit von F für diejenige von T massgebend (Gl. (17 a)), während diejenige von S dagegen zu vernachlässigen ist.



Figur 5. Spiegelungsfunktionen.

5. FEHLERDISKUSSION

Eine eingehendere Diskussion der Ergebnisse ermöglicht die genaue Fehlerberechnung. Geht man für die S - F -Kombination von Gl. (15) aus und differenziert sie, so erhält man ΔD . Diesen Wert setzt man in die ebenfalls differenzierte Gl. (12) ein und erhält $\Delta(1/T)$. Der Einfachheit halber setzen wir noch: $n \sim 1$. Würden wir von allen Grössen die absoluten Werte nehmen, so würden wir den maximal möglichen Fehler erhalten. Uebereinstimmend mit dem Gauss-schen Fehlerfortpflanzungsgesetz ist es aber zweckmässiger, von allen Faktoren die Quadrate zu bilden. Die Δ -Grössen stellen dann die mittleren Fehler dar.

$$(\Delta D)^2 = \left[\frac{c_2}{\lambda_m} \cdot \frac{(e^D - 1)^2}{D e^D} \right]^2 \cdot \left[\left(\Delta \frac{1}{S} \right)^2 + \left(\Delta \frac{1}{F} \right)^2 \right], \quad (16)$$

$$\left(\Delta \frac{1}{T} \right)^2 = \left[\frac{1 - e^{-D}}{D} \right]^2 \cdot \left(\Delta \frac{1}{F} \right)^2 + \left[\frac{D - 1 + \exp(-D)}{D} \right]^2 \cdot \left(\Delta \frac{1}{S} \right)^2. \quad (17)$$

Entsprechend erhält man für die S - \bar{S} -Kombination die Gleichungen (18) und (19), wenn man einen Fehler von r zwar berücksichtigt, in den Gleichungen nachher aber $r \sim 1$ setzt.

$$(\Delta D)^2 = (\Delta r)^2 + \left[\frac{c_2}{\lambda_m} \cdot (e^D + 1) \right]^2 \cdot \left[\left(\Delta \frac{1}{S} \right)^2 + \left(\Delta \frac{1}{\bar{S}} \right)^2 \right], \quad (18)$$

$$\left(\Delta \frac{1}{T} \right)^2 = \left[\frac{\lambda_m}{c_2} \cdot \frac{1}{e^D - 1} \right]^2 \cdot (\Delta r)^2 + \left[\frac{2}{e^D - 1} \right]^2 \cdot \left(\Delta \frac{1}{S} \right)^2 + \left[\frac{e^D + 1}{e^D - 1} \right]^2 \cdot \left(\Delta \frac{1}{\bar{S}} \right)^2. \quad (19)$$

In gleicher Weise leiten sich Gl. (20) und (21) ab, die für die Kombination F - \bar{F} gelten. Dabei sehen wir allerdings von der durch Zweideutigkeit von D gegebenen Fehlerquelle ab.

$$(\Delta D)^2 = \left[\frac{D e^D}{e^D + 1 - D e^D} \right]^2 \cdot (\Delta r)^2 + \left[\frac{c_2}{\lambda_m} \cdot \frac{(e^D + 1)^2}{e^D + 1 - D e^D} \right]^2 \cdot \left[\left(\Delta \frac{1}{F} \right)^2 + \left(\Delta \frac{1}{\bar{F}} \right)^2 \right], \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \left(\Delta \frac{1}{T}\right)^2 &= \left[\frac{\lambda_m}{c_2} \cdot \frac{De^D(e^D - 1 - De^D)}{(e^D - 1)^2(e^D + 1 - De^D)} \right]^2 \cdot (\Delta r)^2 + \left[\frac{(e^D + 1)^2(e^D - 1 - De^D)}{(e^D - 1)^2(e^D + 1 - De^D)} \right]^2 \\ &\times \left(\Delta \frac{1}{F}\right)^2 + \left[1 - \frac{(e^D + 1)^2(e^D - 1 - De^D)}{(e^D - 1)^2(e^D + 1 - De^D)} \right]^2 \cdot \left(\Delta \frac{1}{F}\right)^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Für die uns hier vorwiegend interessierenden kleinen D wird daraus:

$$(\Delta D)^2 = \left(\frac{c_2}{\lambda_m} \cdot D\right)^2 \cdot \left[\left(\Delta \frac{1}{S}\right)^2 + \left(\Delta \frac{1}{F}\right)^2 \right], \quad (16 a)$$

$$\left(\Delta \frac{1}{T}\right)^2 = \left(1 - \frac{D}{2}\right)^2 \cdot \left(\Delta \frac{1}{F}\right)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot \left(\Delta \frac{1}{S}\right)^2, \quad (17 a)$$

$$(\Delta D)^2 = (\Delta r)^2 + \left[\frac{c_2^2}{\lambda_m} \cdot (2 + D) \right]^2 \cdot \left[\left(\Delta \frac{1}{S}\right)^2 + \left(\Delta \frac{1}{F}\right)^2 \right], \quad (18 a)$$

$$\left(\Delta \frac{1}{T}\right)^2 = \left[\frac{\lambda_m}{c_2} \cdot \frac{1}{D} \right]^2 \cdot (\Delta r)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot \left(\Delta \frac{1}{S}\right)^2 + \left(\frac{2+D}{D}\right)^2 \cdot \left(\Delta \frac{1}{F}\right)^2, \quad (19 a)$$

$$(\Delta D)^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot (\Delta r)^2 + \left[\frac{c_2}{\lambda_m} (1 + D) \right]^2 \cdot \left[\left(\Delta \frac{1}{F}\right)^2 + \left(\Delta \frac{1}{F}\right)^2 \right], \quad (20 a)$$

$$\left(\Delta \frac{1}{T}\right)^2 = \left(\frac{\lambda_m}{c_2} \cdot \frac{D}{4}\right)^2 \cdot (\Delta r)^2 + (1 + \frac{2}{3}D)^2 \cdot \left(\Delta \frac{1}{F}\right)^2 + (2 + \frac{2}{3}D)^2 \cdot \left(\Delta \frac{1}{F}\right)^2. \quad (21 a)$$

Für die jetzt folgende Diskussion wird immer nur ein Glied der rechten Seite betrachtet und daher von den linearen Grössen ausgegangen werden. Aus den Daten der Tabelle 2 folgt in Uebereinstimmung mit früheren Erfahrungen, dass die Werte von D stärker streuen als die von T . Das ist sofort den Gleichungen für ΔD zu entnehmen. Da λ_m^{-1} der Proportionalitätsfaktor der Temperaturmessfehler ist, wird der Fehler von ΔD erheblich vergrössert gegenüber demjenigen von $\Delta(1/T)$ mit dem Faktor λ_m^0 . Die Faktoren von Δr liegen demgegenüber noch um den Faktor λ_m^{-1} vorteilhafter†, d.h. bei ΔD lautet der Faktor λ_m^0 und bei $\Delta(1/T)$: λ_m^{+1} .

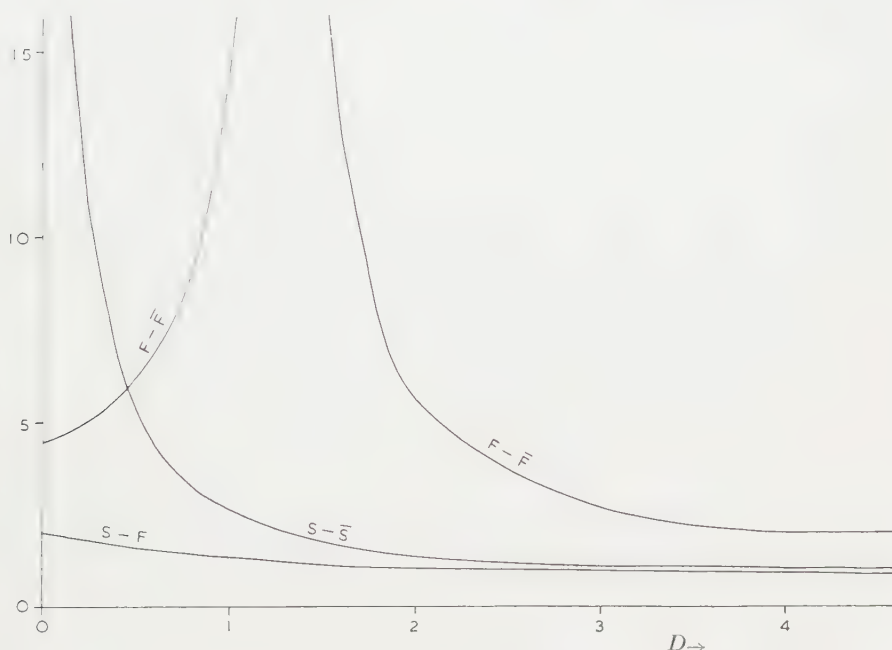
Die Genauigkeit der in Tabelle 2 angegebenen Werte ist durchaus nicht gleich für alle Kombinationen. Ein Blick auf Figur 3, in der die optischen Dicken und die gemessenen Temperaturen symbolisch eingetragen worden sind, zeigt, dass die Kombination S, F die genauesten Ergebnisse liefert, weil der Abstand der Ausgangsdaten am grössten ist, Fehler sich also weniger bemerkbar machen. Auch für \bar{S}, \bar{F} gilt annähernd das Gleiche. Dagegen ist die Verwendung von S und \bar{S} schon erheblich ungünstiger, weil der Abstand der Ausgangsdaten zu gering ist. Das trifft in noch stärkerem Masse für F und \bar{F} zu, wie man Figur 3 und Tabelle 2 direkt entnehmen kann. Im letzteren Falle wird allerdings ein grosser Fehler in D von geringerem Einfluss auf T , weil F verhältnismässig schwach von D abhängig ist.

Das zeigen auch unsere Gleichungen, die wir zunächst für kleine D diskutieren. Der relative Fehler $\Delta D/D$ wird bei der S - F -Kombination konstant, während er bei den S - \bar{S} - und F - \bar{F} -Kombinationen sehr gross wird. Der Wert von Δr ist vorwiegend bei der S - \bar{S} -Kombination von Bedeutung†. Für $\Delta(1/T)$ wird der Fehler bei der S - \bar{S} -Kombination für kleine D sehr gross, während er bei den

† Das bestätigt auch eine konkrete Rechnung. Hätte man an Stelle von $r=0,85$ den Wert $r=1$ verwandt, so wäre aus S, \bar{S} gefolgt: $D=0,28$ und $T=1610^\circ\text{K}$ und entsprechend aus F, \bar{F} : $D=0,15$ und $T=1724^\circ\text{K}$.

Kombinationen $S-F$ und in Uebereinstimmung mit dem oben Gesagten auch bei $F = \bar{F}$ konstant ist, im letzteren Falle allerdings mehr als das Doppelte ausmacht. Δr wird auch bei $\Delta(1/T)$ für die $S-\bar{S}$ -Kombination wegen des Faktors $1/D$ bedeutungsvoll.

Bei der Kombination $S-F$ wird $\Delta(1/T) = \Delta(1/F)$ für kleine D eine Beziehung, die auch gültig bleibt, wenn wir den Wert von n beibehalten hätten. Die Farbtemperatur ist also bei geringen Dicken die massgebende Grösse. Bei $D=1,6$ sind die Faktoren von $\Delta(1/F)$ und $\Delta(1/S)$ in Gl. (17) einander gleich. Bei noch grösseren Dicken ist die schwarze Temperatur ausschlaggebend. Da, wie wir noch sehen werden, $\Delta(1/F)$ grösser ist als $\Delta(1/S)$, lässt sich die wahre Temperatur einer Flamme aus dicker Schicht mittels der schwarzen Temperatur genauer bestimmen als aus dünner Schicht mittels der Farbtemperatur.



Figur 6. Faktor ϕ des Gesamtfehlers von $\Delta T/T$.

Die Fehlerabhängigkeit $\Delta(1/T)$ von der optischen Dicke in ihrem gesamten Bereich muss den Gleichungen (16)–(21) entnommen werden. Um den prinzipiellen Verlauf darstellen zu können, wurde die Annahme gemacht, dass alle schwarzen Temperaturen S und \bar{S} mit der gleichen Genauigkeit gemessen seien. Weil zur Bestimmung der Farbtemperatur die Messung von zwei schwarzen Temperaturen notwendig ist, wird man: $\Delta(1/F) = \sqrt{2} \cdot \Delta(1/S)$ vermuten. Meistens wird der Faktor jedoch grösser sein. Er hängt von dem Wellenlängenintervall ab, das zur Messung herangezogen wird[†]. Wenn ich bei meinen

[†] Aus der Definitionsgleichung [6] der Farbtemperatur:

$$\frac{1}{F} = \frac{(1/\lambda_1 S_1) - (1/\lambda_2 S_2)}{(1/\lambda_1) - (1/\lambda_2)} \quad \text{folgt:} \quad \left(\Delta \frac{1}{F} \right)^2 = \frac{(1/\lambda_1)^2 + (1/\lambda_2)^2}{[(1/\lambda_1) - (1/\lambda_2)]^2} \cdot \left(\Delta \frac{1}{S} \right)^2.$$

Für unseren Fall mit $\lambda_1 = 685 \text{ nm}$ und $\lambda_2 = 441 \text{ nm}$ wird daraus: $\Delta(1/F) = 3,3 \cdot \Delta(1/S)$. Andererseits wurden primär die Messungen von de Vos [7] für die Farbtemperatur der Bandlampe verwandt und damit die Eichkurve aufgestellt, die für S und F die gleiche Form hat. Es ist daher schwierig, eine begründete Aussage über $\Delta(1/F)$ zu machen

Rechnungen weiterhin $\Delta(1/F) = 2 \cdot \Delta(1/S)$ verwandt habe, so hat die 2 also nur symbolische Bedeutung, die eben anzeigt, dass F ungenauer gemessen ist als S . Der prinzipielle Verlauf der Kurven wird durch diese Zahl jedoch nicht nennenswert beeinflusst. Weiter wurde in diesem Zusammenhang $\Delta r = 0$ gesetzt. Dann ergeben sich durch jeweilige Addition der beiden Faktoren in den Gleichungen (17), (19), (21) die in Figur 6 dargestellten und als Faktor ϕ des Gesamtfehlers von $\Delta(1/T)$ bezeichneten Abhängigkeiten von der optischen Dicke. Man erkennt, dass die Gesamtfehler stets über denjenigen der Kombination $S-\bar{S}$ bleiben und zum Teil erhebliche Werte annehmen. Das geschieht für die Kombination $S-\bar{S}$ bei $D=0$ und für $F-\bar{F}$ bei $D=1,28^\dagger$; der Lösung der Gleichung: $e^D + 1 - De^D = 0$. Bei diesen Dicken wird dann übrigens auch Δr trotz seines Faktors λ_m jeweils von grossem Einfluss. Liest man nun die Werte ϕ in Figur 6 ab, so erhält man die Zahlen der Tabelle 3 \ddagger .

Tabelle 3. Mittlere Gesamtfehlerfaktoren ϕ von $\Delta(1/T)$ und ψ von $\Delta D/D$

		ϕ -Werte			
		S	F	\bar{S}	\bar{F}
ψ -Werte	S		1,90	16,0	\times
	F	2,22		\times	4,8
	\bar{S}	18,5	\times		1,8
	\bar{F}	\times	48	2,23	

Belegt man jeden T -Wert der Kombinationen S, F ; S, \bar{S} ; F, \bar{F} und \bar{S}, \bar{F} in Tabelle 2 mit dem Gewicht $1/\phi^2$ und mittelt, so erhält man $T=1720^\circ\text{K}$ als wahre Temperatur mit einem mittleren Fehler des Mittelwertes von $\pm 1,6$. Dieser geringe Fehler kennzeichnet allerdings nur das Verhältnis der T -Werte in Tabelle 2 untereinander.

Der relative Fehler der Temperaturmessung errechnet sich dagegen aus:

$$\frac{\Delta T}{T} = \phi \cdot \frac{T}{S} \cdot \frac{\Delta S}{S}. \quad (22)$$

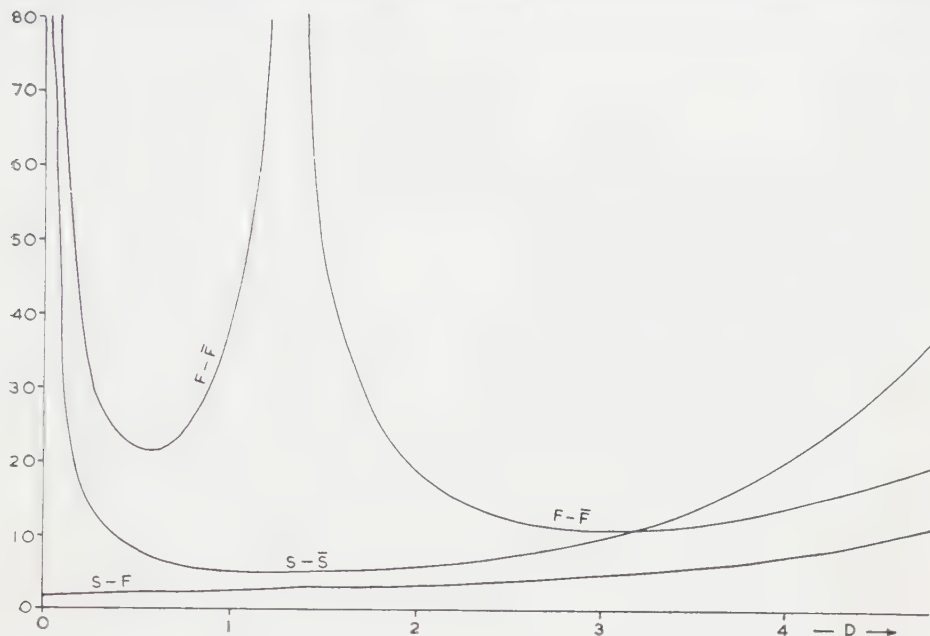
Setzt man den Fehler $\Delta S/S$ der gemeinsam benutzten Eichlampe mit im günstigsten Falle grössenordnungsmässig $\frac{1}{2}$ Prozent an [8], so errechnet sich aus Gl. (22) der Fehler $\Delta T/T$ zu 1,1 Prozent, d.h. $+19^\circ$ für den günstigsten Fall der Kombination S, F .

Für die optische Dicke lassen sich genau die gleichen Ueberlegungen anstellen. Man erhält wieder einen Faktor ψ des Gesamtfehlers von $\Delta D/D$, dessen

\dagger Zeichnet man die F -Kurve in Figur 3 auf eine logarithmische D -Abszisse um, so findet sich bei $D=1,28$ ein Wendepunkt. Dieser D -Wert ist der Gleiche wie für das Maximum der b -Kurve in Figur 5. Der geringfügige Unterschied im D -Wert gegenüber S.8 ist lediglich bedingt durch den für die Fehlerbetrachtung hier gewählten Wert $r=1$.

\ddagger Für die Kombination S, F wurde natürlich bei $D=0,1$ für \bar{S}, \bar{F} bei $D=0,2$ und für S, \bar{S} und F, \bar{F} bei $D=0,15$ abgelesen. Die Kombinationen S, \bar{F} und \bar{S}, F wurden als unorganisch von der Fehlerbetrachtung ausgeschlossen. Ausserdem bieten sie auch nichts Neues, da sie den Kombinationen $S-F$ bzw. $\bar{S}-\bar{F}$ entsprechen.

Abhängigkeit von der optischen Dicke in Figur 7 dargestellt ist. Es treten wieder die bereits bekannten Unendlichkeitsstellen und zusätzlich bei $D=0$ noch eine für $F-\bar{F}$ auf. In Tabelle 3 sind die ψ -Werte ebenfalls angegeben, wie sie unserer Messung entsprechen. Sie nehmen in Einzelfällen so beträchtliche Werte an, dass die Reihenentwicklung zur Fehlerberechnung bereits in



Figur 7. Faktor ψ des Gesamtfehlers von $\Delta D/D$.

Frage gestellt sein kann. Das gewichtete Mittel errechnet sich zu: $D=0,110 \pm 0,004$. Auch dieser verhältnismässig kleine Fehler charakterisiert nur das Verhältnis der D -Werte der Tabelle 2 untereinander. Der relative Fehler der optischen Dicke errechnet sich dagegen aus:

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{c_2}{\lambda_m} \cdot \frac{\psi}{S} \cdot \frac{\Delta S}{S}. \quad (23)$$

Er wird selbst im günstigsten Fall der S - F -Kombination mit 16 Prozent recht erheblich, wenn man wieder $\Delta S/S$ mit $\frac{1}{2}$ Prozent ansetzt.

Die hier für $\Delta T/T$ und $\Delta D/D$ angegebenen Werte stimmen mit den Fehlerangaben der Tabelle 10 von Arbeit [5] überein, was eine Stütze für die hier mitgeteilten Abschätzungen darstellt.

The true temperature of a luminous flame can only be given when the optical thickness of the flame is known. This has generally been determined by one of two methods. Either the luminance temperature and the colour temperature are measured, or the luminance temperature of simple flame, and doubled by reflection are measured. Other methods however are possible, in particular that of the measurement of the colour temperature of the simple and reflected flame. Calculation on this, and measurements on the Hefner-flame are described. The results and the sources of error in the different methods are discussed.

La température réelle d'une flamme éclairante, du fait de la présence de particules de carbone, ne peut être indiquée qu'après avoir déterminé l'épaisseur optique de la flamme. Jusqu'à présent deux méthodes surtout sont connues et ont été utilisées. On mesure, soit la température de brillance et la température de couleur, soit la température de brillance de la flamme simple et de la flamme double, cette dernière étant obtenue par réflexion dans un miroir. Mais il est possible d'imaginer d'autres méthodes, en premier lieu celle consistant à mesurer la température de couleur de la flamme simple et de la flamme réfléchie. L'auteur effectue à ce sujet des calculs et des mesures avec la flamme Hefner. Il compare les résultats et les différentes méthodes et discute les sources d'erreurs qu'elles comportent.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] HOTTEL, H. C., und BROUGHTON, F. P., 1932, *Industr. Engng Chem. (Anal.)*, **4**, 166.
- [2] PENNER, S. S., 1949, *Amer. J. Phys.*, **17**, 493; DYNE, P. J., und PENNER, S. S., 1953, *J. Amer. Rocket Soc.*, **23**, 165.
- [3] RÖSSLER, F., 1950, *Z. angew. Phys.*, **2**, 161.
- [4] RÖSSLER, F., 1956, *Optik*, **13**, 411.
- [5] RÖSSLER, F., 1959, *Ann. Phys., Lpz.*, **4**, 396.
- [6] HOFFMANN, F., und TINGWALDT, C., 1938, *Optische Pyrometrie* (Braunschweig).
- [7] RÜTGERS, G. A. W., und DE VOS, J. C., 1954, *Physica*, **20**, 717.
- [8] EULER, J., 1955, *Z. angew. Phys.*, **7**, 86.

Electrical and optical techniques in the operation of infra-red detectors†

by R. H. McFEE

Director of Research, Avionics Division, Aerojet-General Corporation,
Azusa, California, U.S.A.

(Received 7 October 1959)

The potential performance of infra-red detectors can be more fully exploited by the use of proper techniques in the associated electrical and optical systems. On the basis of the equivalent circuits of the various detectors as electrical elements, proper input coupling and biasing circuits can be designed. Some of the newer detectors, indium antimonide, for example, require special methods of coupling to take full advantage of the detector's capabilities. Noise characteristics of input circuits are of great importance in many applications. Transistor circuits are readily adaptable to detector amplifiers, including the preamplifier. The great range of detector impedance values encountered demands a variety of input coupling techniques, particularly as applied to transistor amplifiers. The biasing of photoconductive detectors should be designed for the type of application. Optimum design of the biasing circuits for the detection of large signals may differ from the best approaches for threshold signal detection. For applications where wide-band electrical fidelity is required of the detector system, compensation can be applied by several methods to reduce the effects of detector time-constant roll-off.

In many optical systems incorporating infra-red detectors, advantages may be gained in effectiveness of the detector by the use of auxiliary optical elements closely associated with the detector. Such optics may take the form of field lenses or incoherent condensation elements, such as 'light pipes'. The choice among the various methods involves a number of considerations concerning optical, electrical and mechanical design limitations. With the availability of high-index of refraction infra-red transmitting materials, such as silicon, germanium and arsenic trisulphide, field lens designs can be made of simple configuration with high relative aperture. Considerable gain in efficiency of some of the infra-red detectors can be obtained by the technique known as 'optical immersion'. The detector element, usually in the form of a deposited film, is maintained in optical contact with the last surface of the field optics. In this manner, improvements in relative aperture, as well as reduction in reflection losses, are accomplished. Optical immersion may be effected by deposition of the detector surface on to the optical element, by cementing the detector to the element with a suitable substance, or by moulding an optical element around the detector.

1. INTRODUCTION

In the course of development of high performance in infra-red detection systems for a variety of applications, both military and industrial, the art of photoelectric detection of infra-red radiation has been advanced to a considerable degree. New techniques have been developed by which the capabilities of electrical, optical and mechanical devices were combined with the photoelectric

† This paper was read at the Fifth Conference of the International Commission for Optics in Stockholm, August 1959.

detector to provide information on the basis of which the required action can be taken.

The most unique, perhaps the most critical, element of the infra-red system is the detector. The flexibility and characteristics of these detectors have allowed the design of devices which can perform functions which hitherto have been impossible. Many of these detectors may be constructed of configurations which are designed especially for the application at hand. The film-type photoconductors, for example, such as lead sulphide, lead selenide, and lead telluride, may be made of sensitive area which matches the size of the field stop of the optical system. Multi-element configurations of lead sulphide detectors are now available, which in the aggregate occupy a very small area. Detectors of a considerable variety of spectral characteristics and impedance ranges have emerged from the research laboratories. Semiconductors have been used in single crystal and multi-crystalline film forms for the detection of radiant energy in the infra-red and visible regions.

In order to realize the potential performance of infra-red detectors, it has been necessary to make use of proper techniques in the associated electronic and optical systems. Appreciable factors of improvement in system performance can be obtained if these special techniques are employed in preference to more conventional telescope optical methods. It is the purpose of this paper to review some of these electronic and optical techniques which have been comparatively recently applied to the infra-red detection system.

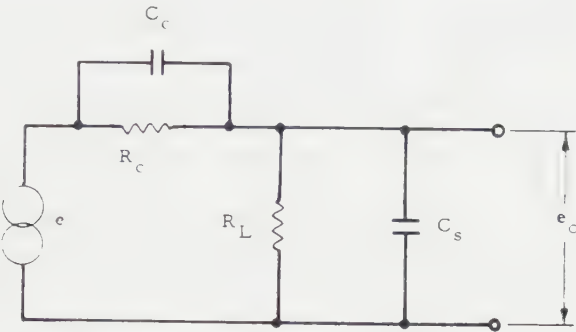
2. ELECTRICAL OPERATION

The detector as a transducer is coupled to the input of the amplifier in a manner which is designed for the application of the detector system. The input circuit employed must be capable of obtaining from the detector the kind of information that is required in such a way that the system performance is limited by the performance of the detector itself. Where detection of the smallest quantity of radiation is required, the input circuit must be designed such that the noise of the input of the amplifier is lower than that of the detector itself. In applications where the maximum response to a large radiation signal is required for compact amplifier design, the input circuit must be such that the maximum response will be obtained from the detector. The extreme range of impedance levels among the various infra-red detectors has required the design of input circuits which match detector impedances which may be anywhere from a few ohms to several hundred megohms.

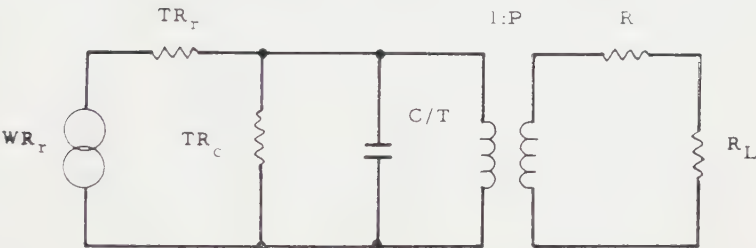
The equivalent circuits of representative infra-red detectors operating at the input of an amplifier are shown in figure 1. Although the photoconductors require bias batteries and a load resistance, the equivalent circuit of the input is basically the same as that of the photovoltaic detector which generates its own signal. The parameters associated with the various detectors may vary considerably. The ranges of values of dark resistance and time constant of currently available detectors is given in the table. The basic problem of the input circuit design has been to couple the generated signal from the detector into the load impedance without introducing spurious noise from the load.

In the case of thermal infra-red detectors such as the radiation thermocouple, the electrical and thermal behaviours of the sensitive element are intimately

interrelated. This situation may be represented in schematic form as shown in figure 1(b). This representation, as suggested by Fellgett [1], shows the link between electrical and thermal quantities as an ideal transformer with a step-up ratio equal to the thermoelectric power.



(a) Photoconductive and photovoltaic detectors.



(b) Equivalent thermal and electrical circuit of a thermocouple (after Fellgett [1]).

Figure 1. Equivalent circuits of infra-red detectors.

Detector type	Dark resistance (ohms)	Time constant (μ sec)
Metallic thermocouple	1-10	10^4 - 10^6
Metallic bolometer	1-10	10^4 - 10^5
InSb, PEM, 20°C	5-10	< 1
InSb, photoconductive, 20°C	5-15	< 1
InSb, diffused junction, -196°C	100-1000	< 1
InSb, grown junction, -196°C	3 k-100 k	< 4
PbSe, 20°C	10 k-100 k	1-10
PbSe, -196°C	1 M-50 M	10-50
PbS, 20°C	100 k-10 M	50-500
PbS, -78°C	1 M-20 M	500-10 000
PbTe, -196°C	50 M-200 M	20-100
Ge (Au), -196°C	50 k-5 M	< 1
Thermistor bolometer	1 M-10 M	300-3000

The detection of weak signals near the threshold established by the detector noise level poses a most severe design problem for the amplifier input. With

photoconductor detectors such as lead sulphide, the detector noise, under most conditions, is relatively high. Threshold detection then can be accomplished by use of conventional input circuit design. Such a circuit is shown in figure 2. This circuit, which is typical of those normally employed for film-type detectors such as lead sulphide and lead selenide use a triode, cathode-follower connected, with the bias current supplied from the $B+$ supply through appropriate filtering, and a load resistance. Where the input capacity loading is more than is desirable a double shield arrangement can be used, with the inner shield driven by connecting to the cathode of the amplifier. Amplifier noise is minimized by selection of tubes for low noise and microphonism.

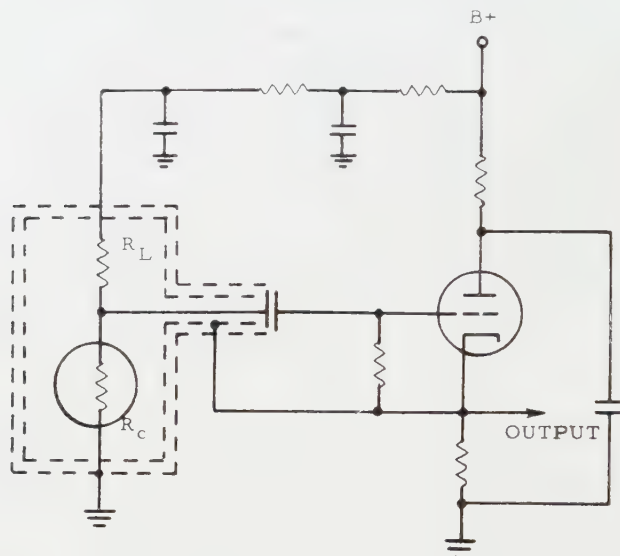


Figure 2. Input circuit for intermediate impedance, intermediate noise photoconductor.

For most effective utilization of low noise detectors of intermediate impedance (10 000 ohms to 1 megohm) it is necessary to resort to low noise amplifier techniques. Bunker [2] has reviewed the low noise amplifier design problem and has suggested a circuit which employs two stages of resistance-capacity coupled selected 6CB6 pentodes connected as tetrodes, with the first grid biased positively in order to suppress positive ions, the second grid used as the control grid, the third grid as a screen (figure 3). Very careful attention must be paid to proper construction techniques to reduce external noise effects such as hum and microphonism. Because of the wide variation in internal noise characteristics of typical amplifier tubes it is necessary to select among a reasonable number for units of suitable characteristics.

Some photoconductors, such as lead telluride, often exhibit very high resistance characteristics (> 100 megohms). In order to prevent the input circuit from severely loading the detectors and thus becoming the limitation in terms of sensitivity, particularly at high frequencies, input circuits of high impedance characteristics must be employed. One such circuit, developed by Krakauer [3] (figure 4) uses an electrometer tube, such as the Victoreen 5803, coupled to a triode in a circuit known as an electrometer triode follower. This

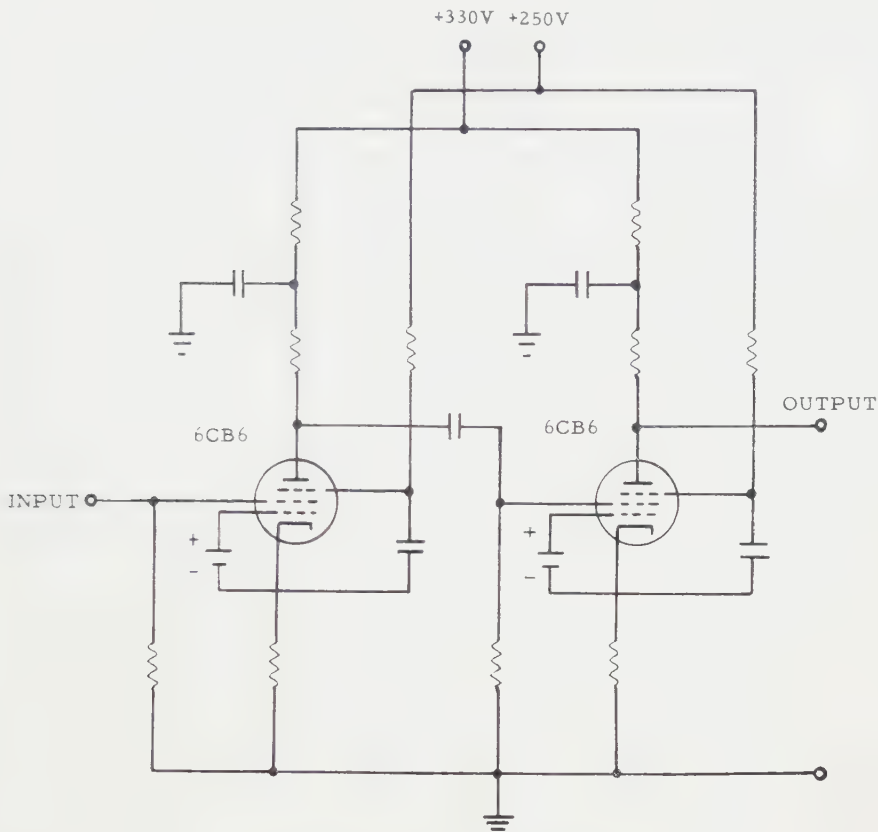


Figure 3. Low noise input circuit.

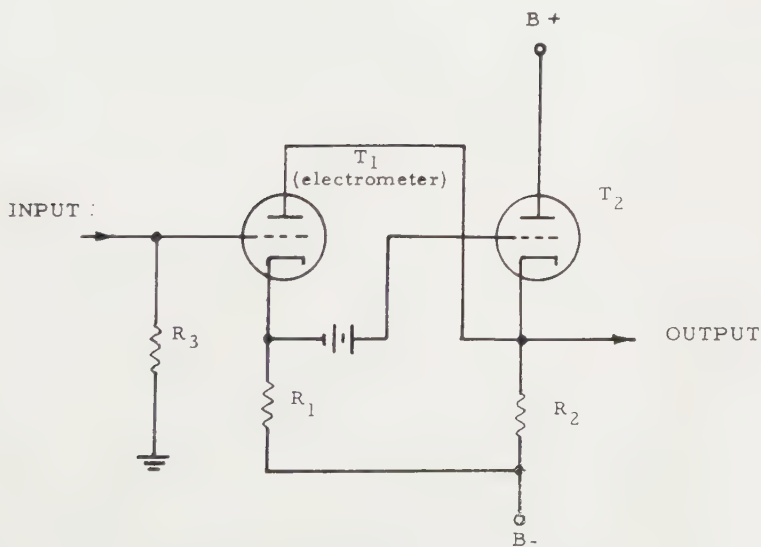


Figure 4. High impedance input circuit (after Krakauer [3]).

circuit, which combines characteristics of low grid current with negative feedback, shows a measured input capacity of approximately $0.1\mu\mu\text{F}$. The signal from a detector of 200 megohms resistance can be amplified with no more than 3 db attenuation at frequencies up to 8 kc/s.

In the case of very low impedance detectors (less than 100 ohms) the characteristic noise level of these detectors is so low that it is impracticable to couple the detectors directly into the input of vacuum tube amplifiers. In general, it is usually satisfactory to make use of transformers as coupling devices between the detector and the amplifier input. The characteristics of these transformers must be such that the signal voltages at the operating frequencies will be properly coupled into the amplifier input. Thermal detectors such as thermocouples and bolometers usually are operated at low frequencies in the neighbourhood of 10–15 c/s, and thus require large input transformers with cores of adequate iron content for the low-frequency operation. For some of the low resistance photoconductors and photovoltaic detectors such as indium antimonide the inherently short time constant allows operation at relatively high frequencies. The input transformers in these cases usually are very compact.

The use of transistors as preamplifiers for infra-red detectors has been more or less confined to applications where the detector noise is not very low. High impedance detectors require special transistor circuit techniques in order to couple the signal effectively into the low impedance transistor network. It is expected that the use of transistors for detector preamplifiers will be increased with the development of new techniques and improved transistors.

In applications where the requirement to produce the maximum signal voltage per watt of incident radiant power, different considerations are brought in from those which apply for threshold signal detection. Photoconductors in general are most suitable for high signal output application since the signal level is a direct function of the applied bias voltage. In the case of the film-type detectors such as lead selenide, the limitation to the applied bias voltage is established by the Joule heating in the film. For detectors of area large relative to the thickness of the substrate plate the maximum allowable power dissipation is roughly proportional to the area of the sensitive surface. Where the detector element is small compared to the thickness of the substrate the limiting power dissipation appears to reach a constant. Talley and Petritz [6] have shown that, in the case of large area lead sulphide detectors, the maximum signal power output, P_{ms} follows approximately the relation

$$P_{ms} = P_1 K P_i \quad (1)$$

where P_1 = fractional change in resistance per unit light flux incident (cm^2/watt), K = maximum power dissipation tolerated by detector element per unit area, P_i = incident radiant power, watts.

An improvement of a factor of two can be gained in signal voltage level over a matched-load condition of operation by using an infinite load circuit. This condition can be simulated by using a constant-current generator as a source of bias current. One such scheme is shown in figure 5. In this circuit the plate current characteristics of a pentode are used to provide constant bias current independent of cell resistance. Such a circuit is not necessarily the most desirable one for low noise threshold detection. By employing a pentode of the remote cut-off variety, this bias circuit can be effectively used to supply very low bias

currents to very high resistance photoconductors. A low-leakage-current arrangement can be readily used to control bias currents down to 10^{-10} amps.

A technique which has found useful application to wide band detection by detectors of finite time constant such as lead sulphide, is post-detection equalization. Lead sulphide detectors, for example, exhibit time constants in the range of 100–1000 microseconds at room temperature. A detector with a time constant of 160 microseconds would drop in response 3 dB at 1000 c/s. By employing equalization in the amplifier, uniform response may be obtained, extending out to as much as 15 000 c/s. It must be realized that the noise spectrum will likewise be affected by the equalization network. A rising noise spectrum will be produced at the output for detectors of essentially uniform noise power spectrum. Recently developed high sensitivity photoconductor detectors have exhibited noise spectrum characteristics which follow closely the signal spectrum. This type of noise is generally attributed to the generation and recombination of current carriers within the detector. As long as the limiting noise level of the detector system is that of the detector, equalization applied in the amplifier will result in a uniform signal to noise ratio at the amplifier output.

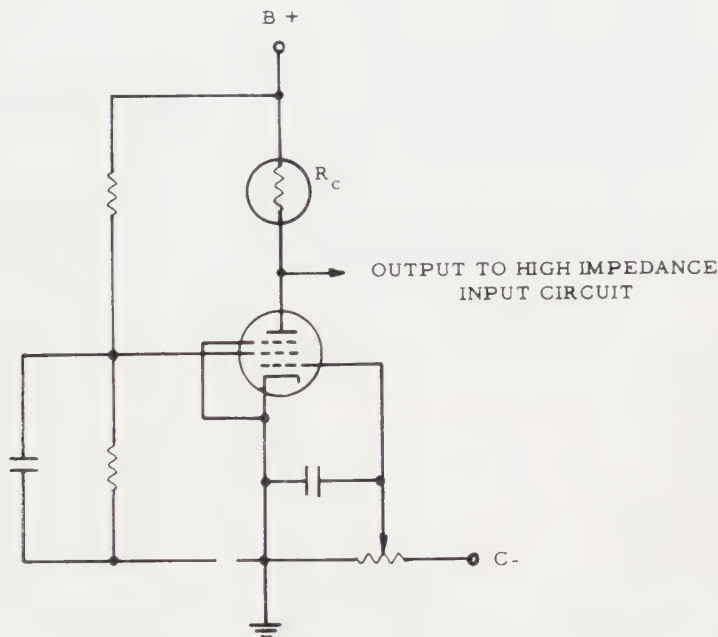


Figure 5. Low current bias circuit.

3. OPTICAL TECHNIQUES

It has been found by the designers of infra-red equipment that considerable improvement in detection efficiency can be realized in some applications by the use of properly designed optics in conjunction with the detector element. The threshold sensitivity, or noise-equivalent power, of most detectors is inversely proportional to the square root of their sensitive area. Therefore, it is an advantage in the design of threshold detection systems to reduce the sensitive area to the

minimum required to effect the angular coverage. By the use of auxiliary optics between the image plane of the objective and the detector, considerable reduction in detector size can be obtained. The application of field optics is shown schematically in figure 6. The basic detection system (figure 6a) consists of the objective which focuses the field of view on to the detector acting as the field stop of the system. In applications where the required field of view coverage appreciably exceeds the size of the circle of confusion of the objective, the use of field optics is usually indicated. In figure 6(b) the field lens is shown schematically operating in such a manner that the aperture stop of the system is imaged on to the detector surface. The field stop of the objective system is the entrance aperture of the field lens. The improvement factor G to be expected by using a detector matched in area to the image formed by a field lens in comparison to a detector matching the size of the field stop is given by the relation

$$G = \frac{\text{field diameter}}{\text{detector diameter}} = \frac{f/\text{no. (objective)}}{f/\text{no. (field optics)}}. \quad (2)$$

Since in most optical system designs it is easier and more advantageous to use an objective of relatively small relative aperture (large $f/\text{no.}$) appreciable gains may be expected by this technique.

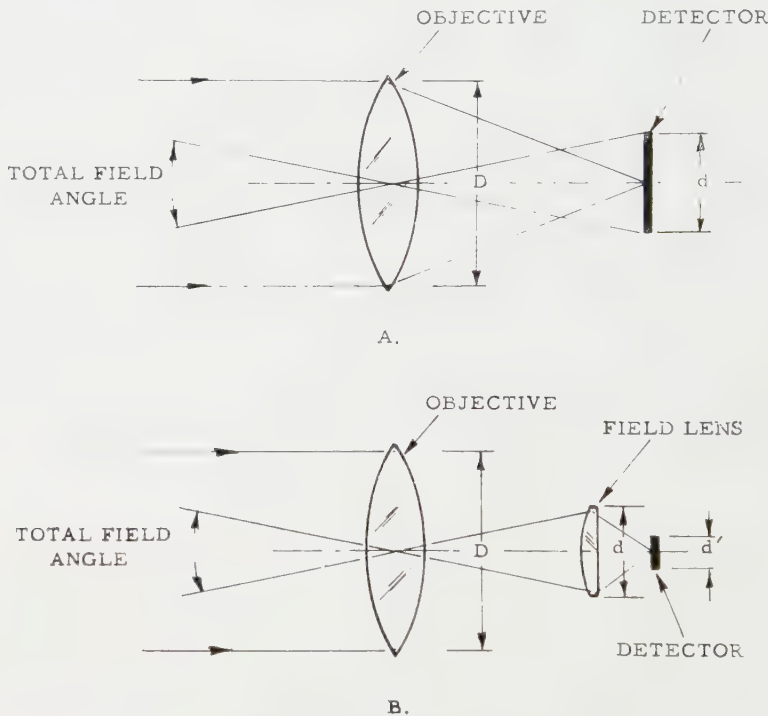


Figure 6. Use of field optics in an infra-red telescope

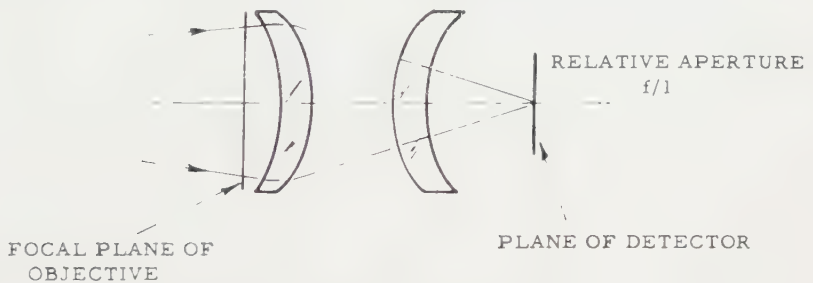
An additional benefit of the use of field optics results from the characteristics of many detectors of non-uniformity in response characteristics over the sensitive area. Field optics in general produce a uniformly illuminated image on the detector surface; thus variations in structure of the image do not produce spurious

signals from the detector as a result of motion of the image over the sensitive surface.

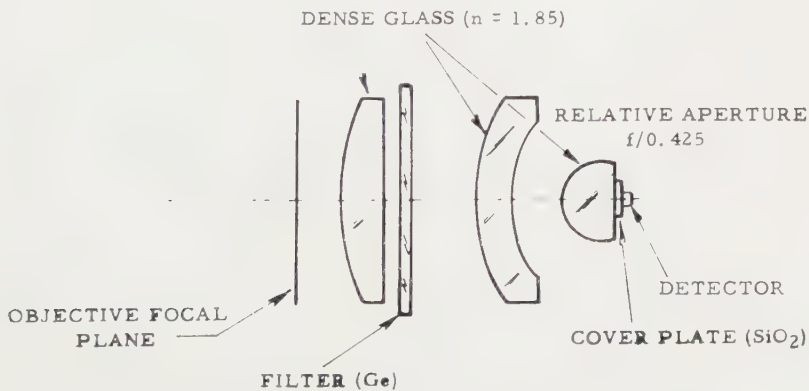
The most commonly employed field optics is the field lens system. A field lens is designed to image the entrance aperture, which is also usually the aperture stop of the system, on to the detector. Considerable variation in design may be used according to the requirements of angular field coverage, spectral transmission, and uniformity of image illumination. Figure 7 shows two representative field lens designs of varying degrees of complexity. In general, three elements are required to cover an extended field of 10° or greater. Two elements can be employed for fields of 7° or less. When using glass of an index of refraction of less than 2.0, three elements are generally required. The first element is usually designed for an effective $f/\text{no.}$ of approximately 3.0. In a two-element system when high index of refraction materials are used the first element works at an effective $f/\text{no.}$ of approximately 2.0. The shape of the first element is usually determined for minimum coma. The relative aperture of the field lens system is given by relation

$$f/\text{no.} = \frac{1}{2n' \sin \theta'} \quad (3)$$

where n' is the index of the refraction of the image space, and θ' is the semi-angle of the exit pencil. It can be seen from this relationship that considerable advantage can be realized by the use of high index material in the image space.



(a) Reversed doublet for detector in air.



(b) Dense glass field lens with cemented detector.

Figure 7. Field lens designs.

For example, in figure 7(a) a typical field lens for a detector in air operates at approximately $f/1$. For the system in figure 7(b) where $n' = 1.85$, the effective relative aperture is $f/0.425$.

The technique of operating the detector in optical contact with the last surface of the field lens is known as 'optical immersion'. Several methods have been devised to effect this condition. The most satisfactory of these from the optical standpoint is that in which a sensitive element is deposited directly on to the back of the lens element. This technique requires that the method of deposition of the sensitive element be compatible with the characteristics of the optical material. A variation of this method which allows a little more flexibility involves the deposition of the element on to a plate of the high index material, which can then be cemented to the optical element. Some detector elements may be applied to the optical element by direct cementing with a suitable high index material of proper spectral transmission. Some progress has been made in the technique of moulding high-index, low-melting glass material in optical contact with the detector surface. Such a material which has excellent infra-red transmission characteristics in the infra-red is amorphous selenium.

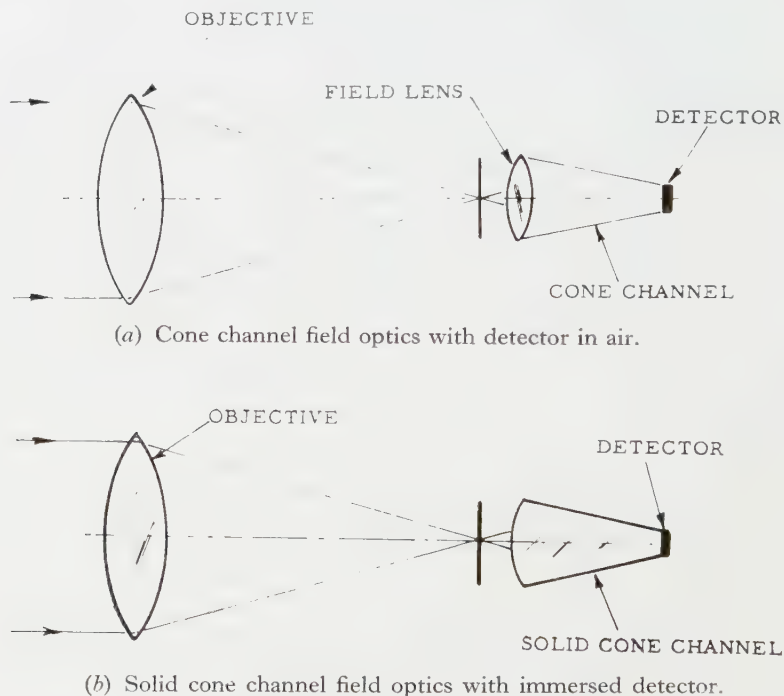


Figure 8. Cone channel designs.

Concentration of the radiant energy on the image plane of the primary objective on to the detector may also be accomplished by non-image forming devices such as cone channels or light pipes, figure 8. The cone channel is basically a funnel which conducts the radiation by successive reflections from the wide end at the entrance to the detector at the small end. By using a simple field lens at the aperture of the cone channel the theoretical $f/\text{no.}$ of the device can be raised to the upper limit possible for the detector in air, $f/0.5$. Williamson [8]

has constructed such devices which were measured at an effective relative aperture of $f/0.77$, including the losses due to reflection. Simple cone channel optics have been employed for far infra-red detection systems [9]. A metal light pipe constructed of aluminium foil was observed to produce a gain of 4.5 in the far infra-red region.

Further gains in effectiveness may be obtained with the use of a solid piece of infra-red transmitting, high-index material as the cone channel, figure 8(b). The entrance to the channel is ground with a radius to form the field lens. The detector element is optically immersed on to the back and the conical sides are coated with reflective material when the index is relatively low. Solid cone channels constructed of high index materials such as strontium titanate may depend upon total internal reflection, which may be preferable to coating the outside of the element. Light pipes can, of course, be constructed in a variety of forms, including pyramids as well as cones. Some advantage may be gained by employing a rectangular cross-section at the output end when detectors of rectangular sensitive area are used. Light pipes have the general advantage of short overall field optics-detector length and inherent restriction of radiation observation to that coming from the objective only.

The variety of new and interesting techniques of electrical and optical design is being rapidly increased with the evolution of special detector configurations. The broader use of refrigerated detector elements contained within double-walled flasks has posed a further challenge to the designer for effective use of field optics. Methods are currently under development for the inclusion of part of the field lens system within the detector package. The detector windows must be included as part of the field lens system. It is expected that the continued development of these and other new techniques for the effective design of the detector into the optical system will result in devices of greater efficiency and effectiveness.

Les possibilités des détecteurs infrarouges peuvent être mieux exploitées en utilisant des techniques appropriées pour les systèmes optique et électronique associés. Si l'on envisage les circuits équivalents des différents détecteurs en tant qu'éléments électriques, on peut prévoir des couplages d'entrée et des circuits de polarisation convenables. Quelques uns des détecteurs les plus récents, l'antimoniure d'indium par exemple, nécessitent des méthodes de couplage spéciales pour utiliser au mieux les possibilités du détecteur. Les caractéristiques du bruit des circuits d'entrée sont très importantes dans beaucoup d'applications. Les circuits à transistors sont facilement adaptables aux amplificateurs des détecteurs, y compris le préamplificateur. Le grand domaine de valeurs d'impédances du détecteur rencontrées nécessite des techniques de couplage d'entrée variées, en particulier lorsqu'il s'agit d'amplificateurs à transistors. La polarisation des détecteurs photoconducteurs devrait être calculée en fonction du type d'application envisagée. Les meilleurs circuits de polarisation pour la détection de grands signaux, peuvent être différents des meilleures solutions correspondant à des signaux de seuil. Pour les applications où une fidélité électrique dans une large bande est demandée au système détecteur, on peut utiliser plusieurs méthodes pour appliquer une compensation réduisant les effets du circuit éliminant la constante de temps du détecteur.

Dans beaucoup de systèmes optiques comprenant des détecteurs pour l'infrarouge, on peut accroître l'efficacité du détecteur en utilisant des éléments optiques auxiliaires associés de près au détecteur. On peut utiliser à cet effet des lentilles de champ ou des éléments de condenseur incohérents, tels que les 'guides de lumière'. Le choix à faire parmi les diverses méthodes dépend d'un certain nombre de considérations relatives aux limitations des systèmes optique, électrique et magnétique. Depuis l'avènement de matériaux de haut indice de réfraction et transmettant l'infrarouge, tels que le silicium, le germanium et le trisulfure d'arsenic, on peut réaliser des lentilles de champ d'une forme

simple et grande ouverture numérique. On peut obtenir un gain d'efficacité considérable pour certains détecteurs pour l'infrarouge par la technique appelée 'immersion optique'. L'élément détecteur, généralement sous la forme d'une couche mince, est maintenu en contact optique avec la dernière surface de l'optique de champ. On réalise ainsi des améliorations en ce qui concerne l'ouverture numérique et la réduction des pertes par réflexion. L'immersion optique peut être réalisée en déposant la surface du détecteur sur l'élément optique, en collant le détecteur à cet élément à l'aide d'une substance convenable, ou en moulant un élément optique autour du détecteur.

Die Spannungsabgabe von Infrarot-Detektoren kann durch die Anwendung geeigneter technischer Mittel in den zugeordneten elektrischen und optischen Systemen besser ausgenutzt werden. Man kann mittels Ersatzschaltbildern für die verschiedenen Detektoren als elektrische Elemente geeignete Ankopplungs- und Versorgungskreise entwerfen. Einige der neueren Detektoren, z.B. Indium-Antimonid, erfordern Spezialmethoden der Ankopplung zur vollen Ausnutzung seiner Möglichkeiten. Bei vielen Anwendungen ist die Rauschcharakteristik des Eingangskreises von grosser Bedeutung. Transistor-Schaltungen lassen sich fertig als Detektor-Verstärker einschliesslich als Vorverstärker verwenden. Der grosse Bereich von Impedanzwerten der uns bei Detektoren entgegentritt, erfordert eine Variationsmöglichkeit in der Ankopplungstechnik, besonders bei Transistor-Verstärkern. Die Versorgungsspannung von Photowiderständen sollte an die jeweils verwendete Type angepasst werden. Die optimale Auslegung der Versorgungsschaltungen kann verschieden sein für die Aufnahme starker Signale und für die beste Annäherung an Schwellwert-Signale. Für Anwendungen, bei denen eine breitbandige Treue der elektrischen Wiedergabe verlangt wird, kann auf verschiedene Arten eine Kompensation vorgesehen werden, die die Verzerrungen durch die Detektor-Zeitkonstante verringern.

In vielen optischen Systemen mit Infrarot-Detektoren können durch die Verwendung optischer Hilfselemente, die eng mit dem Detektor verbunden sind, Vorteile in der Detektorwirkung erzielt werden. Solche Optiken können z.B. in Form von Feldlinsen oder von kondensierenden Elementen (Lichtleitern) eingeführt werden. Die Wahl unter den verschiedenen Wegen verlangt genauere Überlegungen über die optischen, elektrischen und mechanischen Grenzen. Es gibt infrarot-durchlässige Materialien mit hohem Brechwert wie z.B. Silicium, Germanium und Arsen-Trisulfid; damit lassen sich Feldlinsen einfacher Art mit hohem Öffnungsverhältnis angeben. Einen beträchtlichen Gewinn an Wirkungsgrad erzielt man bei einigen Infrarot-Detektoren durch die sogenannte optische Immersion. Dabei wird das Detektorelement, gewöhnlich in Form eines niedergeschlagenen Films, mit der letzten Oberfläche der Feldlinse in optischen Kontakt gebracht. Das führt zu einer Verbesserung der relativen Öffnung und einer Verringerung der Reflexionsverluste. Man kann die optische Immersion erreichen durch Niederschlagen der Detektoroberfläche auf dem optischen Element oder durch Aufkitten des Detektors auf das Element mit einem geeigneten Kittmittel oder schliesslich durch Formen eines optischen Elementes um den Detektor herum.

REFERENCES

- [1] FELLGETT, P. R., 1949, *Proc. phys. Soc., Lond. B*, **62**, 351.
- [2] BUNKER, JR., E. R., 1956, Special Report No. 964, Aerojet-General Corp.
- [3] KRAKAUER, S., 1953, *Rev. sci. Instrum.*, **24**, 496.
- [4] PELCHOWITZ, I., and ZAALBERG VAN ZELST, J. J., 1952, *Rev. sci. Instrum.*, **23**, 73.
- [5] HUGHES, W. T., and LANDER, J. J., 1953, *Rev. sci. Instrum.*, **24**, 331.
- [6] TALLEY, R. M., and PETRITZ, R., 1959, *Proc. IRIS*, **4**, 75.
- [7] PRICE, W. P., 1959, Technical Memorandum No. TM517: 59-5-448, Aerojet-General Corp.
- [8] WILLIAMSON, D. E., 1952, *J. opt. Soc. Amer.*, **42**, 712.
- [9] OHLMANN, R. C., RICHARDS, P. L., and TINKHAM, M., 1958, *J. opt. Soc. Amer.*, **48**, 531.

Constantes optiques et variations de phase de l'or en couches minces

par R. PHILIP

Laboratoire de Physique générale de la Faculté des Sciences de Marseille

(Received 20 October 1959)

On a mesuré pour 18 couches minces d'or d'épaisseurs massiques comprises entre 0,6 et 95 m μ les variations de phase d'une onde lumineuse lorsqu'elle se réfléchit normalement dans l'air sur le métal (Δr) ou dans le quartz sur le métal ($\Delta r'$). Ces mesures, jointes à celles précédemment rapportées [1] des facteurs de réflexion et de transmission, ont permis de déterminer les constantes optiques de ces couches d'or par la méthode de Malé.

1. INTRODUCTION

Dans un précédent article [1] nous avons montré comment varient les facteurs de transmission T , de réflexion côté air R , côté support R' , et les facteurs d'absorption correspondants A et A' , de couches minces d'or en fonction de l'épaisseur de ces dernières. Les couches ont été déposées sur un support en quartz à la vitesse de 3 m μ à la minute. Nous étudions ici la variation du changement de phase d'une onde lumineuse lorsqu'elle se réfléchit normalement dans l'air sur le métal (Δr) et dans le support en quartz sur le métal ($\Delta r'$). L'ensemble de ces mesures nous a permis de déterminer les constantes optiques de ces couches pour les 12 radiations utilisées.

La méthode de mesure des variations de phase a déjà été rappelée [2, 3]. Les constantes optiques et l'épaisseur réelle des couches sont déterminées simultanément par la méthode graphique de Malé [4]. L'épaisseur réelle e_r , ainsi déterminée permet de calculer le coefficient de remplissage des couches $q = e_m/e_r$ où e_m est l'épaisseur massique. Nous avons montré dans un précédent travail [1] dans quelles limites la relation de Wolter $n_2 A - A' \simeq 0$ était vérifiée ou non; (n_2 est l'indice du support pour la longueur d'onde utilisée, A et A' sont définis par les relations :

$$A = 1 - R - T, \quad A' = 1 - R' - T$$

et représentent les facteurs d'absorption de la couche métallique côté air et côté support). Lorsque cette relation n'est pas vérifiée, les mesures des facteurs de réflexion côté air R , côté support R' et la mesure du facteur de transmission T suffisent à la détermination des constantes optiques par la méthode de Malé; par contre, lorsque cette relation est vérifiée une mesure de variations de phase est nécessaire.

Dans le présent travail, que la relation de Wolter soit ou non vérifiée, nous avons utilisé chaque fois que cela a été possible, simultanément les mesures de R , R' , T , Δr et $\Delta r'$ pour déterminer les constantes optiques des couches d'or. Nous avons ainsi bénéficié de conditions surabondantes de vérifications pour 8 longueurs d'onde et pour les couches les plus épaisses étudiées.

Nous avons trouvé que, pour chaque couche métallique les épaisseurs réelles déterminées pour ces 8 radiations étaient sensiblement les mêmes à la précision des mesures près. Nous avons donc pris en définitive comme épaisseur réelle de

chaque couche, la moyenne des 8 résultats ainsi obtenus. De même, le coefficient de remplissage indiqué dans le tableau ci-joint est la moyenne de ceux obtenus pour ces 8 radiations. Pour les 4 radiations de longueur d'onde 2536 Å, 2753 Å et 6438 Å, nous n'avons pas pu utiliser les mesures de variations de phase pour déterminer les constantes optiques des couches métalliques; nous avons alors déterminé ces constantes en utilisant une méthode déjà exposée par Philip et Trompette [5] dérivée de la méthode de Malé et n'utilisant que les mesures de R , R' , T et e_r ; e_r est l'épaisseur réelle moyenne précédemment calculée et qu'on suppose être la même pour toutes les radiations.

2. RESULTATS

1 Les courbes de la figure 1 représentent pour quelques radiations la variation de phase Δr précédemment définie en fonction de l'épaisseur massique de la couche.

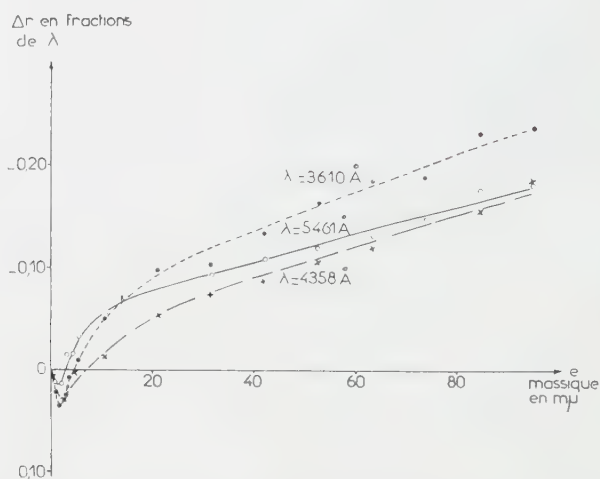


Figure 1. Variations de phase d'une onde lumineuse lorsqu'elle se réfléchit dans l'air sur une couche mince d'or, en fonction de l'épaisseur de cette couche.

Δr est représenté en fractions de λ et non en grades: c'est δ/λ qui est porté sur l'axe des ordonnées, δ étant la différence de marche correspondante. La variation de phase Δr est d'abord une avance de phase pour les couches d'or de faibles épaisseurs; elle devient ensuite un retard pour des épaisseurs généralement supérieures à $10 \text{ m}\mu$, ce qui a été maintes fois constaté.

2° Les courbes de la figure 2 représentent la variation de phase $\Delta r'$ en fonction de l'épaisseur massique de la couche d'or pour les 3 radiations indiquées sur les courbes. On constate l'existence d'un saut de phase de 2π pour les radiations de longueurs d'onde égale ou inférieures à 4358 Å . Pour des radiations de longueurs d'onde égale ou supérieures à 4800 Å ce saut de phase de 2π n'a pas pu être mis en évidence expérimentalement. Chaque fois que ce saut de phase a pu être observé, il s'est produit pour une épaisseur correspondant au minimum de R' et, à la précision des mesures près, lorsque l'indice de réfraction ν de la couche métallique après avoir diminué devient lorsque l'épaisseur augmente, inférieur à celui du support. Au moment du saut de phase l'indice de réfraction ν est compris entre 1,40 et 1,60.

3° Les courbes des figures 3, 4, 5 et 6 et le tableau ci-dessous montrent la variation des indices de réfraction ν et d'extinction χ en fonction de l'épaisseur de la couche métallique pour quelques unes des radiations étudiées. On constate que ces courbes présentent bien les maxima signalés théoriquement par Malé [4] et que nous avons retrouvés expérimentalement avec Trompette et Philip [6] pour l'argent.

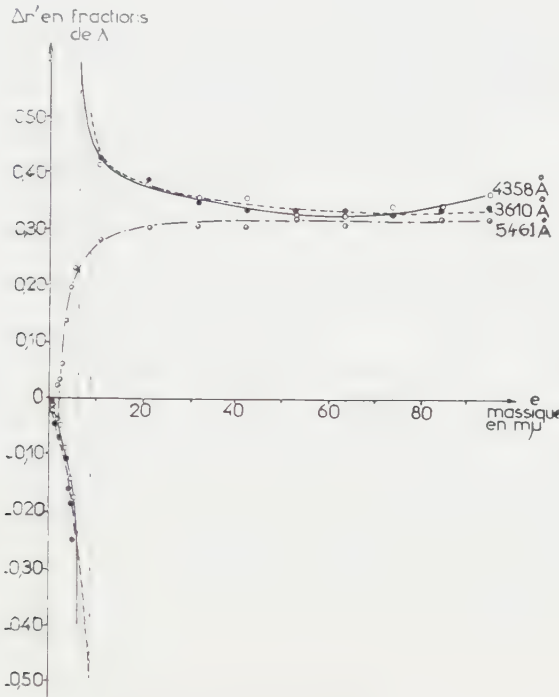
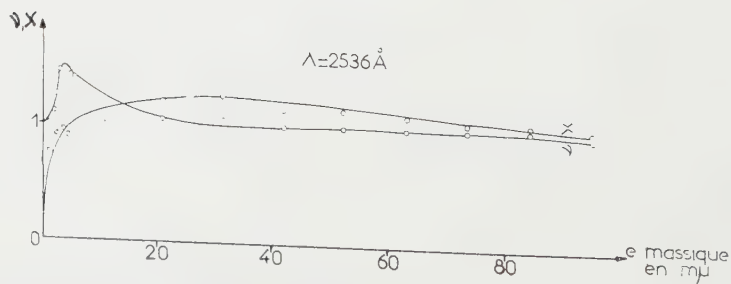
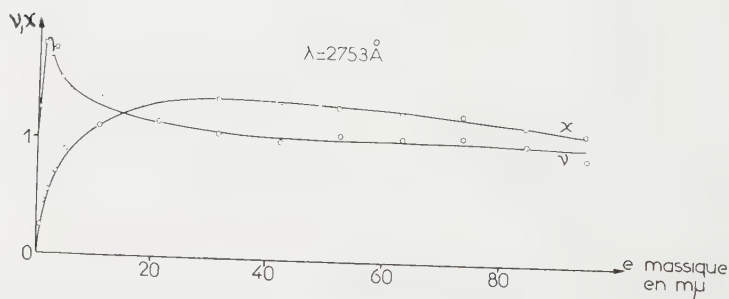
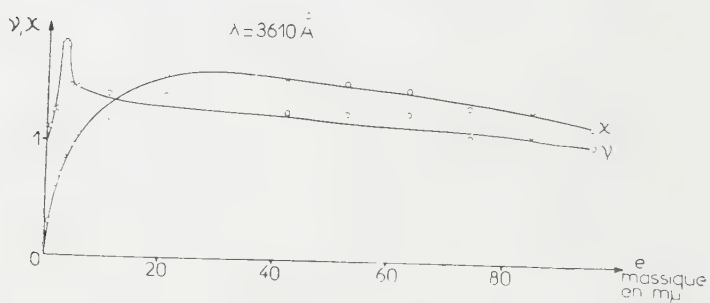
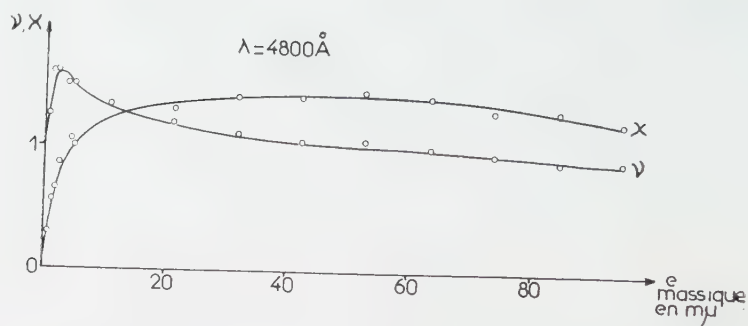


Figure 2. Variations de phase d'une onde lumineuse lorsqu'elle se réfléchit dans le support en quartz sur une couche mince d'or, en fonction de l'épaisseur de cette couche.

Le maximum de ν , parfois très aigu se produit pour une couche d'épaisseur massique voisine de 2 à 3 $m\mu$; le maximum de χ , beaucoup moins aigu, a lieu pour une couche d'épaisseur massique voisine de 30 à 50 $m\mu$. La valeur de ν ne varie plus en général que très lentement pour des couches d'or d'épaisseurs supérieures à 40 ou 50 $m\mu$. Pour les plus fortes épaisseurs étudiées ici χ reste toujours supérieur à ν mais la différence $\chi - \nu$ diminue très sensiblement avec la longueur d'onde; cette différence tend vers 0 pour $\lambda = 2536 \text{ Å}$. Les résultats relatifs aux radiations de longueurs d'onde 5085 Å, 4358 Å, et 2967 Å ont déjà été publiés et ne sont rappelés ici qu'à titre indicatif.

Les courbes des figures 7 et 8 montrent comment varient en fonction de la longueur d'onde, les constantes optiques de couches minces d'or d'épaisseurs massiques égales à 10, 30, 60 et 90 $m\mu$. On constate l'existence d'un maximum de ν et d'un minimum de χ pour des radiations de longueurs d'onde comprises entre 4000 et 5000 Å. De plus, même pour les couches les plus épaisses, les constantes sont encore bien souvent éloignées de celles généralement indiquées pour le métal massif; Rouard et Malé ont montré précisément qu'il ne fallait



Figures 3 à 6. Variations des indices de réfraction ν et d'extinction χ d'une couche mince d'or en fonction de son épaisseur pour des radiations de longueurs d'onde égales à 4800 Å, 3610 Å, 2753 Å et 2536 Å.

e_m en $m\mu$	$e_{réelle}$ moyenne	q moyen	2536 Å		2753 Å		2967 Å		3341 Å		3610 Å		4046 Å	
			ν	χ	ν	χ	ν	χ	ν	χ	ν	χ	ν	χ
0,6	5,5	0,11	—	—	1,25	0,25	1	0,35	1,05	0,35	1,10	0,30	1,35	0,25
1,2	6,3	0,19	1	0,75	1,80	0,45	1,05	0,65	1,75	0,40	1,25	0,60	1,45	0,45
1,8	6,6	0,27	1,10	0,90	1,75	0,55	1,80	0,60	1,85	0,60	1,25	0,85	1,70	0,75
2,35	7,6	0,31	1,25	0,90	1,70	0,65	1,75	0,75	2	0,75	1,85	0,70	1,65	0,70
2,95	8,1	0,36	1,45	0,95	1,75	0,70	1,75	0,80	1,90	0,85	1,80	0,85	1,75	0,75
3,5	8,9	0,40	1,40	0,95	1,55	0,95	1,80	0,85	1,85	0,85	1,80	0,85	1,70	0,90
4,1	9,8	0,42	1,45	0,90	1,50	0,95	1,70	0,85	1,40	0,95	1,45	1	1,75	0,95
4,7	11,1	0,43	1,30	0,90	1,45	0,90	1,45	0,90	1,45	0,90	1,50	0,95	1,55	0,95
5,3	11,8	0,45	1,40	0,85	1,40	1,00	1,50	0,85	1,45	0,90	1,45	1,05	1,40	1,05
10,55	18,6	0,57	1,30	1,0	1,35	1,10	1,30	1,10	1,45	1,25	1,40	1,15	1,40	1,10
21,1	26,1	0,81	1,05	1,20	1,15	1,35	1,15	1,40	1,30	1,45	1,40	1,55	1,40	1,55
31,7	37,8	0,84	1,05	1,25	1,05	1,35	1,05	1,40	1,25	1,50	1,15	1,45	1,10	1,45
42,2	47,2	0,89	1	1,15	1,00	1,30	1,05	1,35	1,15	1,40	1,25	1,50	1,15	1,55
52,8	57,5	0,92	1	1,15	1,05	1,30	1,05	1,25	1,20	1,35	1,25	1,50	1,10	1,45
63,3	67,8	0,93	1	1,10	1,05	1,25	1,05	1,30	1,10	1,30	1,25	1,45	1,10	1,40
73,9	77,5	0,95	1	1,05	1,05	1,25	1,05	1,25	1,10	1,25	1,05	1,30	1,10	1,35
84,4	88,7	0,95	1	1,05	1,00	1,15	1,05	1,20	1,15	1,25	1,10	1,30	1,10	1,30
95,0	98,0	0,97	0,95	1	0,90	1,10	1,0	1,15	1,10	1,20	1,0	1,15	1,10	1,35

e_m en $m\mu$	$e_{réelle}$ moyenne	q moyen	4358 Å		4800 Å		5085 Å		5461 Å		5780 Å		6438 Å	
			ν	χ	ν	χ	ν	χ	ν	χ	ν	χ	ν	χ
0,6	5,5	0,11	1,30	0,30	1,25	0,30	1,40	0,30	1,25	0,40	—	—	—	—
1,2	6,3	0,19	1,65	0,45	1,60	0,55	1,50	0,75	1,35	0,70	1,50	0,90	1,30	1,25
1,8	6,6	0,27	1,55	0,60	1,60	0,65	1,65	1,0	1,50	1,15	2,05	1,10	1,95	1,50
2,35	7,6	0,31	1,75	0,80	—	—	1,50	0,95	1,50	1,25	2	1,25	2	1,90
2,95	8,1	0,36	1,75	0,90	1,45	1,05	1,45	1,05	1,50	1,25	2,15	1,25	2,15	1,95
3,5	8,9	0,40	1,70	0,90	1,50	1,10	1,55	1,05	1,50	1,35	2,20	1,20	2	2,05
4,1	9,8	0,42	1,75	0,95	1,50	1,05	1,50	1,20	1,50	1,30	2,20	1,25	2	2,10
4,7	11,1	0,43	1,70	0,95	1,50	1	1,45	1,10	1,50	1,35	2,20	1,10	1,80	2,05
5,3	11,8	0,45	1,70	0,90	1,50	1	1,45	1,05	1,45	1,30	1,55	1,50	1,75	2,05
10,55	18,6	0,57	1,50	1,05	1,35	1,05	1	1,20	0,90	1,70	0,80	1,90	0,95	2,50
21,1	26,1	0,81	1,30	1,40	1,20	1,30	0,95	1,50	0,75	1,95	0,65	2,20	0,70	2,90
31,7	37,8	0,84	1,15	1,40	1,10	1,40	0,90	1,60	0,75	2	0,60	2,30	0,70	2,85
42,2	47,2	0,89	1,10	1,45	1,05	1,40	0,90	1,65	0,75	2,15	0,65	2,35	0,70	2,90
52,8	57,5	0,92	1,05	1,40	1,05	1,45	0,90	1,60	0,70	2,05	0,60	2,20	0,70	2,90
63,3	67,8	0,93	1,00	1,40	1,0	1,40	0,85	1,55	0,75	2,10	0,55	2,10	0,70	2,90
73,9	77,5	0,95	1,05	1,40	0,95	1,30	0,80	1,55	0,70	2,10	0,55	2,05	0,65	2,80
84,4	88,7	0,95	1,00	1,40	0,90	1,30	0,75	1,50	0,70	2,05	0,50	2,0	0,60	2,75
95,0	98,0	0,97	0,95	1,25	0,90	1,20	0,70	1,45	0,65	2,0	0,50	1,95	0,60	2,70

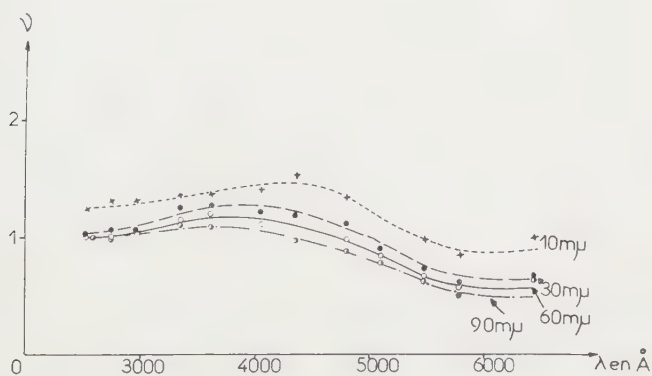


Figure 7. Variations de l'indice de réfraction ν d'une couche d'or d'épaisseur donnée en fonction de la longueur d'onde de la radiation utilisée.

guère s'attendre à trouver les constantes du métal massif en étudiant des couches obtenues par vaporisation même si elles sont relativement épaisses [7].

En conclusion, on peut constater que pour ces couches d'or, le saut de phase de 2π existe surtout pour les radiations ultraviolettes, du moins dans la limite des longueurs d'onde étudiées ici. Pour les couches d'argent précédemment étudiées il existait au contraire surtout pour les radiations du spectre visible. Ces résultats peuvent sans doute s'expliquer par des différences de structure existant entre les couches d'or et d'argent étudiées; la modification des conditions de formation et d'étude des couches, peut, comme je l'ai montré par ailleurs [8], modifier les conclusions précédentes.

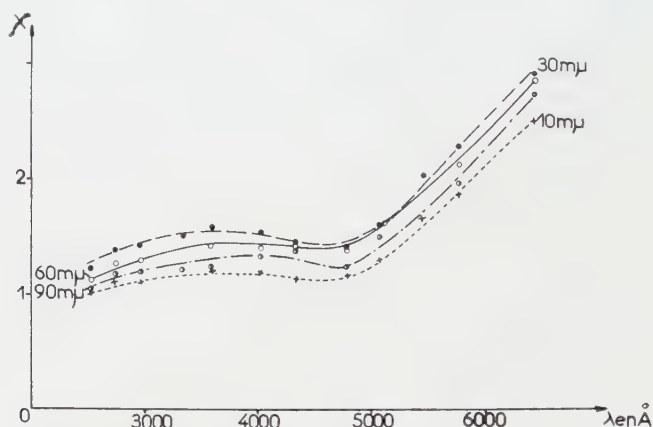


Figure 8. Variations de l'indice d'extinction χ d'une couche d'or d'épaisseur donnée en fonction de la longueur d'onde de la radiation utilisée.

Il paraît enfin inutile de chercher à comparer les constantes obtenues ici avec celles déterminées par d'autres auteurs. Il est en effet à prévoir qu'elles n'ont de sens que pour des conditions de vaporisation, et en particulier une vitesse de formation des couches, bien précises; or dans les résultats antérieurs cette vitesse n'était généralement pas mentionnée.

Measurements have been made, on 18 films of gold of thicknesses between 0.6 and 95 mμ, of the variations of phase of a light wave reflected normally on the metal in air (Δr) and in the quartz substrate on the metal ($\Delta r'$). These measurements, together with others previously reported of the reflection and transmission factors, have made possible a determination of the optical constants of thin gold films by the method of Malé.

Für 18 dünne Goldschichten mit einer Dicke zwischen 0,6 und 95 mμ wurden die Phasenverschiebungen einer Lichtwelle gemessen, wenn sie senkrecht reflektiert wird in Luft am Metall (Δr) oder in Quarz am Metall ($\Delta r'$). Diese Messungen der Reflexions- und Transmissionsfaktoren zusammen mit den früher mitgeteilten Werten [1], erlauben die optischen Konstanten dieser Goldschichten nach der Methode von Malé zu bestimmen.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] PHILIP, R., 1959, *J. Phys. Radium*, **20**, 535.
- [2] PHILIP, R., 1955, *C.R. Acad. Sci., Paris*, **241**, 559.
- [3] PHILIP, R., 1955, *C.R. Acad. Sci., Paris*, **241**, 596.
- [4] MALÉ, D., 1954, *Ann. Phys., Paris*, **9**, 10.
- [5] PHILIP, R., et TROMPETTE, J., 1957, *J. Phys. Radium*, **18**, 92.
- [6] TROMPETTE, J., et PHILIP, R., 1955, *C.R. Acad. Sci., Paris*, **241**, 627.
- [7] ROUARD, P., et MALÉ, D., 1953, *J. Phys. Radium*, **14**, 584.
- [8] PHILIP, R., 1959, *C.R. Acad. Sci., Paris*, **248**, 3543.

Nachweis für die Überschreitbarkeit der von den Sampling-Expansion-Theoremen postulierten Informationsschranken

von HANS WOLTER

Institut für angewandte Physik der Universität Marburg/Lahn

(Received 7 October 1959)

Während in einer kürzlich erschienenen Arbeit in *A.E.U.* **13** (1959), ein Verfahren zur beliebig genauen Berechnung der Objekteigenschaften aus Bildbeobachtungen trotz endlicher Abbildungsapertur beschrieben wurde, wird hier ein durchsichtigerer Beweis für die grundsätzliche Möglichkeit dieser Berechnung mitgeteilt. Damit werden die Sampling-Expansion-Theoreme, die prinzipielle Informationsschranken auch für den Grenzfall gegen Null gehender Messfehler errichteten, als überschreitbar und zugleich die vom Verfasser a.a.O. beschriebenen Verfahren zur Auflösungsverbesserung über die Abbe-Grenze hinaus als legal erwiesen. Über das Objekt wird nicht vorausgesetzt, dass die Anzahl seiner Freiheitsgrade endlich und *a priori* bekannt ist. Messbare endliche Schranken für Intensität und Ausleuchtungsbreite der kohärenten Beleuchtung werden angenommen, wie das den praktischen Möglichkeiten für jeden Fall kohärenter Beleuchtung entspricht.

1. FORMULIERUNG DER SAMPLING-THEOREME

Das Sampling-Theorem [5, 6, 7, 8, 10], das in der Optik auch als Expansion-Theorem [11] Gestalt gewonnen hat, besagt im eindimensionalen Fall, auf den wir uns der Übersichtlichkeit willen beschränken, folgendes: "Ein optisches Bild, mit der Apertur $2W$ von einem Objekt der Breite G in kohärenter Beleuchtung entworfen, enthält höchstens

$$2WG \quad (1)$$

Informationszahlen über das Objekt". Diese Aussage nennen wir 'Sampling-Theorem erster Art'.

Ein zweites Theorem, hier 'Sampling-Theorem zweiter Art' genannt, behauptet: "Aus einem Stück der Breite G' des wie oben zustande gekommenen Bildes können höchstens

$$2WG' \quad (2)$$

Informationszahlen gewonnen werden".

"Die genannten Grenzen bleiben unüberschreitbar selbst bei beliebiger Herabsetzung der Störungen und anderer Messfehlerquellen."

Beide Theoreme zusammen behaupten ersichtlich, dass es auch keinen Zweck hat, ein Bild auf einer Breite $G' > G$ zu vermessen, da die gesamte Information bereits in einem Bildstück von der Breite des Objekts selbst enthalten sein soll.

Aufgabe dieser Arbeit ist die Untersuchung, ob die Samplingtheoreme zutreffen. Glücklicherweise wird zu zeigen sein, dass die Möglichkeiten, sich aus einem Bilde über ein Objekt zu informieren, nicht so beschränkt sind, wie die Samplingtheoreme behaupten. Dabei wird nicht vorausgesetzt, dass man vom Objekt *a priori* schon sehr viel kennt, also etwa die Anzahl der überhaupt in ihm vorhandenen Atome oder Informationszahlen. Nur die Voraussetzung der Fussnote auf S.2 und der endlichen Ausleuchtung ist erforderlich, um die im

Samplingtheorem benutzten Begriffe überhaupt sinnvoll zu machen. Der Praxis wird durch diese Voraussetzungen kein Zwang angetan, da es wohl unmöglich ist, sie in Falle der hier allein betrachteten kohärenten Beleuchtung nicht zu erfüllen.

2. DIE MATHEMATISCHEN GRUNDLAGEN

Die Koordinaten x im Bilde und im Objekt werden in solchen Einheiten und in einer solchen Orientierung vermessen, dass zu einem Objektpunkt x bei idealer Abbildung (Apertur $W \rightarrow \infty$) auch der Bildpunkt x gehört. Durch diese Festsetzung werden bekanntlich die Beziehungen zwischen Objektfunktion $f(x)$ und Bildfunktion $f_B(x)$ besonders einfach; sie seien hier zusammengestellt, da es im weiteren Verlauf der Arbeit zu umständlich wäre, ständig auf Formeln in der Literatur zu verweisen.

Aus der als komplex zugelassenen Objektfunktion[†] $f(x)$ erhält man die Spektralfunktion

$$F(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-2\pi i \gamma x) dx \equiv \int_{-G/2}^{G/2} f(x) \exp(-2\pi i \gamma x) dx. \quad (3)$$

Darin bedeutet

$$\gamma = \frac{\sin \alpha}{\lambda} \quad (4)$$

die 'optische Frequenz', m.a.W. die 'Richtvariable' [12]; α ist der Winkel, unter dem das Licht aus der Richtung der optischen Achse durch das Objekt abgelenkt wird.

Da das Frequenzspektrum durch die Aperturgrenzen (Spaltbacken) bei $\gamma = +W$ und $\gamma = -W$ im Sinne der Übertragungsfunktion[†]

$$S(\gamma) = \begin{cases} 1 & \text{für } |\gamma| < W \\ 0 & \text{für } |\gamma| > W \end{cases} \quad (5)$$

verändert wird, bleibt für das Bild nur noch eine 'Bildspektralfunktion'

$$F_B(\gamma) = \begin{cases} F(\gamma) & \text{für } |\gamma| < W \\ 0 & \text{für } |\gamma| > W. \end{cases} \quad (6)$$

Aus ihr bildet die Interferenz der Elementarwellen das Bild, wie es durch die Bildfunktion

$$f_B(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_B(\gamma) \exp(2\pi i \gamma x) d\gamma \equiv \int_{-W}^W F(\gamma) \exp(2\pi i \gamma x) d\gamma \quad (7)$$

zu beschreiben ist. Nach dem Fourierschen Integraltheorem gelten dann auch die Umkehrungen der Fouriertransformationen (3) und (7), also

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\gamma) \exp(2\pi i \gamma x) d\gamma, \quad (8)$$

$$F_B(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} f_B(x) \exp(-2\pi i \gamma x) dx. \quad (9)$$

Grundaufgabe der optischen Informationstheorie ist die Beantwortung der Frage, inwieweit aus dem Bilde $f_B(x)$ trotz der Aperturbeschränkung noch auf

[†] Für alle Funktionen setzen wir in dieser Arbeit voraus, dass jeder Funktionswert gleich dem arithmetischen Mittel des rechtsseitigen und des linksseitigen Limes sei. Alle Funktionen seien stückweise stetig und stückweise monoton. Bekanntlich genügt es, diese Voraussetzung für $f(x)$ zu machen, um sie auch für $F(\gamma)$ und $f_B(x)$ zu sichern, da diese dann sogar ganze Funktionen [13] sind.

das Objekt geschlossen werden kann. Die Sampling-Theoreme geben eine Antwort hierauf für den Grenzfall sehr kleiner Störungen und Fehlerquellen jeder Art. Das Sampling-Theorem zweiter Art, das nur auf einem einzigen Fehlschluss beruht, sei zuerst betrachtet, während das Sampling-Theorem erster Art zwei Fehlschlüsse enthält. Seine Diskussion geschieht am Ende des Abschnitts 3.

3. ÜBER DIE HERLEITUNG DER SAMPLING-THEOREME AUS DEN IN ABSCHNITT 2 ZUSAMMENGESTELLTEN INFORMATIONSTHEORETISCHEN GRUNDLAGEN

Bei der Herleitung der Sampling-Theoreme schliessen wir uns so eng wie möglich an Shannon [5, 6] an. Zur Berechnung der Bildfunktion (7) aus der Spektralfunktion $F(\gamma)$ genügt deren Kenntnis im Intervall $(-W; W)$. Da $F(\gamma)$ als Fouriertransformierte einer stückweise stetigen, stückweise monotonen Funktion $f(x)$ mit endlichen Integrationsgrenzen $-G/2; +G/2$ eine sogar ganze analytische Funktion [13] ist, kann sie in $(-W; W)$ in eine Fourierreihe

$$F(\gamma) \equiv F_B(\gamma) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \exp(-2\pi i k \gamma / 2W) \text{ für } |\gamma| < W \quad (10)$$

entwickelt werden, deren Koeffizienten nach dem Fouriertschen Reihentheorem gleich

$$g_k = \frac{1}{2W} \int_{-W}^W F(\gamma) \exp(2\pi i k \gamma / 2W) d\gamma \quad (11)$$

sind. Der Vergleich mit Gl.(7) zeigt, dass

$$g_k = \frac{1}{2W} f_B\left(\frac{k}{2W}\right) \quad (12)$$

ist. Somit folgt aus Gl. (7) für $f_B(x)$ die Darstellung

$$f_B(x) = \int_{-W}^W \exp(2\pi i \gamma x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2W} f_B\left(\frac{k}{2W}\right) \exp(-2\pi i k \gamma / 2W) d\gamma, \quad (13)$$

d.h. nach Vertauschung des Summenzeichens und des Integralzeichens

$$f_B(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_B\left(\frac{k}{2W}\right) \frac{1}{2W} \int_{-W}^W \exp(2\pi i \gamma (x - k/2W)) d\gamma, \quad (14)$$

also schliesslich

$$f_B(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_B\left(\frac{k}{2W}\right) \frac{\sin 2\pi W(x - k/2W)}{2\pi W(x - k/2W)}. \quad (15)$$

Diese von Whittaker [1] ohne Bezug auf unser Problem als Interpolationsformel benutzte Beziehung hat nun in der Tat für die optische Informationstheorie grosse Bedeutung. Darauf hingewiesen zu haben, ist Shannons [5] bleibendes Verdienst. Richtig ist auch Shannons Schluss, dass in den 'Samplingwerten'

$$f_B\left(\frac{k}{2W}\right) \text{ für } k = -\infty, \dots, +\infty, \quad (16)$$

also den Bildwerten an den 'Samplingpoints'

$$x = \frac{k}{2W}, \quad (17)$$

bereits die gesamte Bildinformation liegt. Falsch ist aber sein weiterer Schluss, dass aus dem Bildintervall $|x| < G/2$ höchstens so viele Informationszahlen zu gewinnen seien, wie Samplingpoints, nämlich

$$G'2W, \quad (18)$$

darin maximal liegen können. Dieser Schluss enthält die Verwechslung einer hinreichenden mit einer notwendigen Bedingung. Die Kenntnis aller Samplingwerte (16) ist nach Gl. (15) in der Tat eine hinreichende Bedingung für die vollständige Kenntnis der Bildfunktion, aber keine notwendige. Wir werden in Abschnitt 7 zeigen, dass im Gegenteil jedes Intervall $(-G'/2; G'/2)$ abzählbar unendlich viele Informationszahlen enthält und dass man die Messung an den ausserhalb des Intervalls liegenden Samplingpoints durch Messung von Zwischenwerten $f_B(k/2W)$ mit nicht ganzem k im Intervallinnern ersetzen kann.

Die geläufige Begründung Shannons [5, 6] und anderer für das Sampling-Theorem erster Art beruht ausser auf dem soeben bei dem Theorem zweiter Art nachgewiesenen Trugschluss auf der zusätzlichen fehlerhaften Annahme, dass mit der Objektfunktion auch die Bildfunktion für $|x| > G/2$ identisch oder doch zumindest an allen ausserhalb des Intervalls $(-G/2; G/2)$ liegenden Samplingpoints verschwinde. Dass jede dieser Annahmen falsch ist, wurde bereits in [12] nachgewiesen. Die Nullstellen der Bildfunktionen sind fast nie äquidistant, und ein identisches Verschwinden der 'ganzen' Funktion $f_B(x)$ in irgendeinem Intervall hätte sogar ihr Verschwinden überall zur Folge.

Dass nun nicht nur die Beweise der Sampling-Theoreme falsch sind sondern auch die Theoreme selbst, wird im folgenden gezeigt.

4. ALLGEMEINE ERKENNTNISSE ÜBER DIE BILDFUNKTION UND DIE SPEKTRALFUNKTION

Die im Abschnitt 3 aufgestellte Behauptung, dass die Bildfunktion in jedem Intervall $|x| < G'/2$ mit $G' > 0$ so viel Information enthält wie die Bildfunktion in jedem Intervall $|x| < G''/2$ mit $G'' > G$ wäre trivial, wenn Messfehler vermeidbar wären; denn $f_B(x)$ ist eine ganze analytische Funktion der ins Komplexe erweitert gedachten Variablen x , weil sie Fouriertransformierte einer stückweise stetigen, stückweise monotonen (sogar in $(-W; W)$ regulären) Funktion $F_B(\gamma)$ ist, die ausserhalb eines endlichen Intervalls identisch verschwindet [12, 13]. Eine ganze Funktion ist in der Tat eindeutig und vollständig für alle x bestimmt, wenn ihre Werte in irgendeinem endlichen Intervall bestimmt sind; sie ist analytisch fortsetzbar.

Doch ist diese altbekannte Tatsache für unsere physikalischen Probleme nicht auswertbar, da wir nicht völlig genau messen sondern höchstens beliebig genau. Die entscheidende Frage ist daher, wie sich kleine Messfehler auf das Resultat auswirken, ob also die Resultatfehler gegen Null gehen, wenn die Messfehler selbst gegen Null gehen. Ist das so, so sprechen wir von endlicher Fehlerfortpflanzung, sonst von unendlich starker Fehlerfortpflanzung.

Die analytische Fortsetzung einer Funktion aus einem Intervall $|x| < G'/2$ in ein Intervall $|x| > G''/2$ mit $G'' > G'$ ist aber bekanntlich ein Musterbeispiel für unendlich starke Fehlerfortpflanzung. Denn zu jeder Messfehlertoleranz $\delta > 0$, jedem $A > 0$ und jedem $\bar{x} > G'/2$ gibt es eine ganze Funktion, die für $|x| < G'/2$ selbst kleiner als δ , aber an \bar{x} dem Betrage nach grösser als A ist. Z.B. hat die Funktion

$$\chi(x) = \left(\frac{2x}{\bar{x} + G'/2} \right)^n \quad (19)$$

mit

$$n = \left[\max \left(\frac{\ln(1/\delta)}{\ln(\bar{x} + G'/2)/2\bar{x}}; \frac{\ln A}{2\bar{x}/(\bar{x} + G'/2)} \right) \right]^{[y']} \quad (20)$$

diese Eigenschaft. (Darin bedeutet die eckige Klammer $[y]'$ die nächst grössere ganze Zahl zu y . Es sei $\delta < 1$; $A > 1$; das schränkt die Aussage der Behauptung wegen der in ihr lediglich behaupteten Ungleichungen nicht ein.) Für $|x| < G'/2$ ist $|2x| < \bar{x} + G'/2$; also

$$|\chi(x)| = \left| \frac{2x}{\bar{x} + G'/2} \right|^n < \exp \left(\frac{\ln(1/\delta)}{\ln(\bar{x} + G'/2)/G'} \ln \frac{2|x|}{\bar{x} + G'/2} \right), \quad (21)$$

$$|\chi(x)| < \exp \left(\frac{\ln G' / (\bar{x} + G'/2)}{\ln(\bar{x} + G'/2)/G'} \ln(1/\delta) \right) = \exp \left(-\ln \frac{1}{\delta} \right) = \delta. \quad (22)$$

Für $x = \bar{x}$ ist andererseits $2\bar{x} > \bar{x} + G'/2$; also

$$|\chi(x)| = \left(\frac{2\bar{x}}{\bar{x} + G'/2} \right)^n > \exp \left(\frac{\ln A}{\ln 2\bar{x} / (\bar{x} + G'/2)} \ln \frac{2\bar{x}}{\bar{x} + G'/2} \right) = A. \quad (23)$$

Wenn $\chi(x)$ zu der wahren Funktion $f_B(x)$ hinzugefügt wird, so bleibt $f_B(x) + \chi(x)$ ganz, und man merkt im Rahmen der Messfehlertoleranzen δ noch nichts von der Verfälschung im Innern des Intervalls $(-G'/2; G'/2)$; dennoch kann beliebig nahe an den Intervallgrenzen ausserhalb schon ein beliebig grosser Fehler A resultieren. In der Menge der ganzen Funktionen herrscht also unendlich starke Fehlerfortpflanzung.

Wenn wir für die Funktion $f_B(x)$ endliche Fehlerfortpflanzung nachweisen wollen, müssen wir die Kenntnis ausnutzen, dass für $f_B(x)$ nicht die Menge aller ganzen Funktionen in Frage kommt, sondern nur die Menge aller ganzen Funktionen, die nach Gl. (3) und (7) durch die weimalige Fouriertransformation

$$f_B(x) = \int_{-W}^W \exp(2\pi i \gamma x) \int_{-G/2}^{G/2} \exp(-2\pi i \gamma x') f(x') dx' d\gamma \quad (24)$$

aus einer stückweise stetigen, stückweise monotonen Funktion $f(x)$ hervorgehen, von der wir aus der Ausleuchtung eine feste Schranke

$$|f(x)| \leq H \quad (25)$$

ein für alle Mal kennen und von der wir auch die maximale Objektfeldbreite G aus der Grösse des ausgeleuchteten Objektfeldes im voraus wissen.

Hieraus folgt zunächst für die Spektralfunktion ebenfalls eine apparativ bekannte Schranke nach Gl. (3)

$$|F(\gamma)| = \left| \int_{-G/2}^{G/2} f(x) \exp(-2\pi i \gamma x) dx \right| \leq GH; \quad (26)$$

und für $f_B(x)$ berechnet man die Schranke nach Gl. (7)

$$|f_B(x)| = \left| \int_{-W}^W F(\gamma) \exp(2\pi i \gamma x) d\gamma \right| \leq 2WGH. \quad (27)$$

In derselben Weise kann man für die Ableitungen der Spektralfunktion und der Bildfunktion Schranken berechnen, da die Differentiation unter dem Integral vorgenommen werden darf. Man findet für die n -te Ableitung der Spektralfunktion

$$|F^{(n)}(\gamma)| = \left| \int_{-G/2}^{G/2} f(x) (-2\pi i x)^n \exp(-2\pi i \gamma x) dx \right| \leq GH(\pi G)^n \quad (28)$$

und für die n -te Ableitung der Bildfunktion

$$|f_B^{(n)}(x)| = \left| \int_{-W}^W F(\gamma) (2\pi i \gamma)^n \exp(2\pi i \gamma x) d\gamma \right| \leq 2WGH(2\pi W)^n. \quad (29)$$

Daraus folgen für die Koeffizienten $c_n(\gamma_0)$ bzw. $h_n(\gamma_0)$ der in der ganzen γ -bzw. x -Ebene konvergenten Taylor-Entwicklungen

$$F(\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\gamma_0)(\gamma - \gamma_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(\gamma_0)}{n!} (\gamma - \gamma_0)^n \quad (30)$$

bzw.

$$f_B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x_0)(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_B^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (31)$$

für jedes γ_0 bzw. x_0 die Abschätzungen

$$|c_n(\gamma_0)| \leq \frac{\pi^n G^{n+1} H}{n!}, \quad (32)$$

bzw.

$$|h_n(x_0)| \leq \frac{2^{n+1} \pi^n W^{n+1} G H}{n!}. \quad (33)$$

Es bleibt zu untersuchen, ob diese Kenntnisse ausreichen, um die Bildfunktion und gegebenenfalls auch die Spektralfunktion aus einem unserer Messung zugänglichen Intervall in das Intervalläussere mit endlicher Fehlerfortpflanzung fortzusetzen oder ob uns hier Schranken durch die Sampling-Theoreme gesetzt sind.

Um diese Frage für beide Funktionen in einem zu beantworten, formulieren wir das Problem im nächsten Abschnitt allgemein.

5. FORTSETZBARE FUNKTIONENMENGEN ENDLICH VIELER FREIHEITSGRADE

Wenn $\{g(x)\}$ eine Menge von Funktionen $g(x)$ bezeichnet, so wollen wir sagen, $g(x)$ sei als Element dieser Menge aus dem endlichen Intervall $\langle a; b \rangle$ mit $b > a$ in das grössere Intervall $\langle a'; b' \rangle$ fortsetzbar, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ und eine Anzahl N so gibt, dass aus den Werten der Funktion $g(x)$ an N geeignet gewählten Stellen des Intervalls $\langle a; b \rangle$ und aus der Zugehörigkeit von $g(x)$ zu $\{g(x)\}$ eindeutig auf alle Werte $g(x)$ im Intervall $\langle a'; b' \rangle$ geschlossen werden kann, abgesehen von Fehlern, die kleiner als ϵ sind.

Wie wir im vorhergehenden Abschnitt zeigten, sind analytische Funktionen als Elemente der Menge *aller* analytischen Funktionen überhaupt nicht fortsetzbar. Die Zusatzfunktion $\chi(x)$, die wir hierfür benutzten, gehört allerdings offenbar nicht zu der Menge aller nach Gl.(24) darstellbaren ganzen Funktionen. Ob die Elemente dieser Menge fortsetzbar sind, ist das Grundproblem der Informationstheorie.

Dieses wäre ganz elementar zu lösen, wenn wir die Menge so weit einschränken könnten, dass z.B. nur Polynome eines bekannten höchsten Grades M in Frage kämen. Die Elemente dieser Menge sind bekanntlich fortsetzbar, denn man kann die $M+1$ Koeffizienten aus $M+1$ geeignet gewählten Proben eines jeden endlichen Intervalls $\langle a; b \rangle$ mit endlicher Fehlerfortpflanzung berechnen und aus ihnen alle Funktionswerte für jedes gegebene grössere Intervall mit endlicher Fehlerfortpflanzung gewinnen.

Allgemein gilt der elementare Satz:

Vor.: N Funktionen $\phi_k(x)$ mit $k=1, \dots, N$ seien im Intervall $\langle a; b \rangle$ linear unabhängig und in $\langle a'; b' \rangle$ beschränkt. $\{g(x)\}$ sei die Menge der Funktionen

$$g(x) = \sum_{k=1}^N a_k \phi_k(x). \quad (34)$$

Beh.: Jedes $g(x)$ ist als Element der Menge $\{g(x)\}$ von $\langle a; b \rangle$ nach $\langle a'; b' \rangle$ fortsetzbar.

Bew.: Sind die Werte $g(x_k)$ für N Punkte x_1, x_2, \dots, x_N mit Fehlern $< \delta > 0$ gemessen, dann ist das Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^N a_k \phi_k(x_i) = g(x_i) + \delta \eta(x_i); \quad i = 1 \dots N \quad (35)$$

mit $|\eta(x_i)| < 1$ nach den a_k auflösbar, wenn geeignete $x_i (i = 1, \dots, N)$ gewählt sind. Denn die Hauptdeterminante D_N , nach Elementen der N -ten Spalte und den ihnen zugeordneten Unterdeterminanten D_{kN} entwickelt,

$$D_N = \sum_{k=1}^N D_{kN}(x_1; \dots, x_{N-1}) \phi_k(x_N) \quad (36)$$

verschwindet für mindestens ein System von Zahlen $x_1; \dots, x_N$ nicht. Das kann leicht durch vollständige Induktion gezeigt werden. Wird es nämlich für D_{N-1} als erwiesen angenommen, so verschwinden nicht alle $D_{kN}(x_1; \dots, x_{N-1})$ denn es ist $D_{NN} = D_{N-1} \neq 0$. Wäre dann für alle in $\langle a; b \rangle$ wählbare x_N die Determinante $D_N = 0$, so wären die $\phi_k(x)$ doch linear abhängig im Widerspruch zu der Voraussetzung. Für $N=1$ ist $D_N = \phi_1(x_1) \neq 0$ für ein gewisses x_1 , da die 'lineare Unabhängigkeit' einer einzigen Funktion bedeutet, dass sie nicht identisch verschwindet.

Wegen $D_N \neq 0$ kann man die a_k aus Gl. (35) mit endlicher Fehlerfortpflanzung berechnen und mit ihrer Hilfe dann aus Gl. (34) die Werte $g(x)$ für die Punkte x des Intervalls $\langle a'; b' \rangle$, und zwar ebenfalls mit endlicher Fehlerfortpflanzung, da die $\phi_k(x)$ als in $\langle a'; b' \rangle$ beschränkt vorausgesetzt sind.

Als $\phi_k(x)$ eignen sich ausser den bei den Polynomen betrachteten Potenzen z.B. die zueinander orthogonalen Funktionen

$$\phi_k(x) = \frac{\sin 2\pi W(x - k/2W)}{2\pi W(x - k/2W)} \quad (37)$$

der Whittakerschen Interpolationsformel oder Teile anderer Orthogonalsysteme. In jedem Falle bleibt es aber sehr unbefriedigend, dass für diesen Satz die maximal in Frage kommende Anzahl von 'Freiheitsgraden' N endlich und *a priori* bekannt sein muss.

6. ÜBER EINE SCHWIERIGKEIT BEI DER ÜBERTRAGUNG DES BEWEISES AUF UNENDLICH VIELE FREIHEITSGRADE

Die Erweiterung des Beweises von endlich vielen auf abzählbar viele Freiheitsgrade führt zu folgender Betrachtung. Wenn die $g(x)$ der Menge $\{g(x)\}$ als

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k(x) \quad (38)$$

statt durch die Summe (34) unter sonst gleichen Bedingungen dargestellt sind, so tritt an die Stelle der Endlichkeit das gemeinsame Abbrechen für alle Reihen (38) auf Grund der Voraussetzung, dass alle $g(x)$ der Menge $\{g(x)\}$ analog den Ungleichungen (32) und (33) eine gemeinsame in $\langle a'; b' \rangle$ gleichmässig und absolut konvergente Majorante haben. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ und jedem $y > 2$ gleichmässig für alle $a' < x < b$ und gemeinsam für alle $g(x)$ aus $\{g(x)\}$ ein N , so dass der durch Abbrechen nach dem N -ten Gliede bedingte Fehler kleiner

als ϵ/y ist. Für das Abbrechen ist also ein Bruchteil ϵ/y von ϵ verbraucht worden. Der Rest steht für die Auswirkung der Messfehler zur Verfügung. An die Stelle des Gleichungssystems (35) tritt dann

$$\sum_{k=1}^N a_k \phi_k(x_i) = g(x_i) + \delta \eta_1(x_i) + (\epsilon/y) \eta_2(x_i) \\ \text{mit } |\eta_1(x)| \leq 1; \quad |\eta_2(x)| \leq 1. \quad (39)$$

Die Auflösung ist aus denselben Gründen wie oben gesichert, wenn die Werte $g(x_i)$ an N geeignet gewählten Punkten x_i mit Fehlern $< \delta$ gemessen werden, da die $\phi_k(x)$ linear unabhängig in $\langle a; b \rangle$ sind. Daraus ergeben sich die a_k mit endlicher Fehlerfortpflanzung, in die aber jetzt ausser δ auch ϵ/y eingeht. Da die $\phi_k(x)$ beschränkt in $\langle a'; b' \rangle$ sind, kann dann auch der Wert $g(x)$ an jedem Punkt x aus $\langle a'; b' \rangle$ nach Gl. (38) berechnet werden mit einer Fehlerfortpflanzung der Art

$$|\Delta g(x)| \leq |A| \delta + |B| (\epsilon/y). \quad (40)$$

Um dies kleiner als ϵ zu machen, muss man ein $\delta > 0$ mit

$$\delta < \frac{\epsilon}{|A|} \left(1 - \frac{|B|}{y} \right) \quad (41)$$

suchen. Der Beweis wäre erbracht, wenn das noch verfügbare y hinreichend gross gewählt werden könnte, so dass die Klammer in (41) positiv wird; dazu wäre der Beweis nötig, dass B mit $y \rightarrow \infty$ beschränkt bleibt. In B stehen schwer abschätzbare Determinanten, und diese Schwierigkeit des Beweises hat ihren Grund ersichtlich darin, dass wir die mit einem von ϵ abhängigen Fehler abgebrochene Darstellung (39) zur Koeffizientenbestimmung benutzten.

Diese Auflösung nach den Koeffizienten kann umgangen werden, wenn wir als $\phi_k(x)$ nicht Potenzen sondern ein vollständiges Orthogonalsystem verwenden. Denn die Koeffizientenbestimmung erfolgt dann durch die bekannten Integrationen unabhängig von der durch Abbrechen gewonnenen Darstellung.

Ein anfängliches Bedenken des Verfassers, das sich auf die Konvergenzeigenschaften der Entwicklungen nach Orthogonalsystemen ausserhalb des Grundgebietes bezog, wurde von Herrn Prof. Dr. H. Kneser und Herrn Dr. K. Zeller, Tübingen, denen Verf. für eine Diskussion am 25.9.59 dankt, zerstreut. Beide Herren wiesen auf den für die orthogonalisierten Potenzen, d.h. die Legendreschen Polynome, gültigen Neumannschen Satz hin, der im Beginn des nächsten Abschnitts zitiert und als Ausgangspunkt eines relativ einfachen Beweises für die endliche Fehlerfortpflanzung innerhalb unserer Bildfunktionenmenge gewählt wird und die genannte Schwierigkeit zu umgehen gestattet.

7. BEWEIS FÜR DIE FORTSETZBARKEIT DER BILDFUNKTIONEN UND DER SPEKTRALFUNKTIONEN BEI UNENDLICH VIELEN FREIHEITSGRADEN

Für die Untersuchung der Fortsetzbarkeit in der Menge der Bildfunktionen wählen wir zunächst den Massstab der x -Koordinate so, dass $G'/2=1$ wird; das ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit möglich. Dass sich zugleich die Masszahl für λ und also auch der Massstab für γ ändert, ist zu beachten, wird hier aber keine Rolle spielen.

Damit wird das Intervall $\langle -G'/2; G'/2 \rangle$ zum Grundintervall der Legendreschen Polynome

$$\left. \begin{aligned} P_0(x) &= 1; & P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ P_1(x) &= x; & P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1); & & \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

in der Bezeichnung nach [2, 3 und 4]. Jede im Grundintervall $\langle -1; 1 \rangle$ reguläre Funktion $g(x)$ ist in eine dort gleichmäßig konvergente Reihe

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) \quad (43)$$

entwickelbar, deren Koeffizienten sich aus

$$a_n = (n + \frac{1}{2}) \int_{-1}^1 g(x) P_n(x) dx \quad (44)$$

berechnen lassen, und zwar jede endliche Menge von ihnen mit jeder gewünschten gemeinsamen Fehlerschranke, wenn nur $g(x)$ an hinreichend vielen Stellen und dort hinreichend genau gemessen wird. Denn die $P_n(x)$ sind in $\langle -1; 1 \rangle$ beschränkt; es ist

$$|P_n(x)| \begin{cases} < 1 \text{ für } |x| < 1; \\ = 1 \text{ für } |x| = 1; \\ \leq |4x|^n [(n/2) + 1] \text{ für } |x| > 1. \end{cases} \quad (45)$$

Der erste und der zweite Teil dieser Abschätzung können z.B. aus [2], S.62 entnommen werden. Der dritte Teil, den wir hier zugleich aufschreiben, da er noch benötigt wird, folgt aus [3], S.137,

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{[n/2]} (-1)^m \rho_{nm} x^{n-2m} \quad (46)$$

mit

$$\rho_{nm} = \frac{(2n-2m)!}{2^n m! (n-m)! (n-2m)!} = \frac{1}{2^n} \binom{n}{m} \binom{2n-2m}{n}. \quad (47)$$

Nun ist für $p > q \geq 0$

$$\binom{p}{q} < \sum_{q=0}^p \binom{p}{q} = 2^p, \quad (48)$$

also

$$|\rho_{nm}| < \frac{1}{2^n} 2^n 2^{2n} = 4^n. \quad (49)$$

Für $|x| > 1$ folgt daher

$$|P_n(x)| < [(n/2) + 1] 4^n |x|^n \quad (50)$$

und daraus der dritte Teil der Aussage (45).

Entscheidend für die Fortsetzung der Bildfunktionen ist der Neumannsche Satz [9], nach dem die Reihe (43) nicht nur im Grundintervall sondern in jeder Ellipse gleichmäßig konvergiert, die ihre Brennpunkte in -1 , bzw. $+1$ hat und ganz im Regularitätsgebiet der Funktion $g(x)$ liegt. Das macht die Entwicklung nach Legendreschen Polynomen für die analytische Fortsetzung verwendbar. Da $g(x)$ in dem uns interessierenden Fall ganz ist, konvergiert die Reihe (43) gleichmäßig in jedem Intervall $\langle -G''/2; G''/2 \rangle$, in das die Fortsetzung geschehen soll; sie stellt dort eine reguläre Funktion, und zwar wegen der Eindeutigkeitssätze $g(x)$, dar.

Weiterhin ist zu zeigen, dass in $\langle -G''/2; G''/2 \rangle$ für alle Funktionen $g(x)$ unserer Menge $\{g(x)\}$ eine gemeinsame konvergente Majorante existiert, die uns auf Grund einer Fehlertoleranz, z.B. $\epsilon/2$, das Abbrechen aller Reihen (43) an einer nur von $\epsilon/2$ abhängigen Stelle N erlaubt, ohne dass uns hierfür die Funktion innerhalb der Menge bekannt zu sein braucht. Dazu ist eine Abschätzung der Koeffizienten a_n der Reihe (43) nötig; wir können nach der Gleichung (33) davon ausgehen, dass uns ein C bekannt ist, so dass

$$|h_k| \leq \frac{C}{k!} \quad (51)$$

für die Koeffizienten h_k der MacLaurin-Reihe

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k x^k. \quad (52)$$

Nach [3], S.155, ist

$$x^k = \sum_{n=0}^{\infty} d_{kn} P_n(x) \quad (53)$$

mit Koeffizienten

$$|d_{kn}| = \left| \frac{(2n+1)k(k-1) \dots (k-n+2)}{(k+n+1)(k+n-1) \dots (k-n+3)} \right| \leq 1; \quad (54)$$

also folgt

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \sum_{n=0}^{\infty} d_{kn} P_n(x), \quad (55)$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} d_{nk} h_k P_n(x). \quad (56)$$

Daher sind die Koeffizienten der Reihe (43)

$$a_n = \sum_{k=n}^{\infty} d_{nk} h_k \quad (57)$$

abzuschätzen gemäss

$$|a_n| \leq \sum_{k=n}^{\infty} 1 \cdot \frac{C}{k!} = C \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!} \quad (58)$$

Die Reihe in Gl. (58) rechts ist ein Rest der MacLaurin-Reihe für e^x mit $x=1$ und nach der Taylorschen Formel kleiner als das Taylorsche Restglied e^ν mit einem $0 \leq \nu \leq 1$; also ist

$$|a_n| \leq \frac{Ce}{n!}. \quad (59)$$

Alle Reihen (43) unserer Menge $\{g(x)\}$ haben also nach (59) und (45) für alle x aus $\langle -G''/2; G''/2 \rangle$, wenn $G''/2 > 1$, die gemeinsame Majorante

$$Ce \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n/2+1}{n!} (2G'')^n. \quad (60)$$

Ist nun ein $\epsilon > 0$ gegeben, so kann man eine Nummer $N = N(\epsilon)$ gleichmässig für alle x aus $\langle -G''/2; G''/2 \rangle$ und gemeinsam für alle $g(x)$ aus $\{g(x)\}$, d.h. ohne Kenntnis des $g(x)$, so finden, dass ein Abbrechen der Reihe (43) hinter N Gliedern höchstens einen Fehler $\epsilon/2$ bewirkt. Dann ist

$$g(x) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n P_n(x) + \eta(x) \epsilon/2 \quad (61)$$

mit $|\eta(x)| < 1$. Nach unseren vorhergehenden Feststellungen an Hand der Gln. (44) und (45) gibt es eine endliche Messgenauigkeit $\delta > 0$ und eine Anzahl

M von Messstellen x_1, \dots, x_M im Grundintervall $\langle -1; 1 \rangle$ so, dass die a_n für $n=1, \dots, N-1$ aus den Messwerten $g(x_1), \dots, g(x_M)$ mit Fehlern höchstens $A\delta$ berechnet werden können; darin ist A eine von n und von dem speziellen Verlauf von $g(x)$ unabhängige Konstante. Da die $P_n(x)$ in $\langle -G''/2; G''/2 \rangle$ nach (45) beschränkt sind und nur in endlicher bekannter Anzahl in Gl. (61) eingehen, gibt es eine Zahl B , so dass der Fehler an dem nach Gl. (61) berechneten $g(x)$ durch

$$|\Delta g(x)| \leq BA\delta + (\epsilon/2) \quad (62)$$

eingeschränkt wird. Da es stets ein $\delta > 0$ so gibt, dass

$$BA\delta < (\epsilon/2), \quad (63)$$

also

$$|\Delta g(x)| < \epsilon \quad (64)$$

ist, kann jede Funktion $g(x)$ der Menge aller analytischen Funktionen mit Taylorkoeffizienten h_n , die durch $|h_n| < C/n!$ beschränkt sind, vom Intervall $(-1; 1)$ in jedes grössere endliche Intervall mit endlicher Fehlerfortpflanzung fortgesetzt werden.

Für die Spektralfunktionenmenge $\{F(\gamma)\}$ sind dieselben Voraussetzungen mit einem anderen C erfüllt, sofern man den Massstab der Koordinate und der Wellenlänge so wählt, dass die Grenze W von $(\sin \alpha)/\lambda$ gleich 1 wird. Somit folgen die beiden Sätze:

Satz 1: "Die Bildfunktionen können aus jedem Intervall $(-G'/2; G'/2)$ nicht verschwindender Länge G' in jedes endliche Intervall fortgesetzt werden und zwar mit endlicher Fehlerfortpflanzung. Das Sampling-Theorem zweiter Art gilt nicht. Jedes endliche Bildintervall kann abzählbar unendlich viele Informationszahlen vermitteln trotz beschränkter Apertur."

Satz 2: "Die Spektralfunktionen können aus jedem Spektralbereich $(-W; W)$ nicht verschwindender Länge in jeden endlichen Spektralbereich fortgesetzt werden, und zwar mit endlicher Fehlerfortpflanzung. (Dass hierfür Bildbeobachtungen ausreichen und dass die Objektfunktion in gewissem Sinne beliebig genau hierdurch erschlossen werden kann, wurde in [14] gezeigt.) Das Sampling-Theorem erster Art gilt nicht. Jeder endliche Spektralbereich lässt die Übermittlung abzählbar unendlich vieler Informationszahlen zu bei endlicher Objektbreite."

Voraussetzung beider Sätze ist nur die stückweise Monotonie und stückweise Stetigkeit der Objektfunktion und die endliche Ausleuchtung des Objekts. Dieses darf unendlich viele Freiheitsgrade besitzen.

8. PRAKTISCHE ERFAHRUNGEN MIT DER FEHLERFORTPFLANZUNG BEI INFORMATIONSERWEITERUNGEN

Das in dieser Arbeit benutzte Beweisverfahren gibt zugleich ein praktisch gangbares Rechenverfahren; doch ist das in der Arbeit [14] mitgeteilte Verfahren noch bequemer, wenn ein hinreichend grosses Bildgebiet der Messung zugänglich ist. Die in den letzten Jahren gesammelten Erfahrungen bei der praktischen Arbeit zeigen, dass die Shannonschen Informationsgrenzen um mehrere Zehnerpotenzen überschreitbar sind, wenn die Störungen hinreichend klein gehalten werden. In der Optik ist diese Bedingung durchaus nicht unerfüllbar [12].

Die Abbe-Shannon-Gaborschen Auflösungsgrenzen behalten eine gewisse Bedeutung in der Gestalt, dass Bild und Objekt als nahezu identisch angesehen

werden können, solange man sich mit einer Auflösung im Rahmen jener Grenzen begnügt. Zur Überschreitung der genannten Grenzen bedarf es einer bei steigenden Ansprüchen immer stärker wachsenden Störfreiung und Messgenauigkeit einerseits und einer zunehmenden Rechenarbeit, wenn nicht in Einzelfällen Minimumstrahlkennzeichnung oder verwandte Apodisationsverfahren die Rechnung grösstenteils ersetzen helfen.

In a recent paper [*A.E.U.*, **13** (1959)] a method was described for the precise calculation of object qualities from image properties though the aperture is finite. Here the fundamental possibility of such a procedure is demonstrated by a more direct proof. In this way the sampling expansion theorems setting limits to the information even in the case of the absence of errors may be transgressed and the methods described for an improved resolution beyond the Abbe value are shown to be allowed. The object is not supposed to have a finite and an *a priori* known number of degrees of freedom. According to the practical possibilities in all cases of coherent illumination the limits for intensity and illumination are supposed to have a finite and a definite value.

Il a été indiqué, dans un travail paru récemment dans *A.E.U.*, **13** (1959), un moyen permettant le calcul, aussi précis que l'on désire, des propriétés de l'objet à partir d'observations de l'image, et ceci malgré l'ouverture finie du système formant l'image. On indique ici une démonstration plus claire de la possibilité fondamentale de ce calcul. On trouve ainsi que les théorèmes du Sampling-Expansion, qui limitent en principe la quantité d'information même dans le cas limite où les erreurs de mesure tendent vers zéro, peuvent être dépassés et l'on justifie en même temps les procédés, décrits ailleurs par l'auteur, qui permettent une amélioration du pouvoir séparateur au-delà de la limite d'Abbe. On ne suppose pas que le nombre des degrés de liberté de l'objet est fini et connu *a priori*. On tient compte des limites finies mesurables pour l'intensité et l'étendue d'éclairement correspondant à un éclairage cohérent, telles qu'elles correspondent aux possibilités pratiques pour chaque cas d'éclairage cohérent.

LITERATUR

- [1] WHITTAKER, J. M., 1935, *Interpolatory Function Theory*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 33, Chap. IV (Cambridge: University Press).
- [2] MADELUNG, E., 1936, *Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers*, 3. Auflage (Berlin), S.62.
- [3] LENSE, J., 1947, *Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik*, 2. Auflage (Berlin: Verlag Walter de Gruyter), S.132ff.
- [4] MAGNUS, W., und OBERHETTINGER, F., 1948, *Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der Mathematischen Physik*, 2. Auflage (Springer-Verlag), S.69ff.
- [5] SHANNON, C., und WEAVER, E., 1949, *The Mathematical Theory of Communication* (Urbana: University of Illinois Press).
- [6] SHANNON, C., 1949, *Proc. Inst. Radio Engrs*, N.Y., **37**, 10.
- [7] KÜPFMÜLLER, K., 1949, *Die Systemtheorie der elektrischen Nachrichtenübertragung* (Stuttgart: S. Hirzel Verlag), S.165.
- [8] MEYER-EPPLER, W., 1952, *Naturwissenschaften*, **39**, 341.
- [9] WHITTAKER, E. T., und WATSON, G. N., 1952, *A Course of Modern Analysis*, 4. Auflage (Cambridge: University Press), S.322.
- [10] TORALDO DI FANCIA, 1955, *J. opt. Soc. Amer.*, **45**, 497.
- [11] GABOR, D., 1956, *Astronomical Optics and Related Subjects*, edited by Z. Kopal (Amsterdam: North-Holland Publishing Co.), p. 17, 59.
- [12] WOLTER, H., 1958, *Physica*, **24**, 457.
- [13] WOLTER, H., 1958, *A.E.Ü.*, **12**, 335.
- [14] WOLTER, H., 1959, *A.E.Ü.*, **13**, 393.
- [15] WOLTER, H., 1959, *A.E.Ü.*, **13**, 477.
- [16] WOLTER, H., 1960, *Progress in Optics*, im Druck.

Contrast transmission and the image evaluation problem

by E. H. LINFOOT
University of Cambridge, England

(Received 7 September 1959)

A discussion is given, with the help of contrast-transmission theory, of the relative merits of the ray-theoretic moment of inertia, of the Strehl definition, and of the so-called photographic Strehl definition as quality evaluations of astrographic cameras and of camera lenses producing images with the familiar core-and-halo structure. The 'interferometer quality' assessment of Coleman *et al.* [1] is also considered. The general discussion is supplemented in §§ 3 and 4 by a fairly detailed examination of the effects of applying the second and third evaluations to a system with primary spherical aberration. It is concluded that, when a system with primary spherical aberration forms images with a core-and-halo structure, the image quality near best focus depends critically on the properties of the image core, where diffraction effects may be dominant even when the total wave aberrations are large, and the inference is drawn that in evaluating the performance of a photographic system forming core-and-halo images the photographic Strehl definition should prove much more satisfactory than either the classical Strehl definition or the ray-theoretic moment of inertia. For the performance evaluation of astrographic cameras, on the other hand, use of the ray-theoretic moment of inertia seems to be a satisfactory practical procedure.

1. INTRODUCTION AND GENERALITIES

The light distribution in the ray-theoretic image of a point object by an optical system gives a less accurate indication of its properties than does the intensity distribution in the diffraction image calculated from the usual scalar wave model based on Huyghens' principle, but it is easier to compute, and in low-quality systems suffices for the needs of the optical designer. Not very much is known about the extent to which this remains true in high quality systems.

In systems with fairly large Seidel aberrations, the light distributions in the ray-theoretic image and in the scalar diffraction image are strikingly similar in their general appearance, the most noticeable difference between them being the appearance of fine fringe-structures in the second image which are absent in the first. It has sometimes been inferred from this that a ray-theoretic treatment should suffice for practical needs whenever the wave-aberrations amount to several wavelengths; for example in photographic camera lenses. The results of the present paper suggest that this point needs a more critical examination.

Since we are mainly concerned with the capacity of an optical system to reproduce fine detail in the images of extended objects, the discussion is carried out in terms of contrast transmission functions (ct-functions). These present, in a more convenient form, the same information as would be contained in a knowledge of the intensity distribution in the image of a point object; indeed, either can be computed from the other by a Fourier transformation.

In a previous paper [17] entitled "Contrast transmission functions at low spatial frequencies" (referred to in the sequel as LF)[†] approximate expressions were obtained for the difference between the values of the ray-theoretic and the wave-theoretic ct-functions of an optical system, with explicit upper limits for the errors of approximation in terms of the wave-aberrations. From these expressions follow at once most of the known results about the relations between the radial first and second derivatives of the ct-function of an optical system at the spatial frequency origin and the corresponding moments of the ray-theoretic image of a point object by the system. In particular (equation (4.7) of LF) the well-known relation [2, 3] between the radial second derivatives of the ct-function and the second moment M_{II} was derived in the form appropriate to a non-circular aperture:

$$\tau_0 - \bar{\tau} = \pi^2 \omega^2 [M_{II} + \eta(\omega)],$$

where $\eta(\omega) \rightarrow 0$ as the line-frequency ω tends to zero. In this equation, M_{II} denotes the second moment of the ray-theoretic image about the origin of (x, y) -coordinates in the image plane, τ_0 the ct-function as it would be if the wave-fronts were spheres centred on this origin, τ the actual ct-function, and $\tau_0, \bar{\tau}$ the means of τ_0, τ with respect to the azimuth ψ at the line-frequency ω .

The above relation holds in systems where the clear aperture is bounded by an arbitrary convex curve; for example, in systems with edge-vignetting. In a system with unvignetted circular aperture it takes the simpler form

$$\bar{\tau} = 1 - (4/\pi) \omega F \lambda + \pi^2 \omega^2 [M_{II} + \eta(\omega)],$$

where again $\eta(\omega)$ denotes a quantity which tends to zero as $\omega \rightarrow +0$, while F is the focal ratio.

The value of the second moment M_{II} gives a useful indication of the image quality in the large systems commonly used for astronomical photography but, as Lucy [12] and Miyamoto [13] have pointed out, it is unsuitable as a quality evaluation of systems, such as fast, wide-field camera lenses, in which the image of a bright object point consists of a small, bright core containing up to 40 or 50 per cent of the light and surrounded by an extended faint halo containing the remainder.

In these latter systems attainment of the greatest possible field and aperture is usually a major objective, and the best overall results have been obtained by keeping the wave-aberration $\phi(\xi, \eta)$ well below λ over as large an area as possible of the clear aperture \mathcal{A} , without regard to the large wave-errors which then develop over the remainder of the aperture, especially in the outer parts of the field. In such systems the value of M_{II} is, roughly speaking, determined by the moment of inertia of the halo of the ray-theoretic image; the core, in which we suppose the (x, y) -origin to lie, is so small that the factor $x^2 + y^2$ practically annuls the contribution of 'core light' to the total moment of inertia M_{II} . Extending to an indefinite distance beyond the edge of the ray-theoretic halo is the diffraction halo, which in this type of image contains so little total illumination that its effects on the images of extended objects are utterly negligible. In the present paper we shall use the word halo to mean that part of the diffraction image which lies outside the bright core and inside the boundary of the geometrical image patch.

Any definite division of the image-intensity function $w(x, y)$ into 'core light' and 'halo light' must of course be a matter of convention. In those cases where

[†] We use the notation of LF throughout the present paper.

the intensity function $w(x, y)$ can be represented sufficiently well by an approximation of the form

$$w(x, y) = (A/\pi k_1^2) \exp [-(x^2 + y^2)/k_1^2] + [(1 - A)/\pi k_2^2] \exp [-(x^2 + y^2)/k_2^2], \quad (1)$$

where $0 < A < 1$, k_1 is comparable with $F\lambda$, and $k_2 \gg k_1 = O(1/F\lambda)$, it may be convenient, following Miyamoto [4], to identify the core light with the first term and the halo light with the second term. In the corresponding ct-function

$$\tau(u, v) = A \exp [-(2\pi k_1^2)(u^2 + v^2)] + (1 - A) \exp [-(2\pi k_2^2)(u^2 + v^2)], \quad (2)$$

we can then regard the first term as the core-contribution to the contrast transmission and the second term as the halo-contribution. Both these contributions are positive, and the core-contribution to w is appreciable only when $\sqrt{x^2 + y^2} = O(F\lambda)$, while the halo-contribution to τ is appreciable only when

$$\sqrt{u^2 + v^2} \ll 1/(F\lambda).$$

However, in many of the radially symmetrical images produced by perfectly executed camera lenses working on axis, $w(x, y)$ cannot be sufficiently well represented by an approximation of the simple form (1).

In astronomical systems intended for star-field photography, the existence of extended faint halos round the star-images is quite unacceptable in many applications, and the very large value which M_{II} assumes when such a halo exists corresponds appropriately enough to the intense dislike with which the more experienced observational astronomers normally regard images of this type. But in the photography of extended objects with fine detail (for example, in aerial photography) the requirements are different; it is the existence of a very small, bright core, not the absence of a wide halo, which is of paramount importance, because the detection and interpretation of fine detail depend critically on the properties of this core, in which diffraction effects are often predominant, while the halo now does little harm beyond reducing the contrast. In fact, the effect of a wide halo is less disturbing than that of a narrow one of the same total luminosity. The quality assessment of a fast camera lens is thus largely a matter of assessing, in different parts of its field, the compactness and brightness of its image-cores.

A simple practical way of estimating these in many images close to visual best focus is to view the optical system by autocollimation in an interferometer, adjusting the spherical comparison wave-front in the manner described by Coleman *et al.* [1] so that a single light or dark fringe is spread out over as large an area as possible of the clear aperture. The area occupied by this 'spread fringe' can be regarded as a region of the clear aperture in which the wave-error of the twice-traversed system has been made to vary by less than $\frac{1}{2}\lambda$ by a suitable choice of comparison sphere or, what is equivalent, over which $|\phi(\xi, \eta)|$ has been made everywhere less than $(1/8)\lambda$ by a suitable choice of (x, y) -origin and of reference sphere.

Coleman *et al.* introduced the term *interferometer quality* (I.Q.) to denote the diameter of the greatest circle which could be inscribed in the spread fringe, expressed as a percentage of the diameter of the full aperture. They found, using visual telescopes focussed on sets of numerals, that in green mercury light the size of the I.Q. circle was greatest at the visually best focal adjustment. They also found that the best visual and the best interferometer focus for primary astigmatism both lie midway between the sagittal and tangential foci, and that

the diameter of the I.Q. circle is always greater, but the spread fringe area often less, at this mean focus than at the sagittal or tangential focus. Thus the shape of the spread fringe area is relevant to practical performance as well as its size, a result which was to be expected on theoretical grounds.

Unfortunately, this attractively simple evaluation method of Coleman *et al.* is only applicable to images at a particular focal setting, which is determined by the image itself, and with aberrations of a rather restricted type. It cannot be extended to cover images in which the focal setting is prescribed in advance†. Such images must of course be covered by an evaluation procedure which is to be of use in the design of camera lenses.

The *Strehl definition* or *Strehl intensity ratio* V and its generalizations [5] provide a useful quality evaluation which covers both images with very small aberrations and prefocussed images of the core-and-halo type. V is defined as the ratio of the actual maximum intensity in the aerial image to the value which this intensity would assume if the aberrations were removed. It can be expressed in terms of ct-functions as follows. From (2.10) of LF we have, by Fourier inversion,

$$w(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} \exp [2\pi i(ux + vy)] \tau(u, v) du dv. \quad (3)^\ddagger$$

Let (x_1, y_1) be the (x, y) -coordinates of the point of maximum intensity in the image. Then evidently

$$I = \frac{w(x_1, y_1)}{w_0(0, 0)} = \iint_{-\infty}^{\infty} \exp [2\pi i(ux_1 + vy_1)] \tau(u, v) du dv / \iint_{-\infty}^{\infty} \tau_0(u, v) du dv \quad (4)$$

and if the (x, y) -origin has itself been chosen at this point of maximum intensity, so that $x_1 = y_1 = 0$, we have

$$\begin{aligned} V = \frac{w(0, 0)}{w_0(0, 0)} &= \iint_{-\infty}^{\infty} \tau(u, v) du dv / \iint_{-\infty}^{\infty} \tau_0(u, v) du dv \\ &= \int_0^{\infty} \bar{\tau}(\omega) \omega d\omega / \int_0^{\infty} \bar{\tau}_0(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (5)$$

If the aperture is a circle $\xi^2 + \eta^2 < \sin^2 \alpha$, (3) can be written

$$V = 2 \int_0^2 \bar{\tau}(s) s ds, \quad (6)$$

where s is the reduced line-frequency $\lambda\omega \operatorname{cosec} \alpha$ and $\bar{\tau}(s)$ here denotes the same physical quantity as $\bar{\tau}(\omega)$, considered now as a function of s . It is easy to see that $\bar{\tau}(s) = 0$ for $s \geq 2$. When the aberrations are radially symmetrical, $\bar{\tau}(s) = \tau(s)$ and we have simply

$$V = 2 \int_0^2 \tau(s) s ds. \quad (7)$$

2. SPREAD-FRINGE IMAGES

The class of images at their 'spread fringe' focal setting is of some practical importance, since many of its members are, in an experimentally meaningful sense, images at best focus. It is also of theoretical interest, because the connection

† It breaks down, for example, in an image with $\phi(\xi, \eta) = \phi(r) = 8\lambda r^4 - 4\lambda r^2$, where $r^2 = (\xi^2 + \eta^2) \operatorname{cosec}^2 \alpha$ (see (10)).

‡ It follows from this equation that *any* image evaluation expressible in terms of w can also be expressed in terms of τ .

between the properties of the image core and halo (if any) on the one hand and the contrast transmission on the other can be seen very clearly in images of this type. For the sake of shortness, we shall refer to them as spread-fringe images.

From the appearance of the spread fringe alone, we can get quite a good qualitative idea of the contrast transmission properties of a spread-fringe image. Suppose, for example, that the system has a circular aperture and shows a large spread fringe surrounded by half a dozen narrowly-spaced border fringes, as in figure 1. We see at once that the image is of the 'core and halo' type; light from the spread-fringe area provides an image-core and light from the border a halo. Of course there is no precise demarkation between core and halo, and in any case a complete segregation of the intensity contributions from the two pupil regions is only possible in the ray-theoretic approximation.

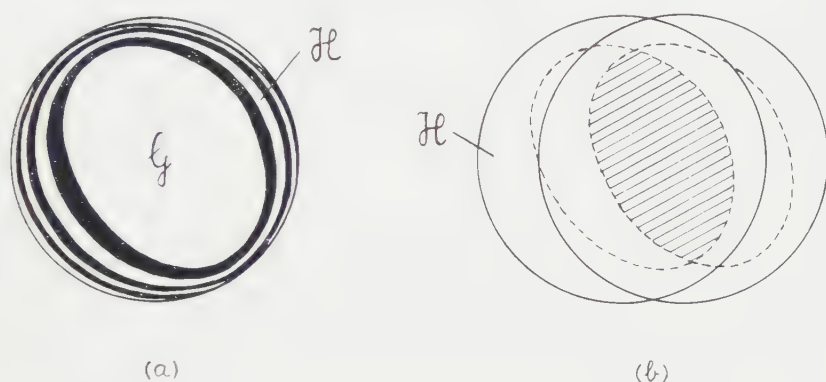


Figure 1. (a) Spread fringe \mathcal{G} and border region \mathcal{H} as seen under autocollimation test in the interferometer. (b) Aperture sheared against itself. The common part of the two sheared circles is the domain of integration \mathcal{S} ; the common part of the two spread fringe areas (shaded in the diagram) makes the main contribution to the integral (2.8).

Now $\tau(u, v)$ is, by (2.8) and (2.9) of LF, $|\mathcal{A}|^{-1}$ times the integral of the product

$$\exp(-2\pi i I \cdot \lambda) = \exp\left[-\frac{2\pi i}{\lambda} \phi\left(\xi + \frac{\lambda u}{2}, \eta + \frac{\lambda v}{2}\right)\right] \cdot \exp\left[\frac{2\pi i}{\lambda} \phi\left(\xi - \frac{\lambda u}{2}, \eta - \frac{\lambda v}{2}\right)\right] \quad (8)$$

over the area \mathcal{S} common to two sheared apertures (figure 1 (b)). The values of ϕ change much more rapidly near the edge of \mathcal{G} than in its interior, and when \mathcal{G} has been made as large as possible by adjustment of the comparison wavefront the value of ϕ lies in the range $(-\frac{1}{8}\lambda, \frac{1}{8}\lambda)$ throughout \mathcal{G} . As a result, if \mathcal{S} is the shaded part common to the two overlapping regions in figure 1 (b), the size of the complex contribution from \mathcal{S} to the integral of (8) over the region \mathcal{S} is less than, but usually not very much less than $|\mathcal{S}|/|\mathcal{A}|$. The contribution from the rest of \mathcal{S} is usually much smaller than this because of the rather rapid oscillations of one or both factors, except in those cases where the two oscillating factors on the right of (8) are so related that their product changes its phase only slowly. This happens if $\frac{1}{2}\lambda u$, $\frac{1}{2}\lambda v$ are both small compared with the spacing of the outer fringes in figure 1 (a).

The general conclusion is that as $s = \lambda\omega \operatorname{cosec} \alpha$ increases from zero, the value of $|\tau|$ drops rapidly from 1 to a number comparable in size with $|\mathcal{G}|/|\mathcal{A}|$, after which the (complex) value of τ is near to $|\mathcal{G}|/|\mathcal{A}|$ times the ct-function of the system with the border area \mathcal{H} masked out. Curves 4 and 4(a) in figure 6 illustrate this in the special case

$$\phi(\xi, \eta) = 4\lambda r^4 - 2\lambda r^2,$$

where $r^2 = (\xi^2 + \eta^2) \operatorname{cosec}^2 \alpha$ and $\sin \alpha$ is the numerical aperture. The value of $|\mathcal{G}|/|\mathcal{A}|$ is here 0.5; the wave-aberration and the positions of the fringes seen under autocollimation in an interferometer are shown in figure 4(a).

The rapid initial decrease in $|\tau|$ (compare figure 6) results from the high rate of change of $\phi(\xi, \eta)$ in \mathcal{H} , which also gives rise to the halo; the later behaviour of τ depends mainly on the slowly changing values of $\phi(\xi, \eta)$ in \mathcal{G} , which cause the formation of a compact bright central nucleus in the image. The radial second derivatives of $\tau - \tau_0$ at the origin are again seen to be linked up with the light-distribution in the halo of the diffraction image; they have little to do with its core, on which the image quality mainly depends. The light distribution in the halo is closely similar to that in the halo of the ray-theoretic image.

It was shown in LF that an image quality evaluation based on the increase, due to aberrations, in the moment of inertia of the intensity function $w(x, y)$, or of the ray-theoretic image (since the two increases are equal) is equivalent to an evaluation based on the values of the mean radial second derivative of the ct-function at the (u, v) -origin. It represents an attempt to evaluate the image-quality in terms of the value-distribution of the ct-function τ over an infinitesimally small band of very low spatial frequencies. Such an attempt cannot be expected to succeed unless there are special restrictions on the form and size of the wave aberrations, since in general the value-distribution of τ over a finite region of the (u, v) -plane (for example, over the region $\omega \leq 0.15/F\lambda$) is not very closely restricted by specifying its mean radial second derivative at the origin. Image evaluation by moments of inertia is basically inferior in this respect to an evaluation, such as Strehl definition or photographic Strehl definition, which takes account of the value-distribution of τ in the whole of the relevant pass-band.

3. COMPUTATIONAL RESULTS

To obtain a more definite idea of the merits and demerits of Strehl definition as a quality evaluation of core-and-halo images, we examine in some detail a specific case, namely a monochromat with eight wavelengths of fourth-power aberration in its circular exit pupil (figure 4(b)). This is the simplest type of aberration which can give core-and-halo images. In practical lens design, a rapid 'run off' of the wave-fronts at the edge of the aperture usually results from a predominance of sixth-power over a combination of second- and fourth-power aberrations, instead of (as here) a predominance of fourth-power over second power. The effects studied numerically here for images with four and with eight fringes of primary spherical aberration will appear also, with minor modifications, in certain types of image with combined primary and secondary spherical aberration, namely those in which the wave aberrations near best focus approximate to those of a spread-fringe image (figure 1(a)). Examples of such images will be found among those treated by Goodbody [6].

In an image with primary spherical aberration, the wave-distortion function ϕ can be written in the form

$$\phi = A\lambda(r^4 + Br^2), \quad (9)$$

where the polar variable

$$r = \sqrt{(\xi^2 + \eta^2)} \operatorname{cosec} \alpha \quad (10)$$

runs from 0 at the centre of the aperture to 1 at its edge. The parameter A , here equal to 8, measures the number of fringes of fourth-power aberration. The

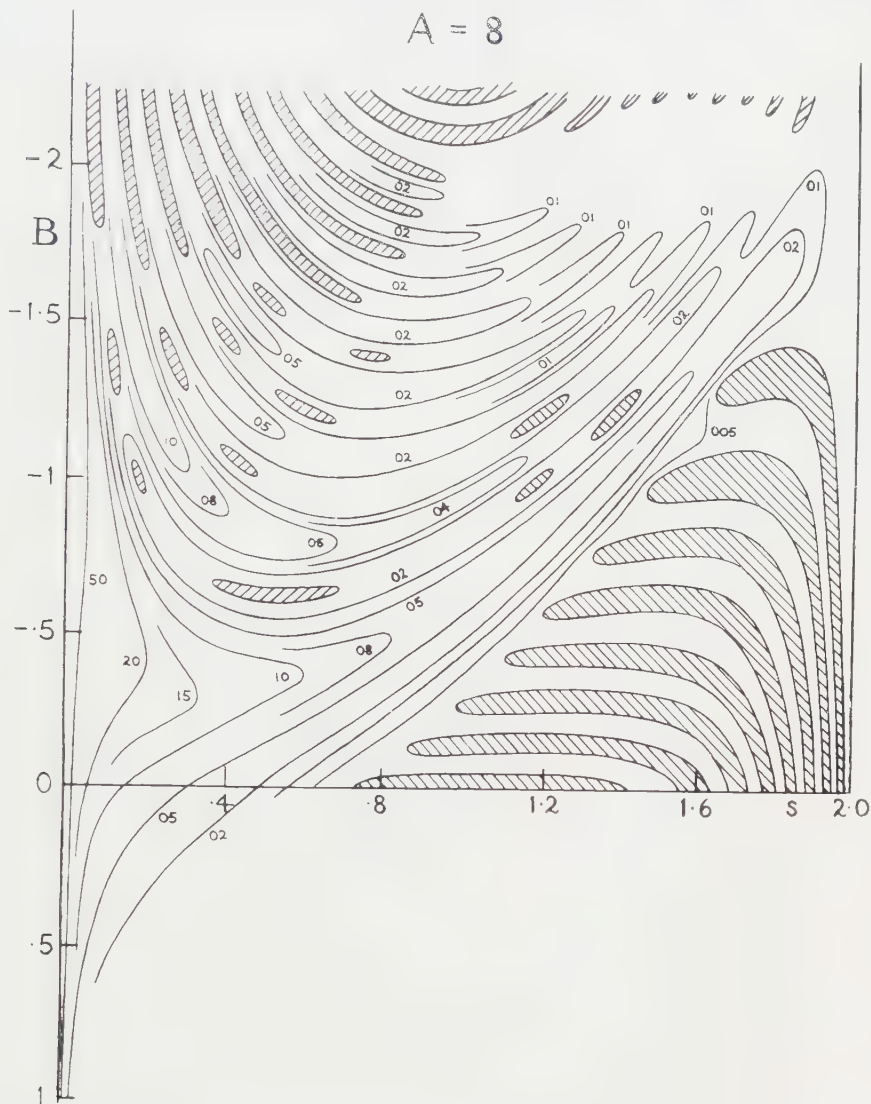


Figure 2. Contrast transmission τ of a monochromat with eight wavelengths of primary spherical aberration at different focal settings. The abscissa s is the reduced spatial frequency $\lambda\omega \operatorname{cosec} \alpha$, which takes the value 2 at the cut-off frequency $(F\lambda)^{-1}$. The ordinate B specifies the focal setting, in accordance with (9) (see text). At the paraxial focus $B=0$; at the marginal focus $B=-2$. The numbered curves give the values of 100τ as a function of s and B . In the shaded areas $\tau < 0$ (contrast reversal). The values of τ along each horizontal line $B=\text{const.}$ represent the ct-function $\tau(s)$ of the system at the corresponding focal setting.

parameter B specifies the focal setting; it runs from 0 at the paraxial focus to -2 at the marginal focus. A change of 0.5 in the value of B corresponds to a focal shift of 1 mm in an $F/8$ system.

Because of the radial symmetry of the aberrations, the τ -function is real and its value is independent of the azimuth ψ .

Figure 2 shows the values of τ as a function of the reduced spatial frequency $s = \lambda\omega \operatorname{cosec} \alpha$ for $A = 8$, $-2 \leq B \leq 0$. It was constructed with the help of the computed values of about 2000 double integrals and of similar figures already worked out for the values $A = 0, 1, 2, 4, 6$. The computations gave the value of $\tau(s)$, correct to three decimal places, at the points $B = -2.250, -2.000(0.125)0, 0.5, 1.0$; $s = 0(0.02)2.00$. The value $s = 2$ corresponds to $\omega = (2 \sin \alpha)/\lambda = (F\lambda)^{-1}$; that is to say, to the edge of the spatial frequency pass-band. Beyond this cut-off value, $\tau(s)$ is everywhere zero.

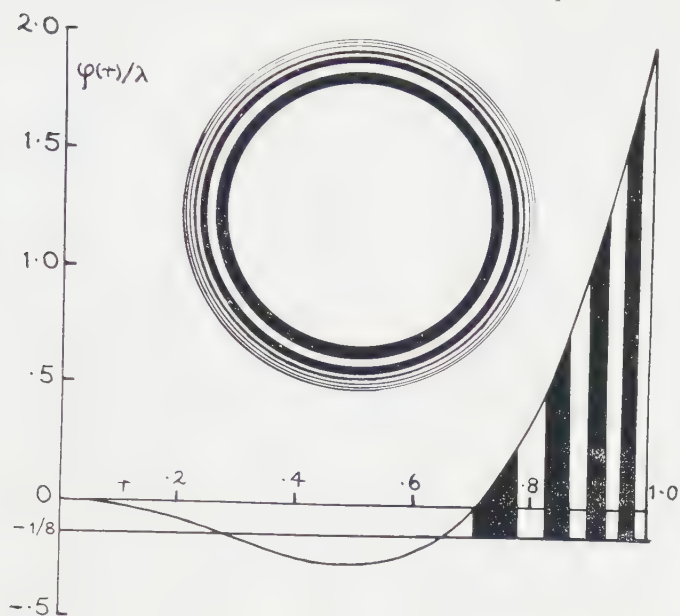
Along each horizontal line $B = \text{const.}$, the value-distribution of $\tau = \tau(s; B)$ gives the τ -function of the system at the focal setting corresponding to B . In the shaded areas $\tau < 0$; that is, there is contrast reversal (spurious resolution).

Along each vertical line $s = \text{constant}$ the run of the s -values shows the variation of contrast transmission with focal setting at the corresponding spatial frequency $\omega = s/(2F\lambda)$. The B -maximum of τ for given s defines the best focal setting for a sinusoidal test grating of line-spacing $2F\lambda/s$ in the image plane.

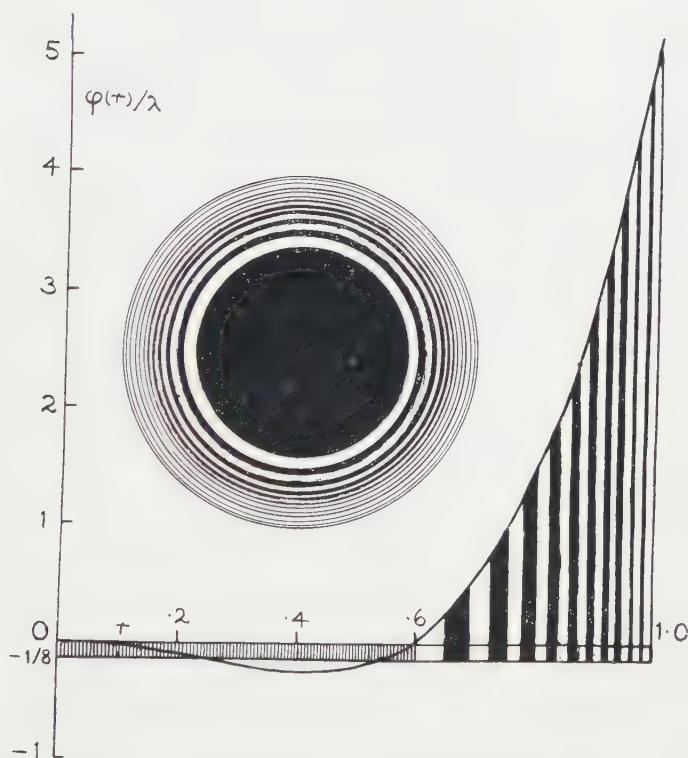
Throughout the triangular area to the right of the contour line $\tau = 0.01$, in the lower right-hand part of figure 2, the contrast-transmission is too small to be regarded as significantly different from zero for practical purposes. We can say that, for $A = 8$, $-1.5 < B < +0.25$, the *effective passband radius* of the system may be taken as $(0.5 - B)/2F\lambda$, where F is the focal ratio.



Figure 3. Contrast transmission of the same system as figure 2, shown on an enlarged horizontal scale in the range $0 < s < 0.25$; s and B have the same meanings as before. The numbered curves give the values of τ as a function of s and B . In the shaded areas $\tau < 0$ (contrast reversal).



(a)



(b)

Figure 4. Values of the aberration function (9) and positions of the fringes seen under autocollimation test in an interferometer of two systems with primary spherical aberration: (a) 4λ of fourth-power aberration at the spread-fringe focal setting; (b) 8λ of fourth-power aberration at the spread-fringe focal setting. (Note changed vertical scale.) The abscissa r in each figure is the polar variable (10), which runs from 0 at the centre of the pupil to 1 at its edge.

Because of the rapid decrease of τ in the range $0 < s < 0.5$, the contour lines corresponding to $\tau = 0.8, 0.5, 0.4, 0.3$ would be inconveniently crowded in figure 2. They are shown in figure 3, which covers the range $0 \leq s \leq 0.16$ on an enlarged horizontal scale. It will be seen from figure 3 that the focal setting for the very low spatial frequency $s = 0.03$ is close to $B = 1.33$. A simple calculation shows that $B = -1.33$ is the focal setting which minimizes M_{II} , the moment of inertia of the ray-theoretic image.

We next consider the size of the maximized spread fringe of the system under autocollimation test in an interferometer, and the spacing of the surrounding border fringes. The function $\Phi = \phi/\lambda$, which measures ϕ in wavelengths, has a vanishing radial derivative $d\Phi/dr$ when $r = 0$ or $\sqrt{(-\frac{1}{2}B)}$, and the value of Φ at the latter point is $-\frac{1}{4}AB^2$. The radius of the spread fringe is greatest when the focal setting B is chosen so that this minimum value is $-\frac{1}{4}$; that is, when $B = -1/\sqrt{A}$. In our main example, $A = 8$ and a spread-fringe image is obtained by focusing at $B = -0.35$. The positions of the edge of the spread fringe and of the border fringes, under autocollimation test in the interferometer, are indicated in figure 4(b). In a system with $A = 4$, the spread-fringe image would be obtained by focusing at $B = -0.5$; figure 4(a) shows the interferometer fringes in this case.

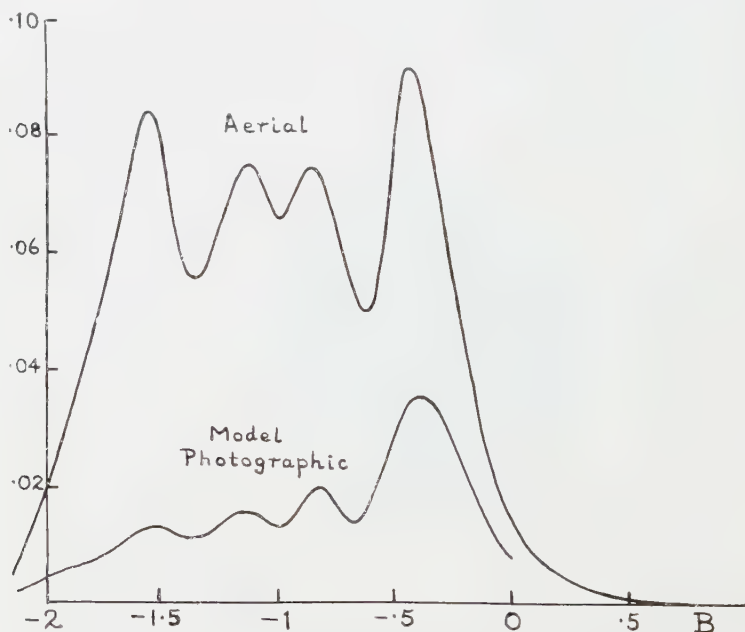


Figure 5. Strehl definition and photographic Strehl definition, of an image with eight fringes of primary spherical aberration. The upper curve shows the variation of the Strehl definition with the focal setting parameter B . $B = 0$ at the paraxial focus; $B = -2$ at the marginal focus. The lower curve shows the correspondence variation of the photographic Strehl definition V_1 (equation (11)) in an $F/8$ system working with model emulsion 10.

From the appearance of the fringe patterns we infer that the image is of the core-and-halo type in both these cases. Light from the region filled by the spread fringe, in most of which Φ is varying slowly, contributes heavily to the

core, while light from the border region contributes to the halo. (Of course there is here no question of a strict separation of the two contributions.)

The upper curve in figure 5 shows the Strehl definition V , for the system with $A=8$, at different focal settings B . The Strehl definition is greatest at the focal setting $B=-0.43$, which is near to the spread-fringe setting, but it will be seen that the curve has a second maximum, not much smaller than the first, at $B=-1.56$, and a third, somewhat smaller again and itself a split peak, near $B=-1$. The existence of several focal settings of high Strehl definition in systems with heavy spherical aberration has long been recognized, and they have been discussed by many writers, in particular by Kingslake [7], Kuwabara [8], Kämmerer [9], Conrady [14] and Flüge [15].

The existence of two nearly equal maxima of the Strehl definition curve in the present example does not mean that there are two focal settings giving images of nearly equal practical value; for, as we shall see, the image at $B=-1.56$ is of an inferior structure, somewhat resembling an axicon image. It means, as Kuwabara pointed out, that the value of the Strehl definition is not always a sufficient indication of the performance of an optical system.

More detailed information about the image structure at different focal settings is obtainable from figures 2 and 3, or from the computed values of τ on which these are based. Some of this information is displayed in figure 6, which shows the value of $\tau(s)$ at the focal settings $B=-0.35$ (spread-fringe focus; curve 1), $B=-0.43$ (greatest Strehl definition; curve 2) and $B=-0.5$ (curve 3). Part of the contrast transmission curve at the focal setting $B=-1.56$ (second Strehl maximum; curve 5) is also shown. Curve 1(a) reproduces the low-frequency part of curve 1 with the horizontal scale enlarged 8-fold. The steeply falling parts of curves 1 and 2 in the range $0 < s < 0.04$ are omitted to avoid confusion with curve 3.

In the same figure, curve 4 gives the values of $\tau(s)$ at the spread-fringe focus of a system with $A=4$, $B=-0.5$. Its main features can be seen to resemble those of curve 1.

In curve 4(a) is shown the renormalized ct-function of the system with $A=4$, working at the same focal setting $B=-0.5$ as before but stopped down to the edge of the spread-fringe area. The renormalization consists in multiplying by $|\mathcal{G}|/|\mathcal{A}|$, the ratio of spread-fringe area to area of the full aperture. Because curves 4 and 4(a) are fairly close together for $s > 0.07$, it would not seem unreasonable to interpret curve 4(a) as representing, in some sense, the core-contribution to the full contrast transmission (curve 4). A similar interpretation is plausible, for a similar reason, in the spread-fringe images with $A=6$ and $B=8$. A precisely defined, approximate representation of a spread-fringe image as the sum of two components, analogous to Miyamoto's representation (1), (2), could be set up on this basis, by using the diffraction image formed by the spread fringe \mathcal{G} to represent the core and the ray-theoretic intensity contribution from the border region \mathcal{H} (see figure 1) to represent the halo. But since the discussions in the present paper are not restricted to spread-fringe images, we shall not make use of this approximate representation.

The sudden peak near the origin of the ct-functions shown in curves 1, 2, 3, 4, 5 of figure 6 can be recognized as due to the presence of an extended faint halo in these images, and the behaviour of these curves elsewhere as indicating the properties of the core. This vague statement could be made more precise by

introducing a precise conventional separation of the image into core and fringe, but for present purposes nothing would be gained.



Figure 6. Contrast transmission properties of images with primary spherical aberration.

Curve 1: Spread-fringe image; $A=8$, $B=-0.35$.

Curve 1(a): Upper part of curve 1 with horizontal scale increased $\times 8$;

Curve 2: Image at focus of maximum Strehl Definition; $A=8$, $B=-0.43$;

Curve 3: Image at preselected focus; $A=8$, $B=-0.5$;

Curve 4: Spread-fringe image; $A=4$, $B=-0.5$;

Curve 4(a): Spread-fringe contribution to total contrast transmission in the image $A=4$, $B=-0.5$ (curve 4);

Curve 5: Image at focus of second-greatest Strehl definition; $A=8$, $B=-1.56$.

A is the number of wave-length of fourth-power aberration; B specifies the focal setting in accordance with equation (9) (see text).

From figure 6 we see clearly that the value of the second derivative of $\tau(s)$ at the origin in curves 1, 2, 3, 5 tells us nothing about the general form of the τ -curve in the range $0.04 < s < 2.0$. That is to say, M_{II} tells us only about the contrast-transmission at very low spatial frequencies. Broadly speaking, it gives information about the halo, not about the core. The Strehl definition, on

the other hand, is determined within quite narrow limits by the values of outside the range covered by the narrow peak.

Figure 7 illustrates the last point. The upper curve shows values of the product $2s\tau(s)$ in the image $A=8$, $B=-0.5$, chosen as being of less special type than the nearby spread-fringe image $A=8$, $B=-0.35$ †. By (7), the area under the curve in any range of spatial frequencies represents the total contribution from those frequencies to the Strehl definition V .

The form of the upper curve shows that the total contribution to V from the spatial frequencies $s < 0.04$ is only a few per cent of the whole, and the contribution from the extruded part of the narrow peak (which we can think of in a rough descriptive way as the 'halo' contribution) is represented only by a slight upward swerve in the corresponding part of the upper curve of figure 7, the effect of which is more or less negligible. Broadly speaking, V gives information about the core, not about the halo. The lower curve in figure 7 shows, in a typical special case (see figure caption), that the same broad conclusion is true of V_1 , the photographic Strehl definition defined in the next section.

In this connection it is interesting to note that in aerial images with large aberration a relatively small variation of focal setting, which does not much alter the general size or the central brightness of the image core, can produce changes in the light distribution within the core which markedly affect the contrast transmission. Curves 1, 2 and 3 in figure 7 provide an example. The same is true in photographic images, though the importance of the effect may sometimes be much reduced by photographic image spread. It appears that the focal adjustment of a monochromat may be fairly critical even when the system has large spherical aberration.

4. PHOTOGRAPHIC IMAGE EVALUATION

Because it provides no means of taking quantitative account of the effects of photographic image spread, the Strehl definition V is not a satisfactory basis for the quality evaluation of most camera lenses. It can, however, be modified in a way which largely removes this defect [5]; the modification consists in replacing $\tau(u, v)$ in (4) by the product $\tau\tau_1$, where $\tau_1(u, v)$ is the low-contrast acceptance factor of the photographic emulsion [10]. We call the modified evaluation the *photographic Strehl definition*, and denote it by V_1 . Corresponding to (5.7) we have, for photographic images with radially symmetrical aberrations, the equation

$$V_1 = 2 \int_0^2 \tau(s) \tau_1(s) s \, ds, \quad (11)$$

where s denotes as before the reduced line-frequency $\lambda\omega \operatorname{cosec} \alpha$ and $\tau_1(s)$ means the physical quantity τ_1 considered as a function of s . Because $s = 2\omega F\lambda$, the value of $\tau_1(s)$ which corresponds to a given value of s depends on the focal ratio F .

Figure 8 shows the values of τ_1 , plotted against spatial frequency, for the model emulsion 10 used by Black and Linfoot [16]. In the same figure are shown, for comparison, the approximate values of τ_1 near $\lambda = 5500$ for two well known emulsions (Tri-X and Pan X) with specified development. The

† By doubling the numerical values of all ordinates in figure 4(a), we see that the region where $|\phi + 4\lambda| < \frac{1}{8}\lambda$ consists, in the case $A=8$, $B=-0.5$, of a circular disc surrounded by a concentric annulus; that is to say, the spread fringe has disintegrated.

approximate ('idealized') curves for Tri-X and Pan X were derived from measured τ_1 -curves kindly supplied by R. L. Lamberts [11]; figure 5; these have been made parabolic in form over the very low spatial frequencies and the normalization readjusted to give τ_1 the value 1 at zero spatial frequency.

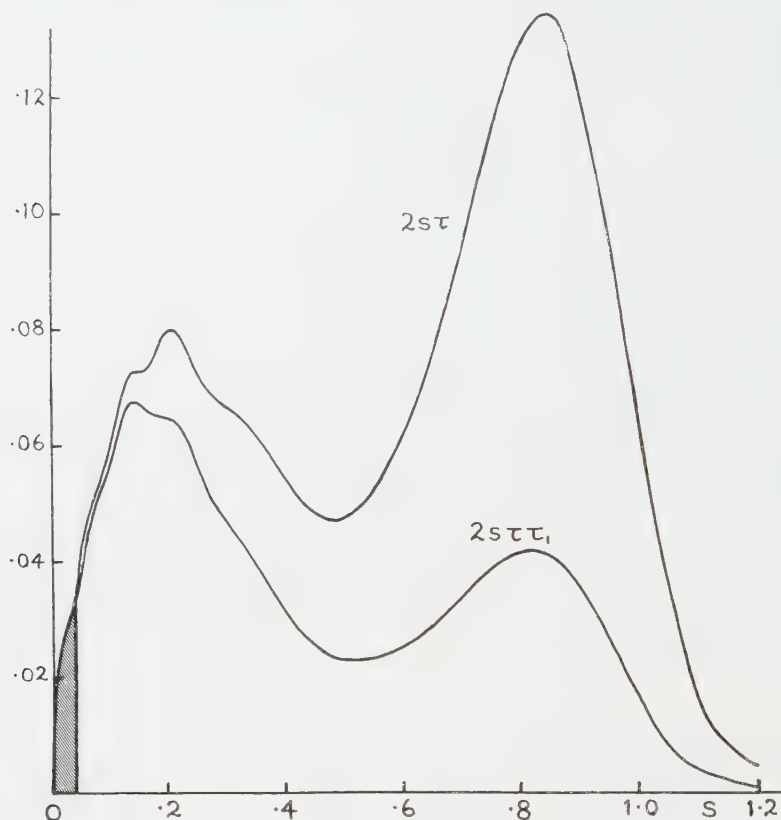


Figure 7. Relative contributions from the different line frequencies in the range $0 < s < 1.2$ to the Strehl definition (upper curve) and to the photographic Strehl definition (lower curve) of a system with aberration function $\phi(r) = 8\lambda r^4 - 4\lambda r^2$. The lower curve relates to an $F/8$ system used at $\lambda = 5500$ with 'idealized' Pan X emulsion and D-19 developer (3 min), the acceptance factor being taken as given by the upper curve in figure 8. The shaded area under each curve measures the contribution from those spatial frequencies in which the halo contributes substantially to the contrast transmission.

The lower curve in figure 5 shows the effect of photographic spread on the Strehl definition of the system with $A = 8$, working with model emulsion 10 at the focal ratio $F/8$. Instead of the three focal settings of high Strehl definition in the aerial image (seen in the upper curve), we have in the model photographic image just one, close to the original V -maximum at $B = -0.43$.

It is easy to understand, from figure 2 and from curve 5 of figure 6, the disappearance of the second V -maximum at $B = -1.56$. From figure 2 it appears that at this focal setting a major contribution to V comes from the weak maximum of $\tau(s)$ near $s = 1.6$, which gives rise to a relatively strong maximum of $s\tau$ near $s = 1.7$. But near this line-frequency $\tau_1(s)$ is practically zero. In fact, the

contributions to V_1 are mainly from frequencies $s < 1.2$ and (see curves 2 and 5 of figure 6) these contributions are much smaller at $B = -1.56$ than at $B = -0.43$.

In terms of image-intensity distributions, the situation may be described by saying that at the focal setting $B = -1.56$ the halo is folded across the centre of the image from all sides, and in this way contributes to the image core a central bright spot which does not contain very much light, but which has a high central intensity because it is extremely small. In the photographic image this bright spot becomes more spread out, and since it does not contain very much light it now contributes little to the central intensity.

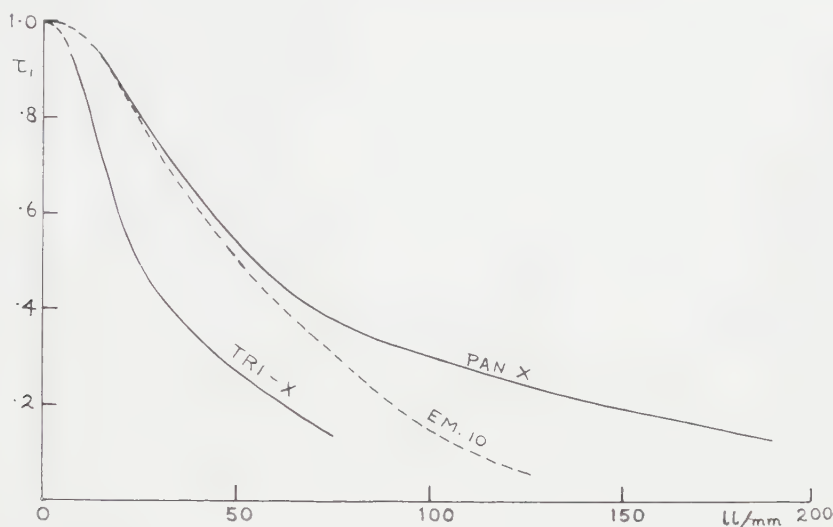


Figure 8. Acceptance factors τ_1 of model emulsion 10 and 'idealized' acceptance factors of two Kodak emulsions near $\lambda = 5500$, based on measurements by R. L. Lamberts (see text). The developments in the last two cases were: Tri-X, DK-50, 5 min; Panatomic-X, D-19, 3 min, and the exposures were made behind a Kodak Wratten No. 61 Filter.

Kuwabara [8], (p. 629) has remarked on the difficulty of detecting the second-best focus photoelectrically or visually when A is large, and drawn the conclusion that the performance of a system cannot be sufficiently well represented by the Strehl definition V of the aerial image. The above computational results confirm this conclusion. They indicate, so far as they go, that a more satisfactory quality evaluation of the performance of camera lenses forming point-images with compact bright cores and faint extended halos is provided by the photographic Strehl definition V_1 .

5. ACKNOWLEDGMENTS

My grateful thanks are due to the Cambridge Mathematical Laboratory, and in particular to Mr. P. Swinnerton-Dyer, who carried out on EDSAC II the heavy computations on which figures 2, 3, 5, 6 and 7 are based, to Miss C. P. Wilks for auxiliary computations and for help with the diagrams, and to Mr. R. L. Lamberts of the Eastman Kodak company for communicating his measured τ_1 -curves in advance of publication.

A l'aide de la théorie de la transmission des contrastes, une discussion est donnée des mérites relatifs du moment d'inertie de l'image géométrique, du critère de Strehl et du critère de Strehl photographique comme modes d'évaluation de la qualité des chambres astrographiques et des objectifs photographiques produisant des images ayant la structure bien connue formée d'un corps central avec un halo. Le critère de qualité interférométrique de Coleman *et al.* [1] est également considéré.

La discussion générale est complétée dans les §§ 3 et 4 par un examen détaillé des effets de l'application des 2e et 3e modes d'évaluation à un système entaché d'aberration sphérique. On en conclut que, lorsqu'un système entaché d'aberration sphérique du 3e ordre forme des images ayant une structure 'noyau central + halo', la qualité de l'image au voisinage du meilleur foyer dépend d'une façon critique des propriétés du noyau central de l'image, où les effets de diffraction peuvent être dominants même quand les aberrations totales de l'onde sont grandes, et on en déduit que dans l'évaluation des performances d'un système photographique formant des images du type noyau + halo le 'critère de Strehl photographique' doit être beaucoup plus satisfaisant que le critère de Strehl classique ou que le moment d'inertie de l'image géométrique. Il semble, d'autre part, que l'emploi du moment d'inertie de l'image géométrique est un procédé satisfaisant pour l'évaluation des performances des chambres astrographiques.

Mit Hilfe der Kontrastübertragungstheorie werden die jeweiligen Vorzüge verglichen des strahlentheoretischen Gaussmoments, der Strehl'schen Definitionshelligkeit und der sogenannten photographischen Definitionshelligkeit als Gütemass von astrographischen Kameras und von Objektiven, die Punktbilder in der üblichen Kern- und Hofstruktur erzeugen. Hierbei wird auch die 'Interferometerqualität' nach Coleman *et al.* [1] betrachtet.

Im Abschnitt 3 und 4 wird die allgemeine Betrachtung ergänzt durch eine ziemlich ausführliche Untersuchung der Eigenschaften obiger zweiter und dritter Auswertung in Bezug auf ein System mit primärer sphärischer Aberration. Man kann daraus entnehmen, dass, wenn ein System mit primärer sphärischer Aberration ein Punktbild mit Kern- und Hofstruktur entwirft, die Bildqualität in der Nähe der besten Einstellung sehr empfindlich von den Eigenschaften des Bildkernes abhängt, in dem die Beugungseffekte vorherrschend sein können, auch wenn die gesamten Wellenaberrationen gross sind. Bei der Beurteilung der Güte eines photographischen Systems, das Punktbilder mit Kern und Hof erzeugt, müsste die photographische Definitionshelligkeit als Qualitätsmass viel befriedigender sein als die klassische Definitionshelligkeit oder als das strahlentheoretische Gaussmoment. Für die Gütebewertung astrographischer Kameras scheint andererseits die Verwendung des strahlentheoretischen Gaussmoments praktisch berechtigt zu sein.

REFERENCES

- [1] COLEMAN, H. S., CLARK, D. C., and COLEMAN, M. F., 1947, *J. opt. Soc. Amer.*, **37**, 671.
- [2] LOHMANN, A., 1957, *Optik*, **14**, 510.
- [3] LUKOSZ, W., 1957, *Optik*, **14**, 490; 1958, Thesis, Brunswick.
- [4] MIYAMOTO, K., 1957, *J. opt. Soc. Amer.*, **47**, 774.
- [5] LINFOOT, E. H., 1958, *Opt. Acta*, **5**, 1.
- [6] GOODBODY, A. M., 1958, *Proc. phys. Soc. Lond.*, **72**, 333.
- [7] KINGSLAKE, R., 1954, *NBS Circular* 526, 259.
- [8] KUWABARA, C., 1955, *J. opt. Soc. Amer.*, **45**, 309, 625.
- [9] KÄMMERER, J., 1957, *Optik*, **14**, 399.
- [10] LINFOOT, E. H., 1955, *Contribution to Vistas in Astronomy*, **1**, 351, Ed. A. Beer (London: Pergamon Press).
- [11] LAMBERTS, R. L., 1959, *J. opt. Soc. Amer.*, **49**, 425.
- [12] LUCY, F. A., 1956, *J. opt. Soc. Amer.*, **46**, 699.
- [13] MIYAMOTO, K., 1959, *J. opt. Soc. Amer.*, **49**, 35.
- [14] CONRADY, H. G., 1926, *Photogr. J.*, **66**, 9; 1926, *Proc. Opt. Conv.*, 830.
- [15] FLÜGGE, J., 1925, *Z. InstrumKde*, **46**, 333, 389.
- [16] BLACK, G., and LINFOOT, E. H., 1957, *Proc. roy. Soc. A*, **239**, 522.
- [17] LINFOOT, E. H., 1959, *Opt. Acta*, **6**, 387.

Nouveaux dispositifs de spectroscopie à grande luminosité

par A. GIRARD

Office National d'Etudes et Recherches Aéronautiques, Chatillon s/Bagneux,
Seine, France

(Received 2 October 1959)

Les trois dispositifs décrits ici permettent, lorsque le bruit de photons n'est pas prépondérant, d'effectuer une analyse spectrale avec une luminosité très supérieure à celle d'un spectromètre à fentes.

Le premier dispositif est un interféromètre à polarisation adapté à la spectroscopie par la méthode de la transformée de Fourier. Il est très lumineux et d'un emploi commode mais ne permet pas d'atteindre un pouvoir de résolution très élevé.

Avec les deux autres dispositifs, le spectre est obtenu directement, sans calcul a posteriori. D'autre part, la disposition générale des appareils à fentes est conservée.

L'idée commune aux deux dispositifs est de remplacer les fentes d'entrée et de sortie par deux systèmes, images l'un de l'autre à travers l'appareil, constitués de fentes multiples, de largeurs inégales et séparées par des intervalles inégaux. L'élément spectral privilégié qui fournit de l'organe d'entrée une image superposée à l'organe de sortie est 'filtré' par l'organe de sortie, grâce à une propriété particulière qui le rend identifiable. L'un des dispositifs (spectromètre à compensateurs) réalise une modulation sélective de cet élément spectral. Dans l'autre dispositif (spectromètre à grilles) le signal correspondant à cet élément spectral est donné par la différence des flux transmis et réfléchi par l'organe de sortie.

Les principes de ces trois dispositifs ont été vérifiés expérimentalement.

1. INTRODUCTION

La notion de luminosité en spectroscopie permet d'ordonner plusieurs appareils d'après la précision avec laquelle le spectre est obtenu; cette précision est généralement exprimée par le rapport signal/bruit. Pour que ce classement ait un sens, il est nécessaire que les mesures soient effectuées pour les mêmes valeurs des deux autres paramètres essentiels:

—le pouvoir de résolution;

—la 'rapidité' de la mesure exprimée, par exemple, par la constante de temps de l'ensemble de la chaîne de mesure. Cette notion de rapidité est particulièrement importante dans le cas de l'étude de phénomènes évolutifs.

Ces différents paramètres peuvent être reliés entre eux et permettent de définir un facteur de mérite [1]. A ces paramètres principaux peuvent s'ajouter de nombreux autres (commodité d'emploi, prix de revient . . .), non fondamentaux, mais qui expliquent cependant, au moins en partie, le succès durable des appareils classiques à fentes.

Les dispositifs décrits ci-dessous tendent à obtenir une luminosité très supérieure à celle des spectromètres à fentes, par des moyens tels que l'introduction de ces paramètres secondaires dans un facteur de mérite ne les désavantagerait pas.

Toutefois, pour que ce gain de luminosité soit réel, il est nécessaire que le bruit de fond limitant les performances de l'appareil soit dû au récepteur lui-même et non aux fluctuations aléatoires du flux lumineux (bruit de photons). Cette condition est pratiquement toujours réalisée dans l'infra-rouge et c'est dans ce domaine que les dispositifs décrits semblent avoir le maximum d'intérêt.

2. INTERFEROMETRE A POLARISATION ADAPTE A LA SPECTROSCOPIE PAR LA METHODE DE LA TRANSFORMEE DE FOURIER

L'étude théorique du principe et des limites de cette méthode spectroscopique a été faite par J. Connes [2]. Nous n'y reviendrons que pour en appliquer les conclusions au montage décrit ci-dessous.

2.1. Principe de montage

L'interféromètre à polarisation réalisé par Mertz [3] pour la spectroscopie stellaire est adapté à l'étude de sources ponctuelles. Nous nous placerons ici dans le cas le plus général d'une source étendue; il est alors très avantageux d'utiliser la propriété d'autocompensation du système biréfringent de Wollaston traversé deux fois. Cette propriété a été mise en évidence par F. et L. Lenouvel [4].

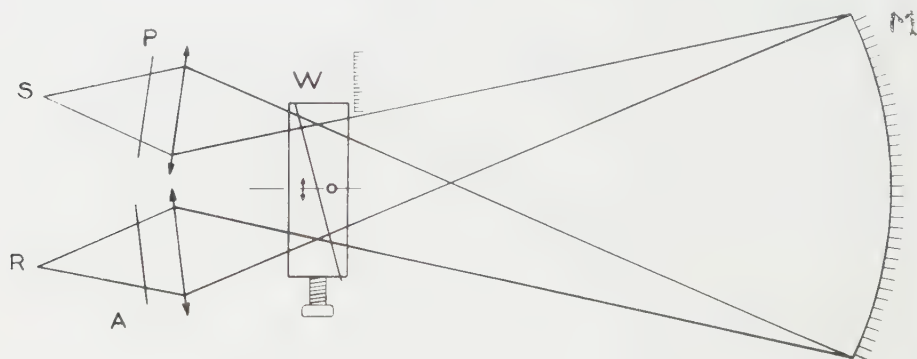


Figure 1.

Le schéma optique de l'interféromètre est voisin du schéma de l'appareil de spectroscopie interférentielle construit à l'Onera [5]. Un biprisme biréfringent W est placé au centre de courbure d'un miroir sphérique M entre analyseur et polariseurs parallèles (figure 1). Ce biprisme est constitué par deux coins d'un cristal biréfringent d'axes croisés. Une vibration lumineuse incidente est dédoublée par le biprisme en 2 vibrations polarisées à angle droit et déphasées l'une par rapport à l'autre. Pour que ces deux vibrations aient la même amplitude, l'axe du polariseur doit être à 45° des lignes neutres du compensateur. La différence de marche résultante entre les 2 faisceaux de retour après deuxième traversée du biprisme est nulle si les rayons moyens incident et réfléchi I et R (figure 2) sont symétriques par rapport à l'axe du compensateur où les 2 prismes ont la même épaisseur. Une translation D à partir de cette position initiale introduit entre les deux faisceaux une différence de marche

$$\Delta = 4D \operatorname{tg} \alpha \delta n; \quad (1)$$

δn = biréfringence du cristal, α = angle du biprisme. Application numérique

$$\alpha = 10^\circ, \quad \text{quartz } \delta n = 0,009, \quad \Delta = 0,0061D.$$

$$\text{spath } \delta n = 0,17, \quad \Delta = 0,116D.$$

En mesurant avec précision la translation D du biprisme, il est possible de construire la courbe expérimentale $W(\Delta)$ du signal de sortie de l'interféromètre. Il est à noter que la détermination de Δ est ainsi ramenée à une mesure qui peut être effectuée par des moyens mécaniques simples. En effet, pour que Δ soit déterminé avec la précision λ/m , il suffit de ne pas commettre sur la mesure de D une erreur supérieure à $\lambda/4m \operatorname{tg} \alpha \delta n$, terme toujours beaucoup plus grand que λ/m .

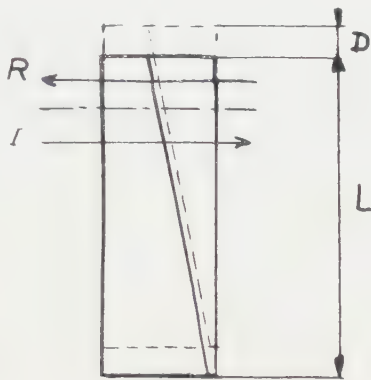


Figure 2.

L'interférogramme $W(\Delta)$ est la transformée de Fourier du spectre de la source $I(\sigma)$. Le calcul de $I(\sigma)$ peut s'effectuer à partir de $W(\Delta)$ par la transformation inverse. Cette opération est faite a posteriori, à l'aide d'une machine à calculer électronique.

2.2. Etendue du faisceau

La luminosité est caractérisée par le flux lumineux incident qui est lui-même proportionnel à la quantité: $U = S\Omega$, U = étendue du faisceau, S = section du faisceau incident dans le plan du biprisme, Ω = angle solide du faisceau qui traverse le biprisme.

Grâce à la propriété d'autocompensation du biprisme de Wollaston, il est possible d'utiliser une source large. La forme la plus rationnelle à donner à l'image de la source dans le plan du biprisme est un rectangle dont la longueur est celle du biprisme dans le plan perpendiculaire au plan de symétrie du montage et dont la largeur l est limitée par l'amplitude maximum D_0 de la translation à donner au biprisme (cf. 2.3.).

L'angle solide peut être considérable (angle de champ $> 20^\circ$) à condition d'utiliser un des procédés indiqués par MM. Françon et Sergent [6] pour constituer des compensateurs à grand champ. Un angle de champ de 6° est utilisable avec un compensateur ordinaire.

2.3. Pouvoir séparateur

Le pouvoir séparateur théorique a pour valeur $\Delta_0\sigma$, où Δ_0 est la différence de marche maximum entre les 2 faisceaux. Théoriquement, il est donc possible d'atteindre un pouvoir séparateur aussi élevé qu'on le désire en enregistrant l'interférogramme sur un large intervalle de différence de marche. En fait, le pouvoir séparateur accessible au moyen de cet interféromètre est limité par les dimensions des biprismes biréfringents. Etant donné les dimensions maximums des pièces pratiquement réalisables, il semble très difficile de dépasser pour Δ_0 la valeur de 1 mm (voir formule (1)), ce qui correspond à un pouvoir séparateur théorique de 2000 dans le visible. La translation maximum D_0 est au plus égale à $L - 2l$. On voit donc qu'en élargissant l'étendue du faisceau on diminue D_0 et par conséquent le pouvoir séparateur accessible. Le pouvoir séparateur maximum est obtenu lorsque la translation D_0 correspond à l'intervalle de différence de marche $(0, \Delta_0)$. Pour que la différence de marche nulle soit réalisée à l'une des extrémités de la translation, il suffit d'utiliser un biprisme d'une forme légèrement différente de la forme habituelle du biprisme de Wollaston (figure 2). Les 2 coins ont des épaisseurs moyennes inégales de sorte que la zone de différence de marche nulle est excentrée d'une quantité légèrement inférieure à $(L/2) - l$.

2.4. Résultats expérimentaux

La courbe figure 3 donne le début d'un interférogramme relevé en utilisant comme source une lampe à vapeur de mercure et comme récepteur un détecteur pneumatique de rayonnement étudié et construit à l'Onera, dont la courbe de

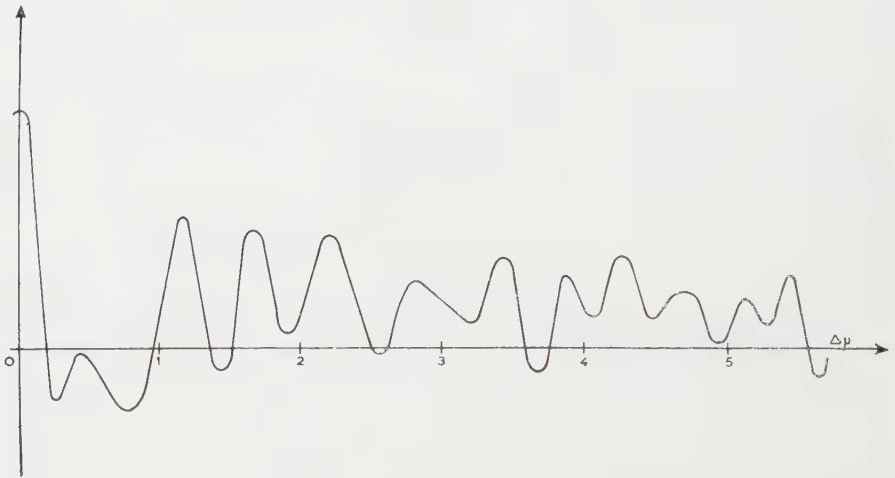


Figure 3.

réponse spectrale, plate au-delà de 2μ , couvre l'ensemble du spectre y compris l'ultra-violet. L'ensemble du spectre de mercure, dans les limites de transparence du verre, a donc été enregistré. Les polariseurs étaient des Glaze brooks. Le calcul de la répartition spectrale a été effectué par le Groupe de calcul mécanique de l'Onera sur une machine Bull à tambour magnétique, à partir d'un interférogramme défini par 320 points sur l'intervalle $(0-0,02 \text{ mm})$. La figure 4 donne le spectre calculé dans la région jaune-vert du spectre. La figure 5 donne le

spectre obtenu par le calcul dans la même région à partir du même interférogramme auquel on a fait subir une apodisation linéaire en multipliant toutes les ordonnées $W(\Delta)$ par le facteur $1 - (\Delta / \Delta_0)$. Conformément à la théorie, le pouvoir de résolution baisse, mais les raies parasites dues au pied de la fonction d'appareil ont presque totalement disparu. L'étude du spectre sur un intervalle spectral aussi

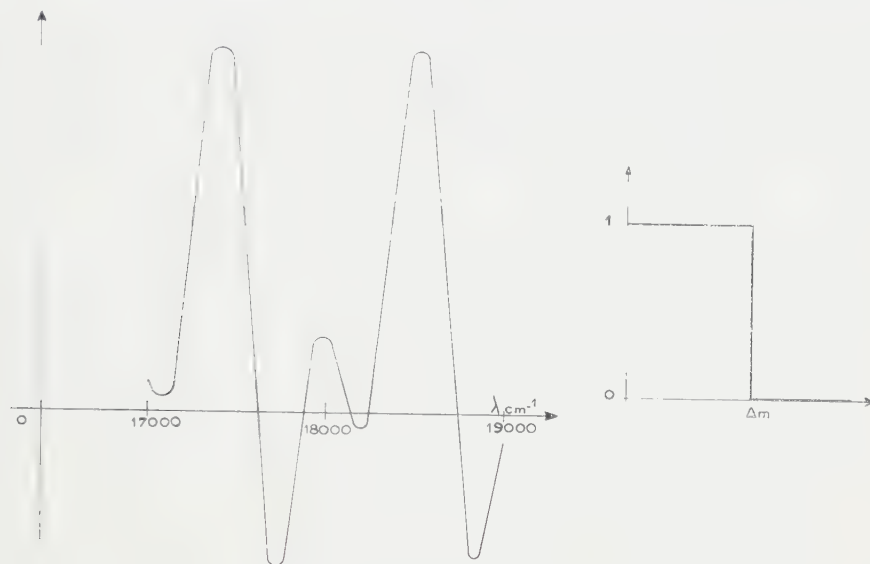


Figure 4.

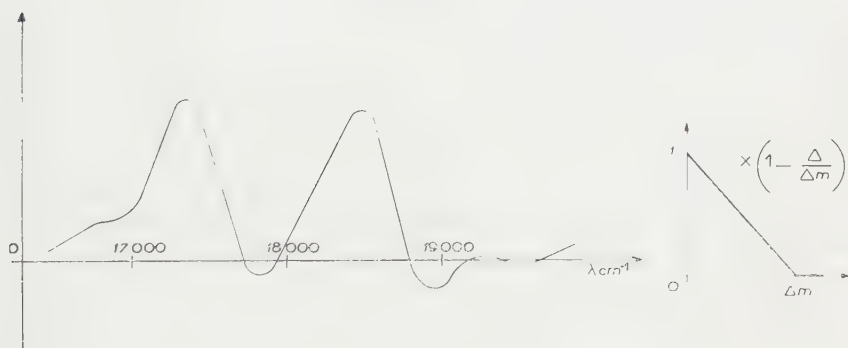


Figure 5.

large présente un inconvénient: la variation de la biréfringence du cristal en fonction de la longueur d'onde fausse légèrement les mesures. En adoptant pour le calcul une valeur moyenne de la biréfringence, il est toutefois possible de rétablir les longueurs d'ondes réelles en appliquant un terme correctif qui fait intervenir la biréfringence exacte au point spectral considéré.

2.5. Domaine d'utilisation dans l'infra-rouge

L'extension vers les grandes longueurs d'ondes pose le problème de l'emploi de polariseurs et de matières biréfringentes dans l'infra-rouge.

Différents types de polariseurs ont été étudiés dans l'infra-rouge [10]. Le procédé de polarisation par films de selenium déposés sous vide est particulièrement efficace dans un intervalle spectral très large. Le principal défaut de ces

polariseurs est leur fragilité. Des polariseurs de ce type sont actuellement construits de façon courante à l'Onera, en 300 mm² de section. La réalisation de films de plus grandes dimensions, permettant d'atteindre des sections au moins égales à 700 mm², est à l'étude.

Les cristaux biréfringents et transparents dans l'infra-rouge moyen sont rares. Il est difficile d'utiliser le spath au-delà de 2,5 μ et le quartz au-delà de 3 μ . Le rutile (TiO₂) est très fortement biréfringent et peut être utilisé jusqu'à 5 μ . Le saphir est utilisable jusqu'à 6 μ , mais sa biréfringence, faible dans le visible, n'a pas été mesurée dans l'infra-rouge. Enfin, le soufre présente une forte biréfringence et un domaine de transparence très large; la fabrication et la taille de monocristaux de soufre de grandes dimensions ne semblent pas irréalisables.

3. SPECTROMETRES MULTIFENTES A PAS VARIABLE†

Les dispositifs dont il sera question maintenant se rapprochent beaucoup plus des appareils classiques. Le spectre est obtenu par enregistrement direct, sans calcul a posteriori.

La luminosité relativement faible des spectromètres à fentes tient au mode d'identification de l'élément spectral étudié qui est isolé dans l'espace au moyen de fentes d'autant plus fines qu'on désire un pouvoir de résolution élevé. Or, comme une étude récente l'a prouvé [7] d'autres moyens que l'isolement spatial peuvent être utilisés pour marquer de façon reconnaissable un élément spectral du flux composite qui parvient alors au détecteur.

En abandonnant délibérément l'idée d'une limitation spatiale exclusive pour chaque élément spectral, il est possible d'augmenter énormément la luminosité des spectromètres classiques, en conservant leur disposition générale et sans modifier profondément la technique d'emploi de ces appareils. Ce résultat est obtenu en utilisant un mode d'identification de chaque élément spectral conciliable avec une superposition partielle des images monochromatiques du dispositif d'entrée remplaçant la fente.

Deux dispositifs dont les principes ont été vérifiés expérimentalement sont décrits ici. L'idée commune essentielle est de remplacer les fentes d'entrée et de sortie par deux systèmes, images l'un de l'autre à travers l'appareil, constitués de fentes multiples, de largeurs inégales et séparées par des intervalles inégaux. Pour chaque position du système dispersif, il existe un élément spectral qui fournit de l'organe d'entrée une image monochromatique superposée à l'organe de sortie. Cette radiation privilégiée (appelée dans la suite du texte longueur d'onde de réglage) est 'filtrée' par l'organe de sortie, grâce à une propriété particulière qui la rend identifiable.

Dans le premier dispositif décrit, le mode de sélection de l'élément spectral est, comme dans le 'Sisam' de P. Connes [7], son amplitude de modulation. Le dispositif réalise une modulation sélective d'un élément spectral. Les systèmes multifentes d'entrée et de sortie sont constitués par les franges d'interférence localisées sur des compensateurs biréfringents.

Les fentes du second dispositif sont matérialisées comme dans le dispositif multifentes de Golay [8], mais le système de fentes est constitué différemment. Le signal correspondant à l'élément spectral étudié est la différence des énergies transportées par les faisceaux transmis et réfléchis par l'organe de sortie.

† Le texte qui suit correspond à une communication présentée à la 5^e Réunion de la Commission Internationale d'Optique, à Stockholm, 1959.

3.1. Spectromètre à compensateurs

3.1.1. Principe du montage

Le schéma optique (figure 6) est celui d'un spectromètre classique, à prisme ou à réseau, dans lequel les fentes ont été remplacées par des systèmes biréfringents L_1 et L_2 . La forme et les dimensions optima de L_1 et L_2 sont discutées en 3.1.4. Dans les deux dispositifs réalisés, ils sont constitués par deux lentilles dont les faces extrêmes sont planes et la face de collage sphérique. Les deux lentilles sont taillées parallèlement à l'axe dans un cristal uniaxe et leurs axes sont croisés. Les deux compensateurs sont identiques et placés à 90° l'un de l'autre, c'est-à-dire que l'axe de la lentille convexe de l'un est parallèle à l'axe de la lentille concave de l'autre.

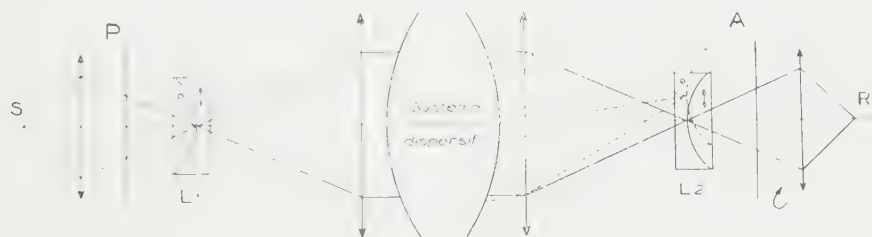


Figure 6.

L'ensemble est placé entre analyseur et polariseur. Pour que les deux vibrations produites par le premier compensateur aient la même amplitude il faut, comme dans le montage précédent, que la direction de polarisation soit à 45° des lignes neutres des compensateurs.

On supposera dans ce qui suit que le système dispersif fonctionne sans anamorphose, c'est-à-dire en montage Littrow ou au minimum de déviation. Dans un tel système, l'image de L_1 sera rigoureusement confondue avec L_2 pour une radiation de longueur d'onde λ . Pour cette radiation, le compensateur de sortie L_2 introduit, pour tous les points de L_2 , un déphasage égal et de signe contraire au déphasage introduit par L_1 . La différence de marche est donc nulle et on observe une teinte plate après l'analyseur sur toute la surface du compensateur. Il est alors possible de moduler, théoriquement à 100 pour cent, la lumière émergente pour cette radiation, par simple rotation de l'analyseur. Par contre, pour une radiation voisine $\lambda + d\lambda$, l'image de L_1 se trouve décalée par rapport à L_2 d'une quantité ϵ . Il en résulte un champ non uniforme à la sortie de l'analyseur et par conséquent une baisse du taux de la modulation obtenue par rotation de l'analyseur: le signal passe par un minimum nul lorsque la différence de marche résultante varie de $\lambda/2$ du centre au bord du compensateur†. Si l'analyseur tourne à la fréquence de N tours/s, il suffit alors d'utiliser un amplificateur accordé sur la fréquence $2N$ pour isoler un élément spectral étroit autour de la longueur d'onde λ . La vérification expérimentale du principe de ce montage a été faite en modifiant un spectromètre à prisme existant. La figure 9 est l'enregistrement

† $\lambda/2$ est une valeur approchée. Pour être rigoureux, il faut tenir compte de la forme du compensateur et faire l'intégrale du flux émergent réparti sur la surface du compensateur (voir 3.1.2).

des raies jaunes du mercure sur cet appareil avec des compensateurs en quartz. La largeur de fente équivalente est de 0,05 mm. Le gain de luminosité est de 40.

3.1.2. Pouvoir séparateur

La différence de marche entre le point d'abscisse x et le centre du compensateur (figure 7) est

$$\Delta = \frac{x^2}{R} \delta n; \quad (2)$$

R = rayon de courbure de la face de collage; δn = biréfringence du cristal.

Les franges localisées qu'on observe sur le compensateur entre polariseur et analyseur croisés se resserrent du centre au bord. L'interfrange i est donnée par la relation :

$$i = \frac{\lambda R}{2x \delta n}. \quad (3)$$

Si le compensateur d'entrée L_1 a son image décalée de la quantité ϵ par rapport à L_2 , la différence de marche résultante est :

$$\Delta = \frac{2x\epsilon}{R} \delta n \quad (4)$$

et le déphasage

$$\phi = \frac{2\pi\Delta}{\lambda} = \frac{4\pi x \delta n \epsilon}{R\lambda} = \frac{2\pi\epsilon}{i}.$$

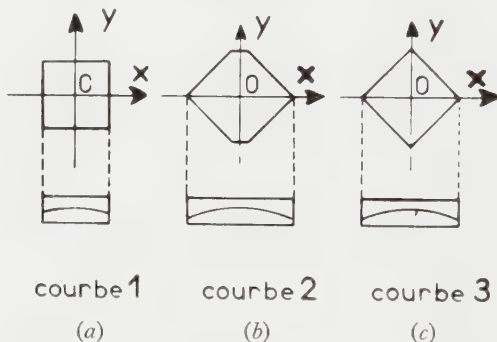


Figure 7.

Au point de déphasage ϕ , la rotation de l'analyseur fait varier l'intensité du phénomène d'interférence suivant la relation :

$$a^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos \phi \cos \omega t);$$

ω = vitesse angulaire de rotation de l'analyseur.

Le signal amplifié par le détecteur est la somme des intensités obtenues en chaque point de la surface du compensateur de sortie. En ne tenant compte que de la partie modulée de cette intensité, on a :

$$I = \int_0^X f(x) \cos \phi dx. \quad (5)$$

$f(x)$ est la 'fonction de contour' du compensateur, proportionnelle pour chaque valeur de x à la hauteur du compensateur suivant l'axe oy . X est la demi-largeur du compensateur, supposé symétrique par rapport à l'axe oy .

Dans le cas le plus simple $f(x) \equiv 1$, (figure 7 (a)) le compensateur est rectangulaire. On obtient :

$$I = I_0 \frac{\sin 2\pi(\epsilon/i_N)}{2\pi(\epsilon/i_N)} \quad (6)$$

avec

$$i_N = \frac{R\lambda}{2X\delta n} \quad (7)$$

interfrange au bord du compensateur.

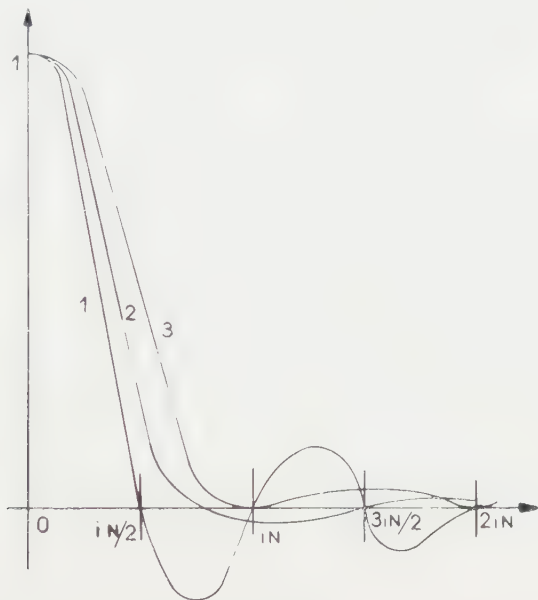


Figure 8.

Cette fonction fait apparaître des maximums secondaires assez importants (figure 8, courbe 1). Toutefois, la position du premier minimum nul, obtenu pour

$$\epsilon = i_N/2$$

montre que le pouvoir séparateur, tel qu'on le définit habituellement, est égal à celui qu'on obtiendrait, toutes choses égales d'ailleurs, avec un appareil classique de largeur de fente égale au demi-interfrange au bord du compensateur.

Si on donne aux compensateurs la forme représentée figure 7 (b) telle qu'on ait :

$$f(x) \equiv 1 \quad \text{de } 0 \text{ à } X/6$$

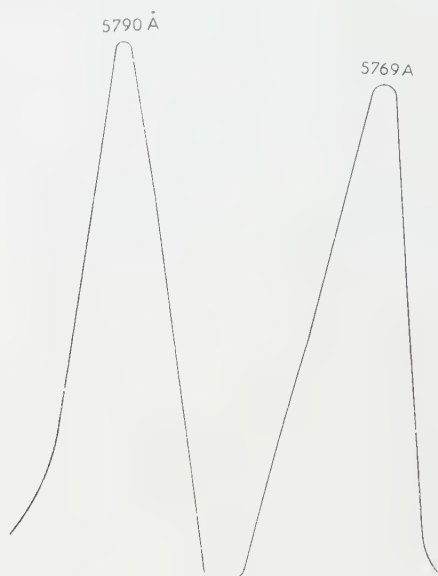
et

$$f(x) = \frac{6}{5}(1 - x/X) \quad \text{de } X/6 \text{ à } X$$

la fonction donnant le signal de sortie en fonction de ϵ devient :

$$I = I_0 \frac{6}{7} \left[\frac{6}{5} \left(\frac{\sin \pi(\epsilon/i_N)}{\pi(\epsilon/i_N)} \right)^2 - \frac{1}{30} \left(\frac{\sin \pi(6\epsilon/i_N)}{\pi(6\epsilon/i_N)} \right)^2 \right]. \quad (8)$$

Le maximum secondaire le plus intense est inférieur à 3 pour cent du maximum central (courbe 2, figure 8).



SPECTROMETRE A PRISME

Compensateurs en quartz \varnothing 13 mm

Rayon de collage 17,5 mm

Largeur de fente équivalente 5/100 mm

Figure 9.

3.1.3. Luminosité

Le gain de luminosité qu'on obtient en remplaçant les fentes d'un spectromètre par des compensateurs de même pouvoir séparateur peut s'écrire :

$$G = \frac{S}{2s} = \frac{S}{2i_N \beta F} ; \quad (9)$$

S = surface du compensateur; s = surface de la fente d'entrée; β = hauteur angulaire de la fente; F = distance focale du collimateur.

Le facteur $\frac{1}{2}$ tient compte de l'élimination de 50 pour cent de la lumière par le polariseur. La surface admissible S est limitée par les deux défauts dûs à l'absence d'axe de symétrie de révolution: l'effet de courbure des raies et la variation du grandissement en fonction de l'angle d'incidence.

On peut montrer [9] que G s'exprime par une relation de la forme :

$$G = \frac{n}{\beta \operatorname{tg} i} . \quad (10)$$

Dans cette formule, i est l'angle d'incidence du faisceau sur le disperser et n un coefficient numérique.

Dans le cas d'un réseau plan par réflexion en montage Littrow, on peut adopter la valeur $n = 1,4$.

Pour changer de pouvoir de résolution en conservant les meilleures conditions de luminosité, il est nécessaire de changer de compensateurs. On pourrait, en effet, diminuer le pouvoir de résolution en diaphragmant les compensateurs, de façon à éliminer la portion de surface où les franges d'interférence sont les plus serrées, mais cette opération entraînerait une perte de lumière lui enlevant tout intérêt pratique.

3.1.4. *Forme de la surface de collage des compensateurs*

Elle doit être telle que la biréfringence de chaque compensateur soit une fonction non linéaire de x . En effet, si cette variation était linéaire, les franges localisées sur un compensateur isolé vu entre polariseur et analyseur seraient équidistantes et la biréfringence résultante observée sur le compensateur de sortie serait la même en tout point du compensateur : ceci serait vrai pour toutes les radiations et la rotation de l'analyseur n'aurait pas pour résultat une modulation sélective. Il faut, au contraire, que la biréfringence résultante soit variable sur la surface du compensateur de sortie, sauf pour la longueur d'onde de réglage, pour laquelle cette biréfringence est nulle en tout point du compensateur de sortie.

Pratiquement, étant données les possibilités d'usinage, la surface de collage ne peut être que sphérique ou cylindrique. Dans ce dernier cas, l'orientation de l'axe optique du cristal par rapport à l'axe du cylindre doit être repérée avec précision avant usinage. La forme cylindrique présente un avantage important : il est possible d'utiliser le système dispersif à un grandissement différent de un en utilisant des compensateurs d'entrée et de sortie homothétiques, à condition que l'axe du cylindre soit perpendiculaire au plan de symétrie du montage. En effet, à cette condition, l'anamorphose n'est pas gênante. A pouvoir séparateur égal, c'est-à-dire avec le même interfrange au bord, les tolérances d'aberration (et par conséquent le gain de luminosité) sont rigoureusement les mêmes qu'avec des compensateurs à face de collage sphérique.

3.1.5. *Influence de la polarisation par le système dispersif*

On sait qu'un faisceau de lumière naturelle est en général partiellement polarisé par le disperseur (prisme ou réseau). Il est nécessaire que ce phénomène n'introduise pas de modulation parasite indépendante de la longueur d'onde. On peut montrer que cette condition est satisfaite si l'axe du polariseur d'entrée est placé parallèlement à l'axe de polarisation du système dispersif. Dans ces conditions, le pouvoir séparateur n'est pas changé : la modulation est sélective pour le même intervalle spectral. Toutefois, la modulation n'est plus réalisée à 100 pour cent ; au flux modulé se superpose un système de franges deux fois plus serrées que les franges localisées observées sur un compensateur seul.

Le taux de modulation est donné par la formule :

$$\frac{I}{I_0} = \left(\frac{1 - \rho}{2} \right)^2 ;$$

I_0 = flux total ; I = flux modulé ; ρ = facteur de dépoléarisation du système dispersif.

L'application de ce dispositif à l'infra-rouge moyen et lointain se heurte aux mêmes difficultés que le montage précédent (voir 2.5). Ces difficultés n'existent pas dans le montage suivant.

3.2. Spectromètre à grille

3.2.1. Principe

La fente d'entrée d'un spectromètre est remplacée par un système de fentes, succession d'espaces transparents et opaques constituant une grille. A la sortie de l'appareil on trouve une grille de sortie, image de la grille d'entrée, dans laquelle les images des parties opaques de la grille d'entrée sont réfléchissantes, alors que les images des parties transparentes de la grille de sortie sont transparentes. La grille de sortie est donc constituée par une succession de fentes alternativement réfléchissantes et transparentes. Pour la longueur d'onde de réglage, les images des parties éclairées de la grille d'entrée coïncident avec les parties transparentes de la grille de sortie : toute l'énergie est donc transmise.

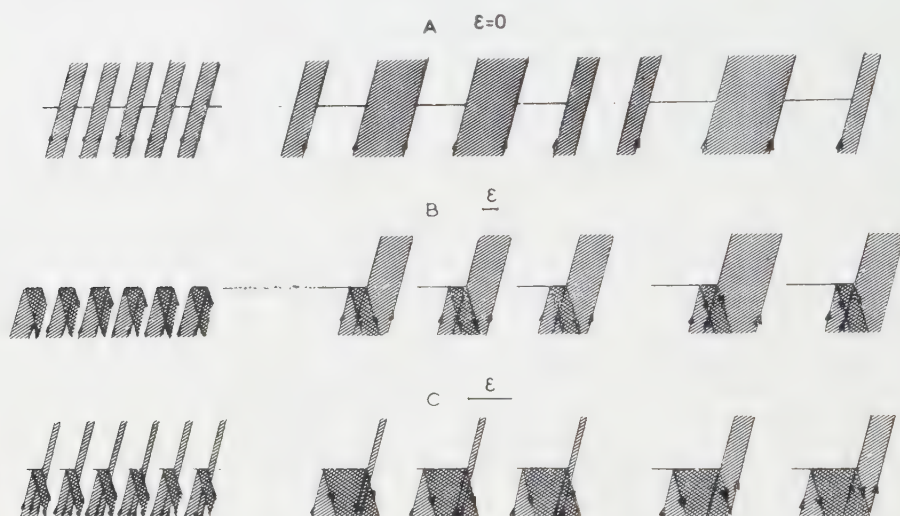


Figure 10.

Pour une longueur d'onde différente, l'énergie se décompose en un flux transmis et un flux réfléchi par la grille de sortie. La constitution des grilles est telle que le flux réfléchi et le flux transmis deviennent très rapidement égaux pour toute radiation qui s'écarte de la longueur d'onde de réglage. La différence de ces flux caractérise donc un élément spectral étroit autour de la longueur d'onde de réglage et permet une analyse spectrale dans des conditions analogues à celles d'un spectromètre à fente.

Les figures 10 (A), 10 (B) et 10 (C) sont des coupes de la grille de sortie dans le plan de symétrie du spectromètre. Elles schématisent la répartition des faisceaux réfléchis et transmis pour la longueur d'onde de réglage (10 A) et pour des radiations qui s'en écartent plus ou moins (10 B et 10 C).

3.2.2. Constitution des grilles

Alors que dans le montage précédent la surface de collage des compensateurs (cylindrique ou sphérique) impose une loi de répartition des franges d'interférence, une très grande liberté existe ici dans le choix de la répartition des fentes de la grille. L'exemple cité n'est pas limitatif et de nombreuses solutions différentes

existent sans doute. Il a été choisi par analogie avec le montage précédent. Par ailleurs, l'étude théorique en est facile et donne des résultats satisfaisants.

La répartition des 'pleins' et des 'vides' de la grille reproduit celle des franges d'interférence du montage précédent, lorsque la surface de collage des compensateurs est un cylindre. Cette répartition est la suivante :

En prenant comme origine l'extrémité où les fentes sont les plus larges, la position de l'extrémité de la fente de rang N est donnée par la formule :

$$x_N^2 = Nx_1^2.$$

Cette loi de succession est celle des anneaux de Newton.

Une fente sur deux (soit, par exemple, chaque fente de rang pair) est transparente. Les fentes de rang impair de la grille de sortie sont réfléchissantes.

$$S_2 - S_1 = 0,82 \cos 2\pi \frac{\epsilon}{\lambda} + 0,09 \cos 6\pi \frac{\epsilon}{\lambda} + 0,03 \cos 10\pi \frac{\epsilon}{\lambda} + \dots$$

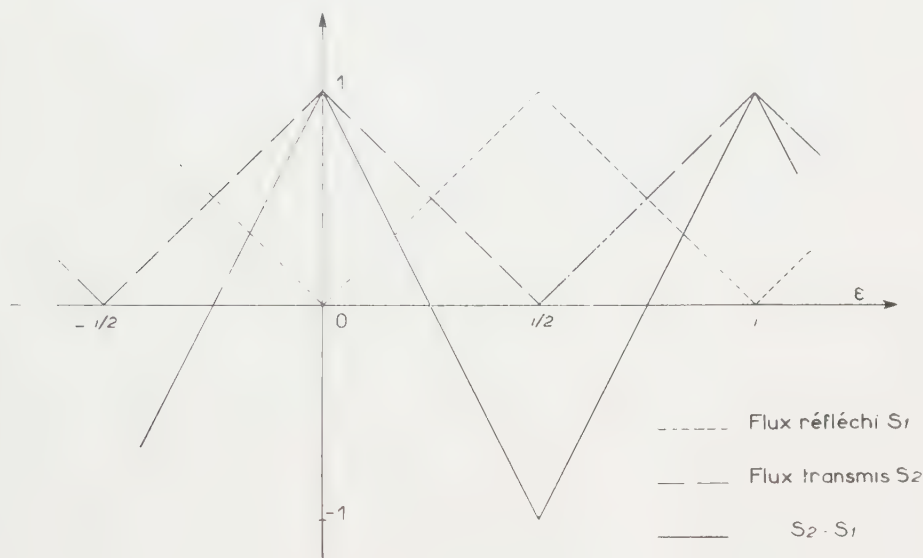


Figure 11.

La largeur l_N de la N ième fente est donné par la relation :

$$l_N = \frac{x_1^2}{2x_N}.$$

L'ensemble constitue un réseau de fentes a pas i variable, tel que :

$$i - 2l = \frac{x_1^2}{N}.$$

La figure 11 représente les flux réfléchis et transmis, ainsi que leur différence au point où le pas de la grille a la valeur i , en fonction du décalage ϵ de la grille de sortie et de l'image de la grille d'entrée : ce sont des fonctions triangulaires de période i .

La relation

$$\frac{\epsilon}{i} = \frac{\epsilon x}{x_1^2}$$

montre que, pour une valeur donnée de ϵ , les flux transmis et réfléchis varient linéairement en fonction de x . Il apparaît des franges de moiré, analogues aux franges d'interférence du montage précédent, rectilignes et équidistantes.

Les calculs effectués en 3.1.2. Sont transposables sans difficulté.

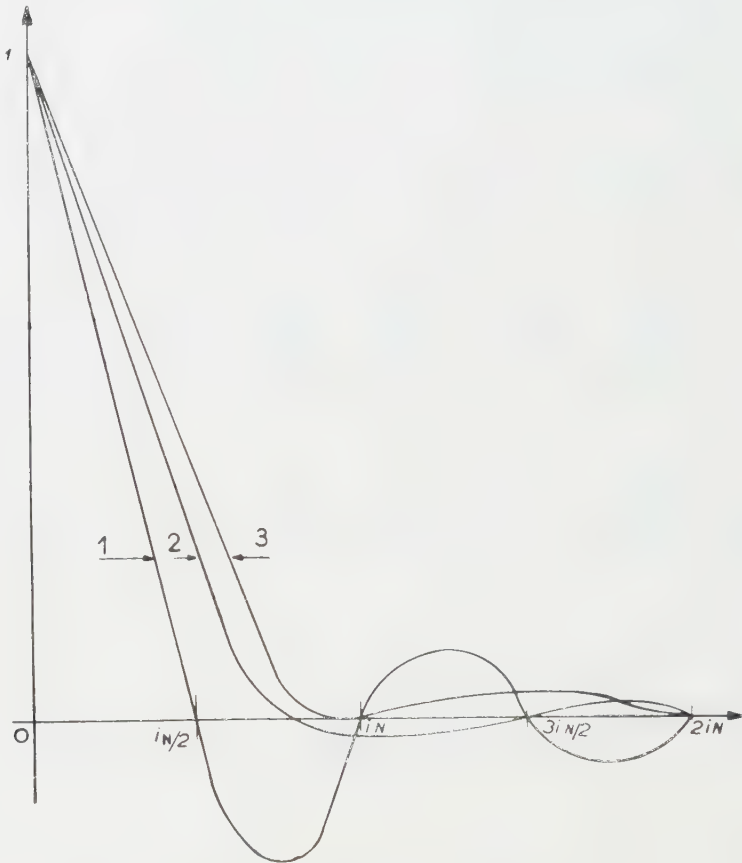


Figure 12.

Les courbes 1 et 2 de la figure 12 donnent le signal (c'est-à-dire la différence entre les flux transmis et réfléchis) pour une radiation infiniment fine en fonction de l'écart à la longueur d'onde de réglage, exprimé par le décalage linéaire de l'image de la grille d'entrée et de la grille de sortie. $i_N/2$ est la largeur de la fente la plus fine. La courbe 1 est obtenue pour une grille rectangulaire (figure 13 A); la courbe 2 pour une grille de forme trapézoïdale (figure 13 B). Ces courbes sont analogues aux courbes 1 & 2 de la figure 3. Les maximums secondaires sont cependant moins marqués (pour les courbes 1, 14, 11 et 7 pour cent au lieu de 17, 14 et 11 pour cent), en raison de la forme triangulaire et non sinusoïdale de la fonction de période i (figure 11).

Ces courbes sont valables en admettant que l'effet de la diffraction est négligeable, même pour la fente la plus fine de la grille.

Le calcul général de la figure de diffraction donnée par un tel réseau à pas variable est en cours.

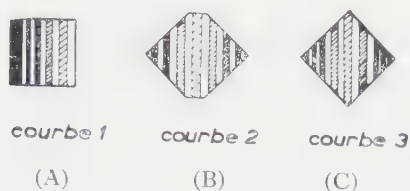


Figure 13.

3.2.3. Montage expérimental

Un montage expérimental a été réalisé sur le même spectromètre à prisme pour vérifier le principe de ce dispositif. La grille réalisée a un pas qui varie de 1,8 mm à 8/100 mm en 20 mm. Elle comprend 126 fentes transparentes. Le gain de luminosité est de 250.

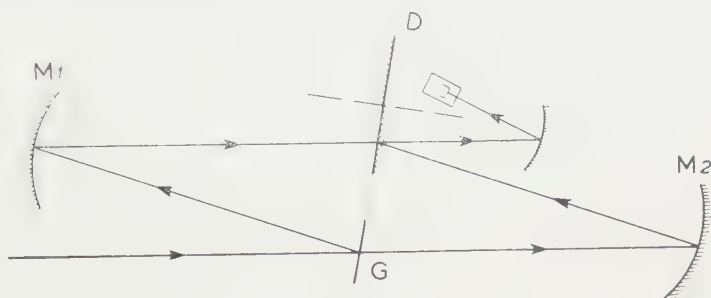


Figure 14.

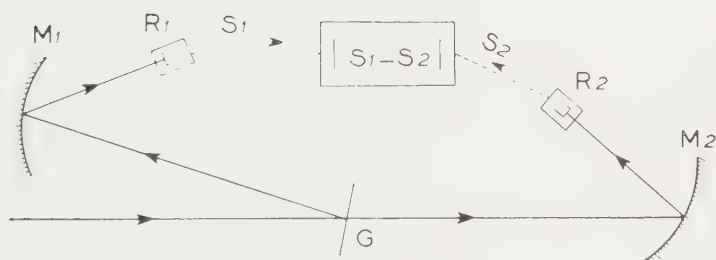


Figure 15.

Les figures 14 et 15 représentent 2 dispositifs réalisés à la sortie de l'appareil. Dans les deux cas, la grille de sortie est légèrement inclinée sur l'axe optique, pour que le faisceau réfléchi ne revienne pas sur lui-même. Les faisceaux transmis et réfléchis, sont repris par 2 miroirs sphériques M_1 et M_2 . Dans le cas de la figure 14, les deux faisceaux tombent alternativement sur le même récepteur, par l'intermédiaire d'un disque tournant dont les secteurs sont alternativement réfléchissants et transparents. La partie modulée du flux tombant sur le récepteur est précisément la différence cherchée; un amplificateur alternatif fournit directement cette différence.

Figure 15, les deux faisceaux parviennent à deux récepteurs montés en pont, de façon à faire apparaître directement la différence des deux signaux.

La figure 16 reproduit quelques enregistrements obtenus sur des raies de mercure. L'enregistrement de la raie infra-rouge a été effectué sans modifier

le réglage réalisé pour la région jaune-vert du spectre. La dissymétrie de l'enregistrement est provoqué par la variation de la courbure des raies et de l'effet d'anamorphose entre ces deux régions spectrales. En fait, en modifiant légèrement le réglage, la même grille de sortie est utilisable dans un large domaine spectral.

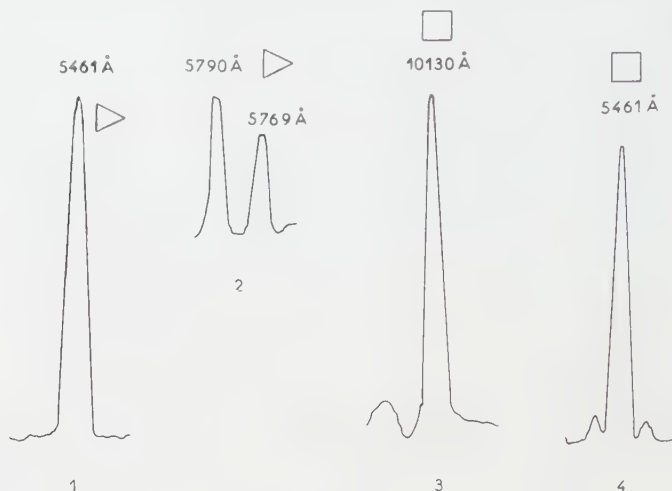


Figure 16.

3.3. Comparaison entre les deux dispositifs décrits

La comparaison expérimentale de ces deux dispositifs est en cours et il serait prématuré de vouloir en tirer dès maintenant des conclusions définitives :

Cependant, il apparaît que le second procédé présente au moins deux avantages :

1°. L'extension vers les grandes longueurs d'onde ne présente aucune difficulté spéciale,

2°. Les limitations signalées en 3.1.3, qui fixent le gain de luminosité dans le cas du dispositif à polarisation n'existent pas dans le dispositif à grilles ; en effet, la grille de sortie peut être l'image exacte (obtenue par photographie par exemple) de la grille d'entrée à travers l'appareil, compte tenu des déformations telles que : courbure des fentes, anamorphose. La limite de l'étendue du faisceau est donnée, soit par les aberrations du système affectant la netteté de l'image, soit par l'étendue du faisceau admise par le récepteur utilisé. D'une façon générale, une fente de hauteur h et de largeur e est remplaçable par une grille de même pouvoir séparateur ayant une surface de l'ordre de h^2 . Le gain de luminosité qu'on peut escompter est alors donné par la relation :

$$G = \frac{h}{2e}.$$

The three systems described can give, in the absence of large photon noise, a spectral analysis with much greater luminosity than is possible in slit spectrographs.

The first is a polarizing interferometer adapted to spectroscopy using the Fourier transform method. It gives great luminosity, is convenient in use, but cannot yield a very high resolving power.

The other two systems give the spectrum directly, without calculations and the general arrangement of slit spectrographs is used. In both cases the entrance and exit slits are replaced by systems, imaged one on the other by the system, consisting of multiple arrays of slits, of unequal widths and arranged at unequal spacings. The particular spectral element

which gives an image of the entrance array superposed on the exit array is thus filtered, due to a property which makes it identifiable. One system (compensator spectrometer) gives a selective modulation of this spectral element. In the other system (spectrometer with screens) the signal corresponding to this element is given by the difference of the transmitted and reflected flux at the exit array.

The principles of these three systems have been verified experimentally.

Die drei hier beschriebenen Anordnungen erlauben eine Spektralanalyse mit einer Helligkeit durchzuführen, die derjenigen eines Spalt-Spektrometers weit überlegen ist, vorausgesetzt, dass der Untergrund nicht zu sehr hervortritt.

Die erste Anordnung ist ein Polarisations-Interferometer, das über eine Fourier-Transformation für die Spektroskopie brauchbar wird. Es ist sehr hell und sehr bequem in der Benutzung, aber es leistet keine sehr hohe Auflösung. Mit den beiden anderen Anordnungen wird das Spektrum unmittelbar erhalten, also ohne nachträgliche Rechnung. Ausserdem ist die allgemeine Anordnung der Spaltapparate beibehalten.

Der gemeinsame Grundgedanke dieser beiden Anordnungen liegt darin, Eintritts- und Austrittsspalt durch zwei Systeme von Vielfachspalten zu ersetzen. Dabei ist das eine Spaltsystem das Bild des anderen und die Spaltbreiten und die Intervalle zwischen den Spalten sind ungleich. Die Eintrittsspalte werden durch den bevorzugten Spektralbereich auf das System der Austrittsspalte abgebildet und dadurch gefiltert, wobei eine besondere Kennzeichnung den Bereich identifizierbar macht. Dazu dient bei der einen Anordnung (Kompensations-Spektrometer) eine selektive Modulation dieses Spektralbereiches. Bei der anderen Anordnung (Gitter-Spektrometer) wird das diesem spektralbereich entsprechende Signal gegeben durch den Unterschied des im Ausgangssystem durchgehenden und reflektierten Lichtstromes.

Die Grundlagen dieser drei Anordnungen wurden experimentell verwirklicht.

RÉFÉRENCES

- [1] JACQUINOT, P., 1958, *J. Phys. Radium*, **19**, 223.
- [2] CONNES, J., 1958, *J. Phys. Radium*, **19**, 197.
- [3] MERTZ, L., 1958, *J. Phys. Radium*, **19**, 233.
- [4] LENOUVEL, L., et LENOUVEL, F., 1938, *Rev. Opt. (théor. instrum.)*, **10**, 350.
- [5] PHILBERT, M., 1958, *Rech. aéro.*, **65**, 19.
- [6] FRANÇON, M., et SERGENT, B., 1955, *Opt. Acta*, **2**, 182.
- [7] CONNES, P., 1958, *J. Phys. Radium*, **19**, 215.
- [8] GOLAY, M. J. E., 1951, *J. opt. Soc. Amer.*, **41**, 468.
- [9] GIRARD, A., LENFANT, R., et LOUISNARD, N., 1959, *Rech. aéro.*, **72**, 35.
- [10] DUVERNEY, M., et VERGNOUX, A. M., 1957, *J. Phys. Radium*, **18**, 527.

Minutes of the Fifth Session of the International Commission for Optics, held on 26 and 29 August 1959, at the Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden

1. The President of the Commission, Professor S. S. Ballard, was in the Chair, and the following 40 officials and delegates were present:

<i>Bureau:</i>	S. S. Ballard (President), E. Ingelstam, A. Maréchal and G. Toraldo di Francia (Vice-Presidents), W. D. Wright (Secretary-Treasurer).
<i>Australia:</i>	W. R. Blevin.
<i>Austria:</i>	W. J. Jaschek.
<i>Belgium:</i>	S. Arend, P. Mollet, J. Verhaeghe.
<i>Canada:</i>	A. M. Crooker, G. Lansraux.
<i>Czechoslovakia:</i>	B. Havelka, R. Novak.
<i>France:</i>	A. Arnulf, P. Fleury, A. Kastler.
<i>Germany:</i>	G. Cario, G. Franke, E. Lau.
<i>Great Britain:</i>	R. W. Ditchburn, E. W. Taylor, C. G. Wynne.
<i>Italy:</i>	F. Scandone, G. Toraldo di Francia.
<i>Japan:</i>	K. Ishiguro, H. Yoshinaga.
<i>Netherlands:</i>	C. J. M. Aarts, H. J. Raterink.
<i>Poland:</i>	R. S. Ingarden, T. Skalinski, L. Sosnowski.
<i>Spain:</i>	J. M. Otero, L. Villena.
<i>Sweden:</i>	E. Hulthen, E. Ingelstam, Y. Ohman.
<i>Switzerland:</i>	R. Mercier, N. Schaetti.
<i>United States:</i>	J. G. Baker, H. Cary, W. L. Hyde

Dr. R. Tiedeken (Germany) also attended by invitation for the discussion on item 9.

2. Opening address

The Chairman opened the meeting by welcoming the delegates and referring to the former presidents of the Commission, Mr. T. Smith and Professor A. C. S. van Heel, to whom greetings were sent. He referred to the success of the I.C.O. in its early years in re-establishing international contacts and cooperation in optics after the war and the opportunity that lay ahead in furthering the future progress of optics. Many new developments were taking place, in particular in the mathematical approach to image formation, in the design of radiation detectors, in the application of electronics to optical instruments, and in the use of optical techniques and equipment in a variety of new problems. This represented a renaissance in optics and the Commission should do everything in its power to encourage these developments. He hoped, too, that the interest created by the activities of the Commission might do something to overcome the shortage of optically trained people.

3. Admission of Australia and Austria

Applications for membership of the I.C.O. had been received from Australia in October 1958 and from Austria in May 1959. Both countries had set up National Committees of Optics as required by the I.C.O. Statutes and their admission to membership had been approved by the I.C.O. Bureau, subject to ratification by the Commission itself. Ratification of their admission was moved, and seconded, and unanimously approved with acclamation. The Chairman gave a warm welcome to these two new member countries, to which Mr. Blevin responded on behalf of Australia, and Professor Jaschek on behalf of Austria.

Some discussion took place on the admission of other countries who were known to be active in the field of optics, and it was hoped that such countries would be encouraged to apply for admission through informal discussions with optical scientists in those countries.

4. *Secretary-Treasurer's report*

This report outlined the various activities and actions which had taken place since the 1956 Commission meeting, and had been circulated in advance. It was formally presented to the meeting and approved.

5. *Financial statement*

The Secretary-Treasurer reported on the transfer of the duties of Treasurer from Professor Arnulf in July 1956 and to the arrangements made with the Finance Department of the Imperial College to open a special I.C.O. account. Permission had been obtained from the Bank of England for receipts and payments to be made in any currency. Owing to the possibility of sterling devaluation that had arisen at the end of 1956 and during 1957, arrangements had also been made with Dr. E. D. McAlister, Treasurer of the Optical Society of America, to open an interest-bearing account in the United States from which payments could be made on application from the Treasurer of the I.C.O. A further dispersal of I.C.O. funds also occurred through the need for certain countries to pay their I.C.O. subscriptions into the I.U.P.A.P. account. These sums were held by the Treasurer of I.U.P.A.P. until the end of each year but were subsequently transferred to the I.C.O. account held at the Imperial College. Although the existence of these three separate accounts complicated the financial statement, it provided some measure of protection against currency depreciation.

Detailed accounts were presented for the period 1 January 1956–31 December 1958, and the following balances as held at 31 December 1958 were reported:

I.U.P.A.P.–I.C.O. account	\$960
Imperial College–I.C.O. account	£1656 0s. 5d.
O.S.A.–I.C.O. account	\$2769.95

This represented a total balance at 31 December 1958 of approximately 8,300 *dollars*. The accounts were formally presented to the meeting and approved.

6. *Election of bureau for period 1959–1962*

Discussion took place on the national representation on the Bureau and on the desirability of arranging for two new Vice-Presidents to be appointed every three years.

Nominations for the position of President were invited from National Committees and the following names were received:

Professor E. Ingelstam, Professor A. Maréchal and Professor G. Toraldo di Francia.

A ballot was held with the result that Professor Ingelstam was declared elected as the President of the I.C.O. for 1959–1962. This was received with acclamation and Professor Ingelstam was welcomed and congratulated by the Chairman. A tribute was also paid by Dr. Taylor to the great contribution which the retiring President, Professor Ballard, had made to the growth and strength of the I.C.O.

The following nomination were received for the remaining positions on the Bureau:
Vice-Presidents: Dr. J. G. Baker, Professor A. Maréchal, Mr. P. Mollet and Professor G. Toraldo di Francia.

Secretary-Treasurer: Professor W. D. Wright.

These were elected unanimously with acclamation without the need for a ballot.

The Bureau for the period 1959–1962 was therefore as follows:

<i>President:</i>	Professor E. Ingelstam (Sweden).
<i>Vice-Presidents:</i>	Dr. J. G. Baker (U.S.A.)
	Professor A. Maréchal (France).
	Mr. P. Mollet (Belgium).
	Professor G. Toraldo di Francia (Italy).
<i>Secretary-Treasurer:</i>	Professor W. D. Wright (Great Britain).

The Chairman expressed the thanks of the Commission for the service which Professor Hansen had rendered to the I.C.O. in his capacity as Vice-President since 1956, and the Secretary was asked to convey these thanks in writing to Professor Hansen and to send him greetings from the meeting.

7. Future colloquia, conferences and commission meetings

Following the recent pattern of meetings it was agreed that meetings should be arranged as follows:

1961 Colloquium.

1962 Conference and Commission meeting.

1964 Colloquium.

1965 Conference and Commission meeting.

Invitations were received from Germany for the 1962 conference to be held there and from France either for the 1962 conference or for the 1961 colloquium and the 1965 conference. An invitation was also received from Great Britain for a colloquium in 1961 and from Japan for a colloquium in 1964.

It was agreed that the 1962 Conference and Commission meeting should be held in Germany, probably in Munich at the end of August. The subject for the Conference, "Information by Optical Methods", was provisionally agreed by the meeting.

The Bureau was instructed to explore the possibility of holding two colloquia in 1961 to succeed one another with only a few days interval, one on "Optical Materials" to be held in Paris, the other on "Optical Instruments" to be held in London.

In response to the invitation from Japan the following resolution was approved: "That the meeting looks with favour on the proposal to hold a colloquium in Japan in 1964 and hopes that satisfactory arrangements can be made".

It was also suggested that the 1965 conference might be held in Paris.

A discussion took place on the organization of I.C.O. meetings, and the hope was expressed that one-third of the programme time should be devoted to discussion, and that the business sessions of the Commission should not be held at the same time as the scientific sessions of the conference. The value of having preprints of papers available in advance of the meeting was endorsed.

8. Summer schools in optics

Professor Maréchal outlined the proposal that the I.C.O. should sponsor summer schools in optics from time to time with the aim of providing international instruction in modern optics. This should prove especially valuable for the younger optical scientists. He understood that financial help could be obtained from NATO.

During the discussion, considerable enthusiasm was shown for the suggestion, although it was emphasized that the plan would not preclude any university or other organization from arranging summer schools of its own. Doubt was expressed about the wisdom of using NATO funds to finance the schools. It was thought that the students attending the school might be supported financially by their own institutions, and it was agreed that as an experiment a summer school in 1960 in France should be organized by Professor Maréchal in cooperation with the Bureau. An expenditure up to 1000 dollars from the I.C.O. funds was approved.

9. Interlingual optical glossary or encyclopaedia

Dr. Tiedeken was invited to outline his ideas for the preparation of such a glossary, which would include a critical comparison of the different ways in which the same terms and symbols were used in various countries and languages.

In the discussion it was emphasized that this was a major undertaking which might last for many years, but that a start might be made on a selected range of terms. It was agreed that a sub-committee consisting of Messrs. Toraldo (Chairman and Convener), Abelès, L. Baker, Lohmann, Lucy and Tiedeken should be appointed to consider the proposal and make a recommendation for further action at the second session of the Commission meeting.

The following report of the subcommittee was presented at the meeting on Saturday, 29 August:

1. The subcommittee of the I.C.O. finds the proposal for a multilingual vocabulary in optics worthy of further consideration.

2. The subcommittee recommends that the vocabulary should contain besides the words in different languages also very short definitions for those terms which can have different meanings in different countries. However, a further discussion and the decision on this question is left to the committee which will be appointed to carry out the work.
3. It is recommended that the languages of all the countries which are represented in the I.C.O., and in addition Russian, should be included.
4. The national committees of all the countries, where a given language is officially spoken, should collaborate and be responsible for the entries in that language.
5. It is recommended that a committee of the I.C.O. be set up to initiate the preparation of a vocabulary. (Names of possible members of the committee were submitted, subject to approval by their national committees.)
6. It is proposed that expenses for stationery and correspondence should be reimbursed by the I.C.O. or by the national committees. Major expenses would need to be authorized by the I.C.O. Bureau.

This report was approved and it was agreed to set up a glossary committee as suggested, with Dr. T. Tiedeken as Chairman and Organizer.

10. *Normalization of the design of optical instruments*

Dr. Villena reviewed the previous work on this subject carried out by Dr. Jemenez-Landi, and referred to the fact that no interest had been shown by the English-speaking countries and very little encouragement had been received from the optical industry. It was agreed Dr. Jemenez should be invited to prepare a fresh statement of the problem for circulation by the Secretary of the I.C.O. to national committees.

11. *Assessment and control of the quality of optical instruments*

Professor Arnulf and Professor Maréchal referred to the modern techniques that were now available for testing optical systems and felt that it would be appropriate for the I.C.O. to make recommendations for their use in industry.

After discussion it was agreed that the new President of the I.C.O. be invited to appoint a small sub-committee to examine the problem and prepare a report for the next meeting of the Commission.

12. *International critical tables*

Professor Ballard described the establishment by the National Research Council in Washington of an office of critical tables under the direction of Dr. G. Waddington. This office was concerned with the preparation of new tables of symbols, units, and nomenclature together with new data and standards in specific fields of science. He thought it would be appropriate for the I.C.O. to collaborate in the optical part of this programme, and it was agreed that the new President of the I.C.O. should appoint a small sub-committee to participate in this work.

13. *Optica Acta*

The following report on *Optica Acta* for the period 1956–1959 was presented by Professor Ditchburn.

1. During the years 1957 and 1958, the number of subscribers increased slowly but financial difficulties were still serious. They appeared likely to increase if new journals or reviews in optics were published. An opportunity arose to secure publication by Messrs. Taylor & Francis who have the necessary contacts to promote sales internationally. Messrs. Taylor & Francis made a commercial agreement with *Revue d'Optique* and also gave friendly assistance in promoting an agreement between Dawson and Sons and *Revue d'Optique* in regard to sale of back numbers.

2. The editorial board is now constituted as follows:

Professor J. M. Otero.	Professor G. Toraldo di Francia.
Professor R. W. Ditchburn.	Professor A. C. S. van Heel.
Professor A. Arnulf.	Professor A. Maréchal.
Professor P. Fleury.	Professor. S. S. Ballard.
Dr. F. Gabler.	Dr. W. Brode.
Dr. G. Hansen.	Dr. Havelka.
Professor E. Ingelstam.	Professor P. Jacquinot.
Professor Dr. H. Korte.	Professor M. Migeotte.
Dr. W. S. Stiles.	Professor H. Wolter.

3. Two numbers have been published this year and two more are expected to appear before the end of the year. The first issue for 1960 (to appear in January) will contain many papers given at Stockholm.
4. The only remaining problem of transfer is the payment of editorial fees for the years 1954-58 to Dr. Franke and 1956-58 to Dr. Wynne. Professor Fleury reports that the bank has been asked to make the necessary payments on behalf of *Revue d'Optique*. The editorial fees for 1959 have already been paid by the Secretary from funds supplied by Taylor & Francis.
5. Messrs. Taylor & Francis have agreed that if a European optical society is formed, they will give friendly support and will supply the journal in bulk at a reduced price to the Society.

14. *European optical society*

A discussion on the desirability of forming a European optical society took place. Differing views were expressed. No action was recommended at the present time, but it was agreed that the situation should be kept under review.

15. *Budget for period 1959-1962*

An estimate of 5000 dollars for the balance in hand on 31 December 1959, after the expenses of the present meeting and other current expenses of the I.C.O. had been met, was made by the Secretary-Treasurer. Subscriptions in 1960 and 1961 would total 6400 dollars bringing the total receipts by 31 December 1961, to 11,400 dollars. It was necessary to have a balance at that date of at least 5000 dollars for use for the Commission meeting and conference to be held in 1962.

The following estimate of expenses was then approved:

Secretariat	1960	200 dollars
"	1961	200 "
Summer school	1960	1,000 "
Colloquia	1961	3,000 "
Bureau meeting	1961	1,500 "
Vocabulary		250 "

16. *Union of International Associations*

It was agreed that no action should be taken to apply for membership of this union.

17. *Circulation of publications*

The secretary referred to a request received from the Library of Congress in Washington for an exchange of publications, but it was agreed that the I.C.O. could contribute little to such an exchange and that no action be taken in regard to this or other similar requests that might be received.

18. *Information service about optical meetings*

A request had been received from the Australian national committee that as much information as possible should be circulated about forthcoming optical conferences organized by the I.C.O. and other bodies, and it was agreed that national committees should be invited to keep the secretariat of the I.C.O. informed of meetings planned to be held in their countries. The secretary would then circulate this information from time to time.

19. *Conference on teaching of physics*

Professor Fleury described the plans for the Conference to be held in Paris in July 1960 on this subject, under the auspices of the I.U.P.A.P., to which no more than 6 people from each country would be invited. The Secretary of the Conference is Mr. N. Clarke of the Institute of Physics, London.

Summer School in Optics

The I.C.O. is organizing a Summer School in Paris for the period 4-13 July 1960, on the following subject:

"Modern aspects of the theory of formation of images".

The scope of this school is to provide information to students and advanced research workers on the present situation of the theory of images, the use of Fourier techniques, the evaluation of optical images, etc. The courses should be of interest not only to people working in the field of optics but also to those who have to solve similar problems in micro-waves, electron optics, etc.

The provisional programme is as follows:

Formation of images in various regions of the electromagnetic spectrum; coherent and incoherent illumination; tolerances on aberrations; techniques for measuring the contrast transfer function; photographic images.

The lectures will be given by H. H. Hopkins, E. Ingelstam, A. Maréchal, G. Toraldo di Francia, G. Wolter and other specialists. There will be 24 to 30 lectures and seminars in the whole of the course.

Physicists, engineers, research workers and others who are interested should send an application as soon as possible to:

Professor A. Maréchal,
Institut d'Optique,
3 Boulevard Pasteur,
Paris 15, France,

and a copy to the Secretary of their National Committee of Optics for advice on possible sources of financial help for travelling and living expenses. Rooms will be reserved in the Cité Universitaire.

Spectral line broadening measured by shearing interferometric methods

by J. ERICSSON and L. P. (JOHANSSON) SJÖFALL
Institute of Optical Research, Stockholm 70

(Received 28 September 1959)

A shearing interference method for determining spectral line widths and shapes from the visibility curve of two-beam interferences as a function of the path difference between the interfering wavefronts is described. The visibility is the Fourier transform of the intensity curve of the spectral line. In each measurement a limited number of points of the visibility curve is determined, but this is sufficient to give a rough estimation of the whole curve if the points are properly chosen. The image is preferably registered by a photographic plate which is then measured in a microdensitometer. Hence light sources of very low intensities can be investigated. Two slightly different shearing interferometers have been used, one with a Savart plate combined with an entrance slit and the other with a Wollaston-type compensating prism for large apertures. In the latter case, no entrance slit is necessary and combinations with a wide band monochromator can be made without any serious loss of intensity. The green line from mercury-spectral lamps has been examined, and measurements on a high pressure lamp are reported.

1. INTRODUCTION

A classical way of determining spectral line widths and shapes is to measure the visibility of the interference pattern as a function of the path difference between the interfering rays [1]. This function is the Fourier transform of the intensity curve, 'profile shape', of the spectral line. The present method consists of a determination of a few points on the visibility curve with a simple apparatus, and the method may be of interest for the investigation of some physical properties of the radiating plasma, such as the very high temperatures. It was first suggested by Ingelstam at an international symposium on interference spectroscopy in Paris, 1957 [2].

2. THEORY

$\psi(k)$ represents the intensity as a function of a wave number k , chosen so that $k=0$ at the centre of the spectral line. We limit ourselves to the case of symmetrical $\psi(k)$, and thus the visibility [3]

$$V(x) = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(k) \cdot \cos(2\pi xk) \cdot dk}{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(k) \cdot dk} \quad (1)$$

where x = the optical path difference, and after transformation

$$\psi(k) = \text{const.} \int_0^{\infty} V(x) \cdot \cos(2\pi kx) \cdot dx. \quad (2)$$

A possible asymmetry of the line shape cannot be detected by means of the present method. The result will be an 'equivalent' symmetrical function.

3. THE OPTICAL METHOD

Shearing interferometers are particularly insensitive to vibrations because the two interfering beams go through the same optical components and are only displaced a slight distance sideways. Therefore it is possible to build a very stable shearing interferometer for the study of the visibility of two-beam interferences. A mirror with a staircase-shaped surface reflects a plane wavefront (figure 1 *a*). We thus obtain a path difference, x , in the reflected wavefront which is equal to twice the distance between the steps of the mirror. By means of a shearing interferometer, the wavefront is split up into two parts separated from each other by a distance b_1 (figure 1 *b*), chosen to be about half the width of a step. When these two sheared wavefronts interfere with each other, zones with stepwise increasing path differences are surrounded on both sides by reference zones with an almost constant path difference of a few wavelengths. This path difference is practically negligible in relation to the other path differences which are of the magnitude of a millimetre. The interference pattern in the image of the mirror is adjusted to give two or three fringes in each zone (figure 1 *c* and figure 3). Hence it is possible to measure, in the one photograph, the visibility for interferences with long path differences in relation to the zero path difference of the reference fields. The presence of reference fields makes the method very insensitive to stray-light.

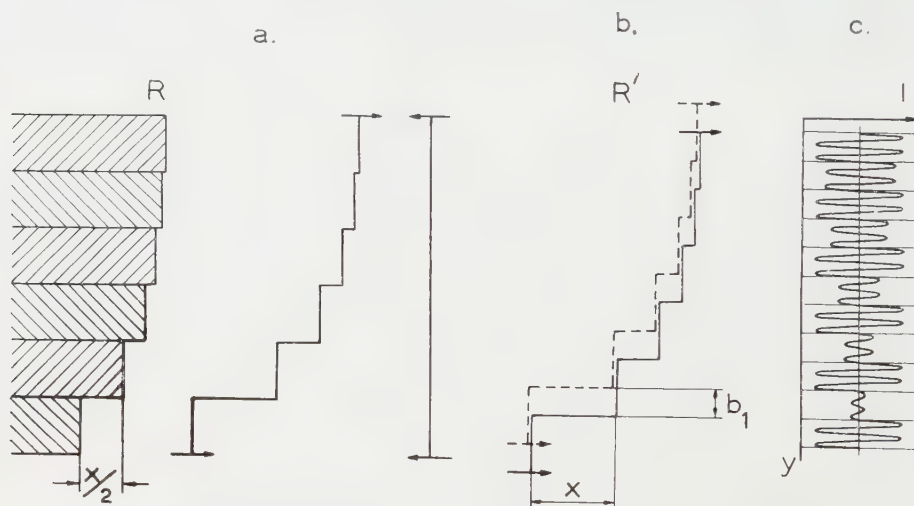


Figure 1 (*a*). A plane wavefront is coming from the right and is reflected by a staircase-shaped mirror *R*. The steps of this are of different heights, called $x/2$. The back-going wavefront contains the corresponding retardations equal to x .

(*b*) The wavefront is split up into two wavefronts, separated from each other a distance b_1 , equal to about half the width of a step. Zones with stepwise increasing optical path differences between the wavefronts are surrounded by reference zones of almost zero path difference.

(*c*) The intensity distribution of the interference pattern in the final image. The visibility for the fringes decreases with increasing path difference and can be measured by comparison with the reference zones of constant visibility.

4. APPARATUS

4.1. Interferometric unit

Two different arrangements were tried as the shearing interferometric unit, one with a Savart plate [4] combined with an entrance slit and the other with a prism

of the Wollaston type passed twice by the light. Hence there is no need for a limiting slit in the second case and an intensity gain of about ten is achieved at once.

In the optical diagram of the second set up (figure 2), the lamp is imaged on an iris stop I. The iris is then imaged at the birefringent prism W via a mirror M, occupying half of the aperture of the prism. The image of the iris is in the focal plane of the lens L_3 . The parallel beam of light is reflected at the staircase surface R. The light then goes back through the same lens L_3 and is focused once more in the prism. By means of the lenses L_3 and L_4 , an image of the reflecting surfaces is formed at R' . Before and after the light goes through the prism, it passes through a polarizer P whose optical axis is at 45° to the vertical plane. The optical axes of the two components of the Wollaston prism are vertical and horizontal respectively. The prism-wedge is in the horizontal plane, i.e. the plane of the figure.

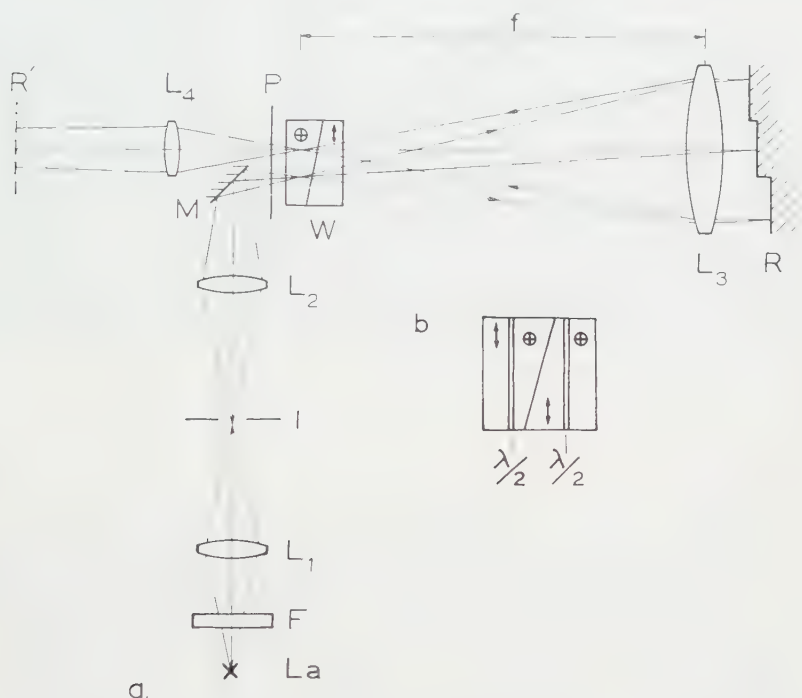


Figure 2(a) The arrangement with the Wollaston-Françon prism (cf. the text). La: light source; F: filter; L_1 : condenser lens; I: iris stop; L_2 : lens; M: mirror; P: polarizer in 45° to the axes of the Wollaston plate W; L_3 : good lens with focal distance f ; R: staircase mirror; L_4 : lens; R' : image of R.

(b) The modification of the Wollaston prism made by Françon. At each side of the Wollaston prism are placed a half wavelength plate and a plane parallel plate of the same birefringent material as the prism and with a thickness exactly equal to half the total thickness of the first prism. The orientations of the optical axes are indicated in the figure.

The interference fringes in the field of view with a Wollaston prism, as in the present case, appear as hyperbolas due to the convergence of the light through the prism. However, if the Wollaston prism is replaced by a modified prism (figure 2b) of the type designed by Françon for large openings [5], it is possible to obtain straight interference fringes which are easier to evaluate by means of photometry.

4.2. *Staircase mirror*

Two different kinds of reflecting staircases have been used, one with adjustable steps and one with conveniently chosen fixed steps. The first one consisted of the plane edges of six glass plates, coated with a thin layer of evaporated aluminium. The plates were placed together on a polished glass surface and were movable relative to each other in one direction by means of micrometers.

The difficulties associated with the movable glass plates, e.g. a somewhat complicated mechanical system, the parallel sliding of the plates and stability

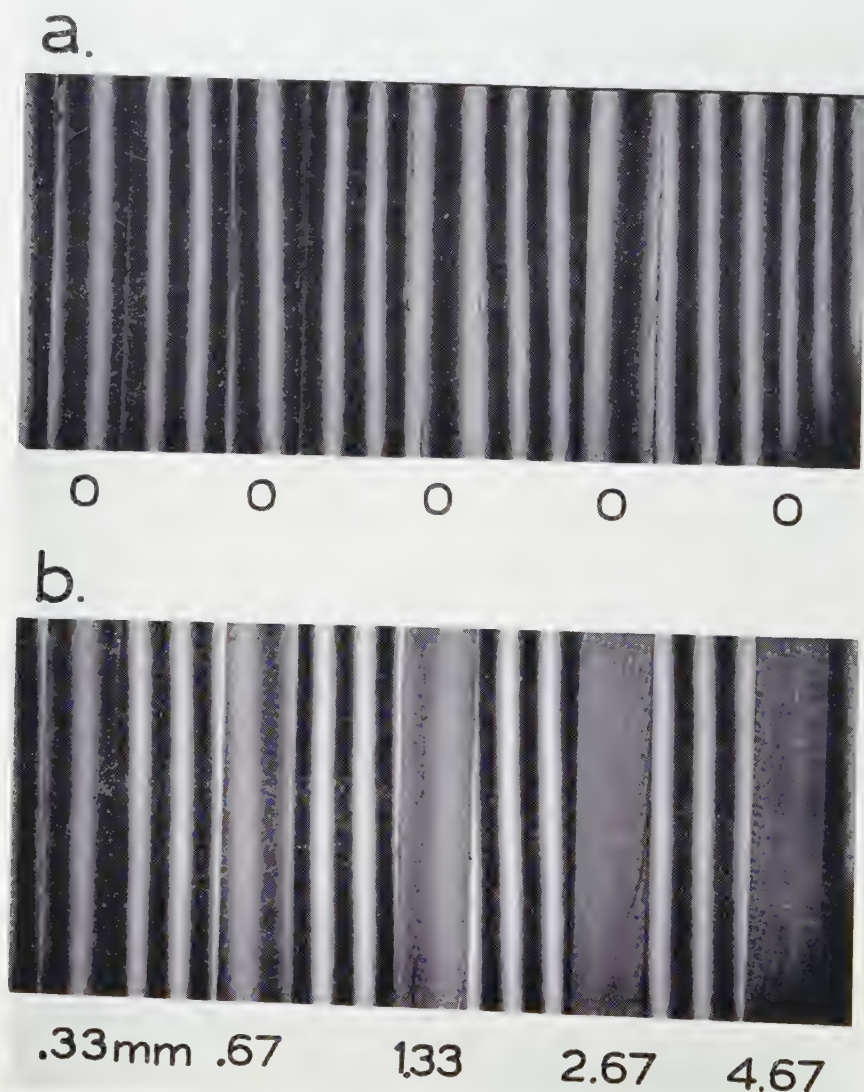


Figure 3. Two photographs of the image of the staircase mirror taken with the same lamp as in figure 4.

(a) Zero path difference for all steps, thus no reduction in visibility.

(b) The glass plates have now been adjusted for examination of the lamp. Under each step the optical path difference is given (cf. the crosses in figure 4).

problems, can be overcome by using a fixed staircase mirror. The latter also allows a more exact determination of the path differences. As a convenient system of this type, a series of block gauges fixed side by side on a thick optical flat has been tried.

5. REGISTRATION

The image was registered by a photographic plate (fig. 3) which then was measured in a microdensitometer.

6. EVALUATION

From the maximum and minimum intensity values of the interference fringes, the contrast or visibility was calculated using equation (1) and normalized to unity for zero path difference by means of the reference zones on each side. Figure 4 gives the visibility measured for the green line of a Hg high pressure lamp (Philips 93136 E) as a function of optical path difference. The photographic material is responsible for the great spread of the points. No systematic difference was found between the two methods. The full-drawn curve was used for the following calculation of the intensity function of the spectral line $\psi(k)$. This transformation has been made with a numerical method, a modification of the Simpson formula, worked out by Filon [6].



Figure 4. The visibility as a function of optical path difference for the green line (5461 Å) of a Philips Hg high pressure lamp (93136 E). The line was isolated with a Jena-filter (OG1₁, BG20₅, BG18₃). The crosses were measured with the Savart plate and slit method and the rings with the method using a Wollaston-Françon plate. The dotted curves indicate the borders between which all points are to be found.

The intensity function given by the Fourier transform of the curve in figure 4 was calculated by means of this method with an interval length, h , of 0.5 nm except for the largest k where $h = 0.25$ nm, and the integration has been taken from $x = 0$ to $x = 8$ mm.

The results are given in figure 5. From this figure, the half width was found to be 3.0 cm^{-1} or 0.90 Å and the line width at 10 per cent 8.7 cm^{-1} or 2.6 Å .

In order to estimate the accuracy in our investigation, two points in the neighbourhood of the half value were calculated from the upper and lower dotted curves of figure 4 respectively. Between these curves, almost all of the points are

to be found. This calculation showed that the maximum error for one single measurement is of the order of 10 per cent (figure 5, dotted parts).

An elegant spectroscopic interpretation of visibility measurements is described by Terrien [7] by which he can obtain both the Doppler broadening and the resonance half width for symmetrical line profiles without self-absorption.

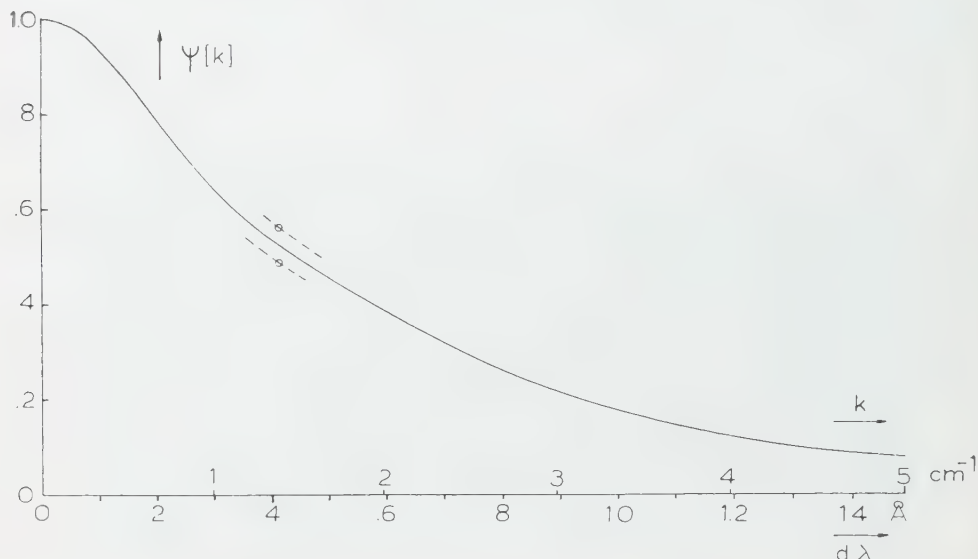


Figure 5. The intensity for the spectral line as a function of wave number calculated from the curve in figure 4. The two points at the half value were obtained from the dotted border curves of figure 4.

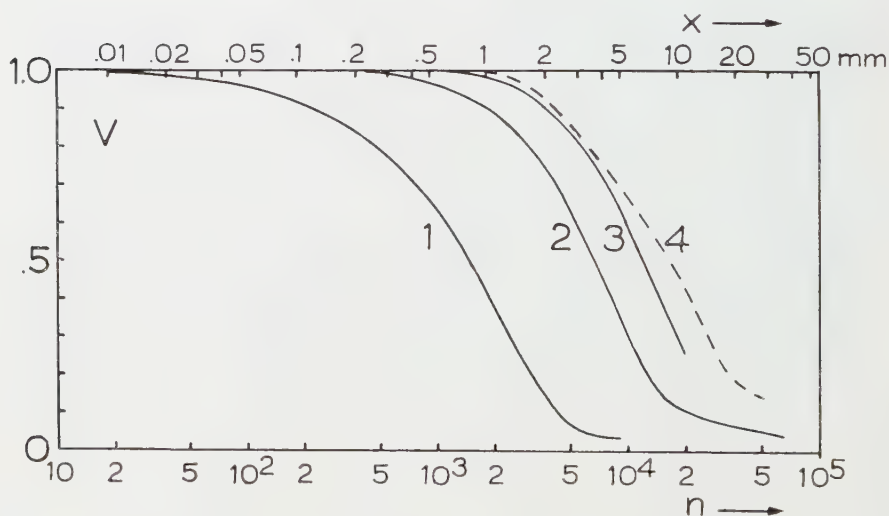


Figure 6. Visibility curves for the green line (5461 Å) as a function of interference order in logarithmic scale for some lamps in the laboratory. 1: same lamp as in figure 4; 2: special lamp, Luma; 3: same lamp as 2 but in connection with a 3.5 Å monochromator; 4: low pressure Hg Lamp, Philips 93123 E.

Some results from measurements on other lamps in the laboratory are represented by visibility curves against the order of interference in logarithmic scale (figure 6). From this it is easy to see the magnitude of visibility reduction for low orders, which is of importance for some interferometric applications.

The illuminating aperture causes for greater path differences a reduction in visibility [8]. Thus for a path difference of 25 mm and an illumination aperture of 3.3×10^{-3} (the case of curve 4 in figure 6) a correction of 11 per cent of the measured value should be applied. For 6 mm the correction is 1 per cent.

7. APPLICATIONS

Many of the physical properties of a radiating plasma are accessible by means of a study of spectral line broadening. This is true for astrophysical observations [2, 9] as well as for laboratory experiments. Now, in the latter category experiments to achieve the high temperatures necessary for fusion are of extreme interest at the present and many efforts have been made to follow the temperatures in the different experiments [10, 11, 12]. Our method should be a good alternative in some cases when first isolating the line under investigation with, for example, a Lyot-Öhman filter. The advantage over direct photometric measurements on spectral lines is that no correction for slit width of the spectrometer is necessary. Compared with the single Michelson interferometer, this technique has the advantage that all the points of the transform are obtained simultaneously, thus making it possible to work even when the light-source fluctuates and also when the sources are faint because the record integrates with respect to time.

On décrit une méthode par dédoublement pour déterminer les largeurs des raies spectrales et leurs formes à partir de la courbe de visibilité des franges à deux ondes en fonction de la différence de marche entre les surfaces d'onde qui interfèrent. La visibilité est la transformée de Fourier de la courbe donnant l'intensité de la raie spectrale. Dans chaque mesure, on détermine un nombre limité de points de la courbe de visibilité, mais ceci est suffisant pour avoir une idée sur toute la courbe, pourvu que les points soient convenablement choisis. L'image est enregistrée, de préférence, sur une plaque photographique qui est mesurée ensuite dans un microdensitomètre. Il s'ensuit que l'on peut étudier des sources de très faible intensité. Deux interféromètres à dédoublement, un peu différents, ont été utilisés: l'un avec une lame de Savart combinée avec une fente d'entrée et l'autre avec un prisme compensateur de Wollaston pour les grandes ouvertures. Dans ce dernier cas, il n'est pas nécessaire d'avoir une fente d'entrée et on peut associer l'interféromètre à un monochromateur à large bande sans perte d'intensité importante. La raie verte des lampes spectrales à mercure a été examinée et l'on décrit des mesures sur une lampe à haute pression.

Für die Bestimmung von Breite und Form von Spektrallinien aus der Sichtbarkeitskurve von Zweistrahlinterferenzen als eine Funktion der Wegdifferenzen zwischen den interferierenden Wellenfronten wird eine Shearing-Interferenzmethode beschrieben. Die Sichtbarkeit ist die Fourier-Transformierte der Intensitätsverteilung in der Spektrallinie. Es wird bei jeder Messung zwar nur eine begrenzte Anzahl von Punkten der Sichtbarkeitskurve bestimmt aber das genügt, um eine rohe Abschätzung der gesamten Kurve zu ermöglichen, wenn nur die Punkte geeignet gewählt werden. Das Bild wird zweckmässigerweise auf einer photographischen Platte festgehalten und dann mit einem Mikro-Densitometer ausgemessen. Auf diese Weise können Lichtquellen auch von sehr geringer Intensität untersucht werden. Es wurden zwei nur wenig voneinander verschiedene Shearing-Interferometer benutzt. Das eine arbeitet mit einer Savart-Platte und mit einem Eintrittsspalt, das andere mit einem Kompensationsprisma nach Wollaston für grosse Aperturen. In diesem zweiten Falle ist kein Eintrittsspalt nötig, und man kann die Anordnung mit

einem Breitband-Monochromator kombinieren, ohne dabei einen ernsthaften Verlust an Intensität in Kauf nehmen zu müssen. Es wurde die grüne Linie der Quecksilber-Spektrallampe untersucht, und es liegen auch Messungen an Hochdrucklampen vor.

REFERENCES

- [1] MICHELSON, A. A., 1892, *Phil. Mag.*, **34**, 280.
- [2] ALLARD, N., 1958, **19**, 340, and discussion thereafter.
- [3] VALASEK, J., 1949, *Theor. and Exp. Optics* (New York: J. Wiley & Sons), p. 142.
- [4] FRANÇON, M., 1952, *Rev. Opt.*, **31**, 65.
- [5] FRANÇON, M., and SERGENT, B., 1955, *Opt. Acta*, **2**, 182.
- [6] FILON, L. N. G., 1928, *Proc. roy. Soc. Edinb. A*, **49**, 38.
- [7] TERRIEN, J., 1959, Symposium on Spectroscopy, Teddington.
- [8] THORNTON, B. S., 1957, *Opt. Acta*, **4**, 147.
- [9] ARMSTRONG, E. B., 1958, *J. Phys. Radium*, **19**, 358.
- [10] THONEMAN, P. C., *et al.*, 1958, *Nature, Lond.*, **181**, 217.
- [11] II. Conf. on the Peaceful Use of Atomic Energy, paper 1520, Geneva.
- [12] HUGHES, T. P., and WILLIAMS, R. V., 1958, *Hilger Journal*, **5**, 19.

Eine Methode zur schnellen Prüfung der Leistungsfähigkeit von Objektiven

von F. BELOW und H. GRABKE†

Institut für Rundfunktechnik GmbH, Zweigniederlassung Hamburg

(Received 7 October 1959)

Die Messung der Helligkeitsverteilung im Bilde von Spalten stellt eine brauchbare Methode zur schnellen Prüfung von Objektiven dar. Die Spaltbreiten und der Abbildungsmaßstab lassen sich so wählen, daß die Ortsfrequenzen im Bild den wichtigsten Zeitfrequenzen im Videobereich von 1–10 MHz entsprechen. Die Grenzfrequenz erhält man aus der Steilheit der Anstiegsflanke im Oszillogramm. Die asymmetrischen Kurven erlauben mittels einer besonderen Vorrichtung eine genauere Bestimmung der Phasenfehler. Durch zusätzliche Verwendung von geeigneten Tiefpaßfiltern läßt sich der Einfluß eines Objektivs auf das Fernsehbild direkt erkennen und darstellen.

1. EINLEITUNG

In den Arbeiten von Ingelstam und seinen Mitarbeitern [3, 6], insbesondere einer Arbeit von Lindberg aus dem Jahre 1954 [3], sowie in späteren Veröffentlichungen von Robert L. Lamberts und seinen Mitarbeitern [10, 11] finden wir die grundlegenden Erkenntnisse der modernen Schnellprüfverfahren für fotografische Objektive. Danach haben sich grundsätzlich Schnellregistriermethoden als die geeignetsten bewährt, bei denen Testvorlagen—zweckmäßigerweise mit sinusförmiger Intensitätsverteilung—mit kontinuierlich veränderlicher Raumfrequenz benutzt werden. Aus der optischen Abbildung solcher Testvorlagen läßt sich für das optische System ein Frequenzgang herleiten, der nach Amplitude und Phase ausgewertet werden kann. In den genannten Arbeiten wird beschrieben, daß zur Erzielung sinusförmiger Intensitätsverteilung sowohl Sprossen-Schrift als auch Zacken-Schrift für die Testvorlagen Verwendung finden können, ohne daß Unterschiede in den Ergebnissen zu erwarten sind. Die Ergebnisse dieser Arbeiten sollen hier als bekannt vorausgesetzt werden. Zur Abtastung der Intensitätsverteilung in den Abbildungen der Testvorlagen wird grundsätzlich ein Mikro-Spalt von etwa $1\text{ }\mu\text{m}$ Breite mit einer dahinter angebrachten Multiplierphotozelle benutzt, deren Stromschwankungen über einen Schreiber oder Oszillographen registriert werden. Bezeichnet man die Intensitätsverteilung der Testvorlage mit $G(x)$, so ergibt sich deren Abbildung $F(x)$ in bekannter Weise als zweiseitiges Faltungsintegral der ersteren mit der Abbildungsfunktion $H(x)$ der Optik, die als die im gleichen Maßstab vergrößerte Abbildungsfunktion des Mikro-Spalt es gedeutet werden kann.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\xi) \cdot G(x - \xi) d\xi.$$

Diese Formel läßt sich sowohl nach Lindberg als auch nach Lamberts in einen Cosinus- und einen Sinus-Term zerlegen.

† Dr. H. Grabke ist am 16. Januar 1960 in Hamburg verstorben.

Beide Autoren haben Methoden angegeben, nach denen der Betrag des Amplitudenganges sowie der Phasenwinkel oder der Cosinus-Term bestimmt werden können, so daß ohne umständliche Rechenoperationen die Übertragungsfunktion eines Objektivs experimentell ermittelt werden kann [3, 6, 11]. Es kann natürlich auch mit Testen rechteckförmiger Intensitätsverteilung gearbeitet werden [7, 12]. Selbstverständlich ist in diesem Falle zu berücksichtigen, daß die Raumfrequenzen eine ganze Reihe von Oberwellen enthalten, die in der Rechnung und bei der Auswertung zu berücksichtigen sind [12].

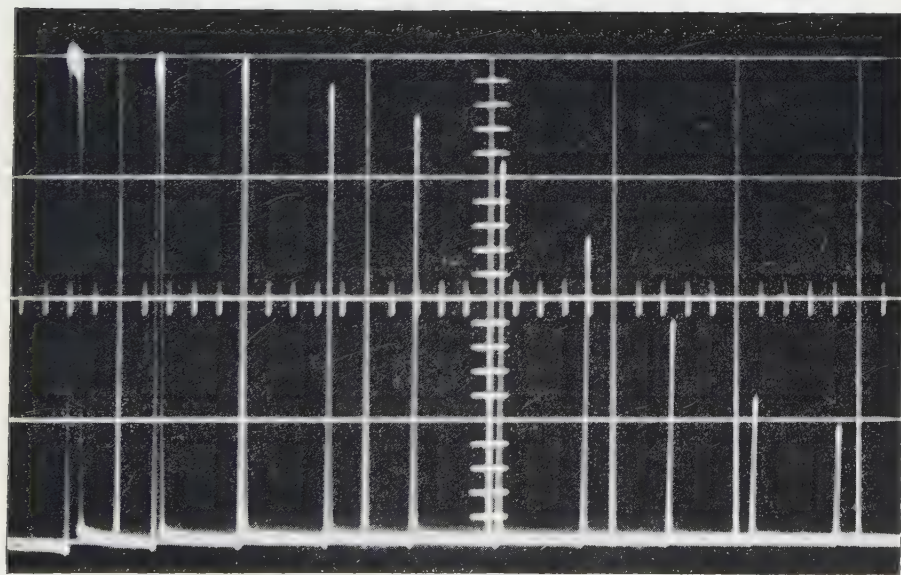
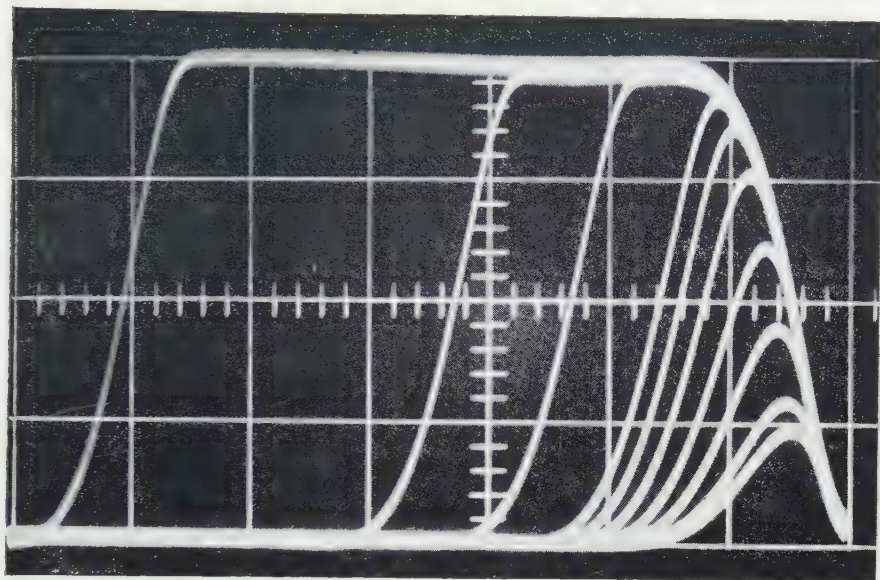
2. EINE METHODE MIT EINZELSPALTEN

Da ein einzelner Spalt ebenso wie ein Mäander Aufschluß über den Frequenzgang des Systems zu geben vermag, haben wir 10 Spalte verschiedener Breite in einer rotierenden Testvorlage untergebracht [14]. Das hat gegenüber einem kontinuierlich veränderlichen mäanderförmigen Test den Vorteil, daß in dem Oszillogramm zwischen den Intensitätsverteilungen der Einzelspalte immer eine eindeutige Nulllinie vorhanden ist, sodaß ein Gleichstromwert nicht berücksichtigt zu werden braucht. Die Intensitätsverteilung in der Abbildung der rotierenden Spalte wird nach der üblichen Methode über Mikro-Spalt, Zwischen-Optik und Fotozelle direkt auf einem Oszillografen sichtbar gemacht. Man erkennt daran sofort einen etwaigen Phasengang, dessen Größe allerdings rechnerisch ermittelt werden muß. An Hand des Oszillogramms kann sehr schnell eine exakte Einstellung der Schärfeebene vorgenommen werden. Diese Methode zeigt daher neben dem Vorteil einer schnellen Justierbarkeit des Prüflings auch noch denjenigen der sofortigen Erkennbarkeit des Verhaltens des Objektivs bezüglich Amplitude und Phase bei bestimmten Frequenzen. Die Spaltbreiten und der Abbildungsmaßstab wurden so gewählt, daß die sich in der Bildebene ergebenden Raumfrequenzen übertragen auf ein 625-Zeilen Fernsystem zeitliche Frequenzen im Videobereich von etwa 1–10 MHz ergeben. Figur 1 zeigt die Aufnahme eines derartigen Oszillogramms. Die Intensitätsverteilungen in der Abbildung der Spalte können oszillografisch übereinander oder nebeneinander geschrieben werden (vergl. Figur 1 (a), 1 (b)). Unterhalb einer bestimmten Spaltbreite wird die Maximalintensität der Leuchtdichteverteilung im Spaltbild nicht mehr erreicht. Der elektrische Teil der Apparatur muß selbstverständlich ausreichend breitbandig und phasenrein ausgelegt sein, um die Intensitätsverteilungen unverfälscht wiederzugeben. Es besteht jedoch ohne weiteres die Möglichkeit, dem Oszillografen einen Tiefpaß vorzuschalten, der die Grenzen eines Fernsystems analog nachbildet, so daß der Unterschied zwischen einem Oszillogramm mit sehr guter Optik und einem mit weniger guter Optik direkt den Einfluß des optischen Systems auf die Qualität des Fernsehbildes erkennen läßt. Die nach diesem Prinzip von uns entwickelte Methode gestattet es also, ein Objektiv sowohl absolut als auch im Zusammenhang mit einem Fernsystem zu untersuchen.

Um nun zahlenmäßige Angaben für den Techniker über die Qualität von Objektiven zu erhalten, sind an sich zwei verschiedene Methoden möglich.

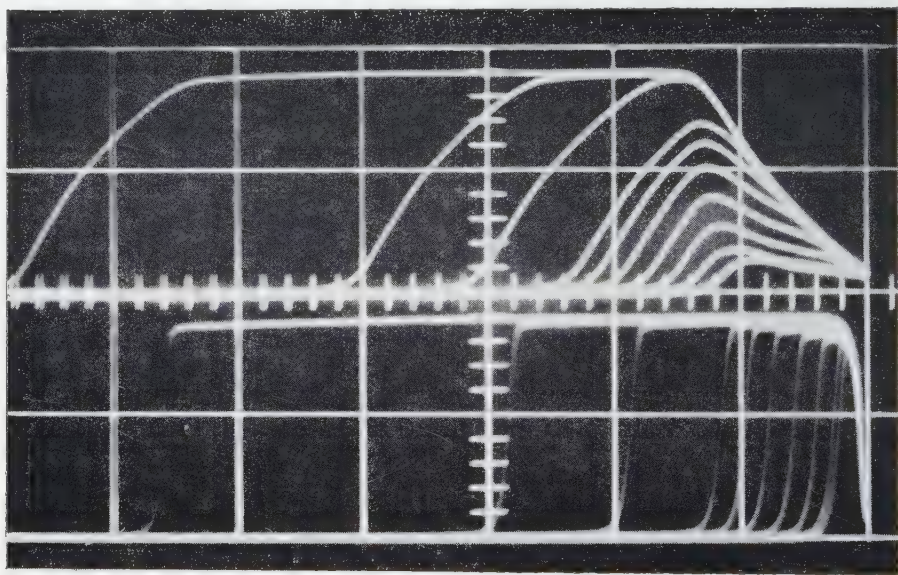
Man kann erstens aus der Steilheit der Anstiegsflanke für jedes Objektiv nach den Methoden der System-Theorie eine Grenzfrequenz $f_g = 1/2\tau$ angeben, wo τ die Anstiegszeit der Flanke darstellt [15]. Ist diese Frequenz merklich größer

als die Grenzfrequenz des Übertragungssystems, so bringt das Objektiv keine Verschlechterung. Die Genauigkeit einer solchen Bestimmung der Anstiegszeit aus dem Oszillogramm ist zwar nicht sehr groß. Es lassen sich aber aus ihrer Angabe die Eigenschaften eines Objektivs sehr gut übersehen. Bezüglich der Beurteilung seiner Eignung für Fernszwecke ist jedoch hierbei Vorsicht geboten [14], wenn nicht der bereits erwähnte Tiefpaß benutzt wird.



Figur 1. (a) Oszillogramm der Spaltfolge über ein optisches System übereinander geschrieben. (b) Oszillogramm der Spaltfolge über ein optisches System nebeneinander geschrieben.

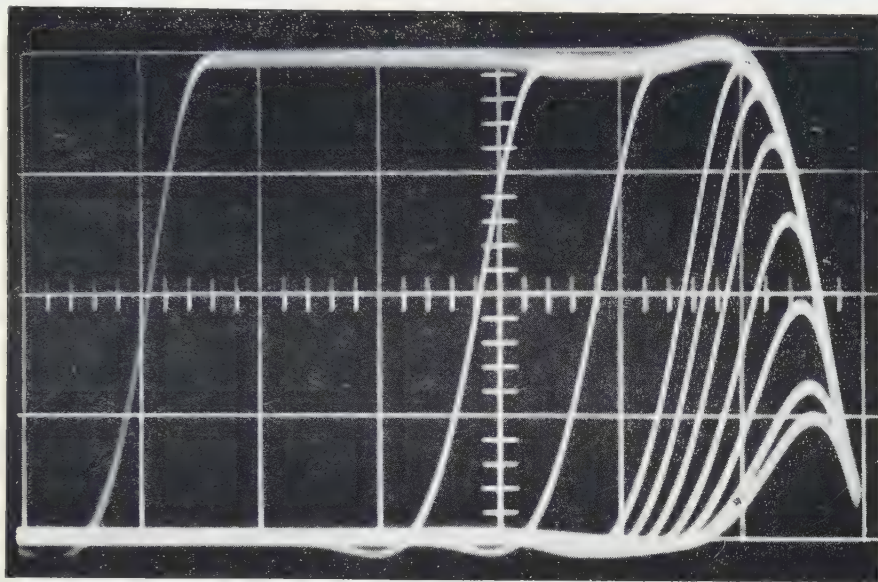
Die zweite Möglichkeit besteht darin, jeder Spaltbreite die Frequenz zuzuordnen, die der Breite einer Sinushalbwellen entspricht. Dann kann man für jede dieser Frequenzen eine Dämpfung angeben, die die Amplitude der maximalen Leuchtdichte im Spaltbild zu der größtmöglichen Amplitude der Leuchtdichte in Beziehung setzt. Die Genauigkeit der Ablesung ist in diesem Falle natürlich wesentlich größer als nach der Methode der Bestimmung der Anstiegszeit. Der Dämpfungsverlauf läßt sich bei einer Reihe von diskreten Frequenzen sofort erkennen und sicher auf 0,1 dB genau angeben. Es lassen sich sogar mit einer gewissen Unsicherheit noch 0,01 dB bestimmen. Faßt man die bei verschiedenen Parametern erzielten Meßergebnisse graphisch zusammen, so lassen sich die Eigenschaften der Optik sehr schnell überschauen, wie z.B. in Bild 4-6 erkennbar. Bei außeraxialen Bildpunkten lassen die asymmetrischen Intensitätsverteilungskurven auf Phasengang beziehungsweise Coma und Astigmatismus schließen (s. Figur 2). Durch Kippen der Testvorlage um 90° sind in üblicher Weise Messungen sowohl für die sagittale als auch die meridionale Bildschale durchführbar.



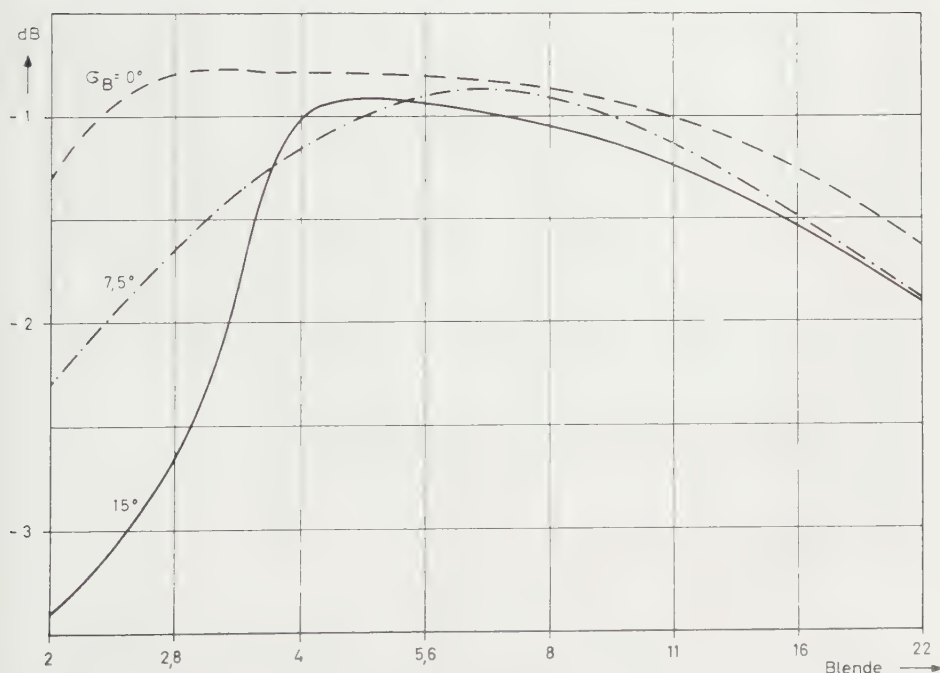
Figur 2. Vergleich eines Oszillogramms wie in Figur 1 (a), jedoch Bildpunkt außerhalb der optischen Achse im Vergleich zur Original-Spaltfunktion.

Eine zusätzliche Abtastvorrichtung direkt hinter der rotierenden Spaltvorlage, auf deren optischem Weg nur ein sehr kleiner optischer Fehler auftritt, der gegenüber den anderen zu vernachlässigen ist, ermöglicht es, praktisch die Original-Rechteckfunktionen der Spalte abzulesen. Eine Umschaltvorrichtung oder ein Zweistrahloszillograf gestattet es, diese Original-Rechteckfunktion und die Übertragungsfunktion der Optik direkt übereinander abzubilden, sodaß ein unmittelbarer Vergleich und somit die Bestimmung von Phasengängen möglich ist. Auch in die Hilfsvorrichtung läßt sich ein Tiefpaßfilter, welches die Eigenschaften eines elektrischen Übertragungssystems nachbildet, einschalten, sodaß direkt die Wirkung des optischen Systems auf das Fernsehübertragungssystem

dargestellt werden kann. Figur 2 zeigt einen solchen Vergleich, jedoch ohne Tiefpaßfilter. Die Unsymmetrie zeigt das Vorhandensein eines Phasenfehlers, d.h. die Aufnahme wurde bei einem außeraxialen Bildpunkt gemacht. Figur 3 zeigt ein Oszillogramm mit Tiefpaßfilter. Man erkennt deutlich die durch das Filter verursachten Überschwinger.



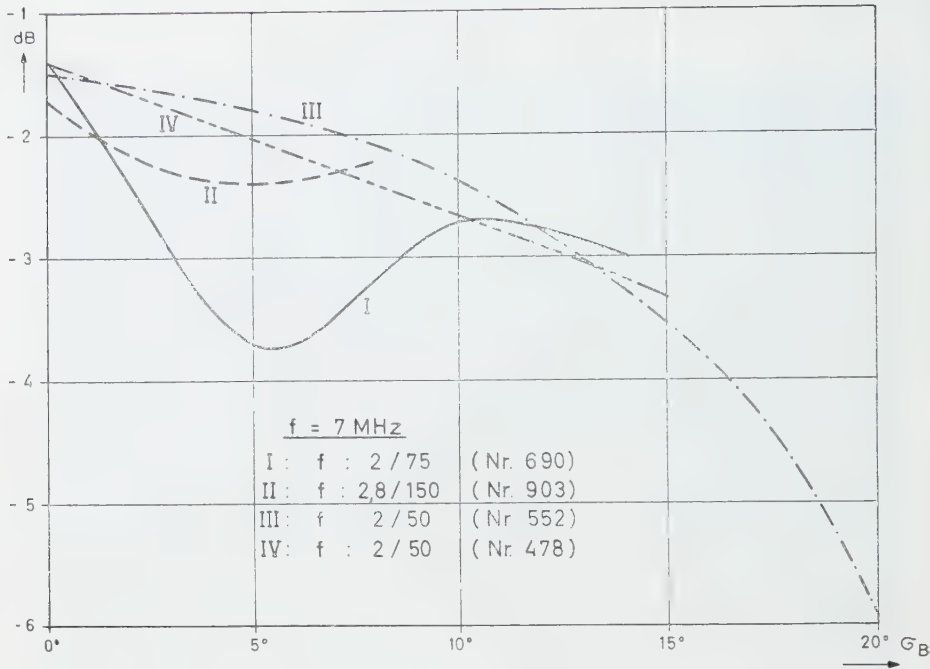
Figur 3. Oszillogramm wie in Figur 1 (a), jedoch mit Tiefpaßfilter.



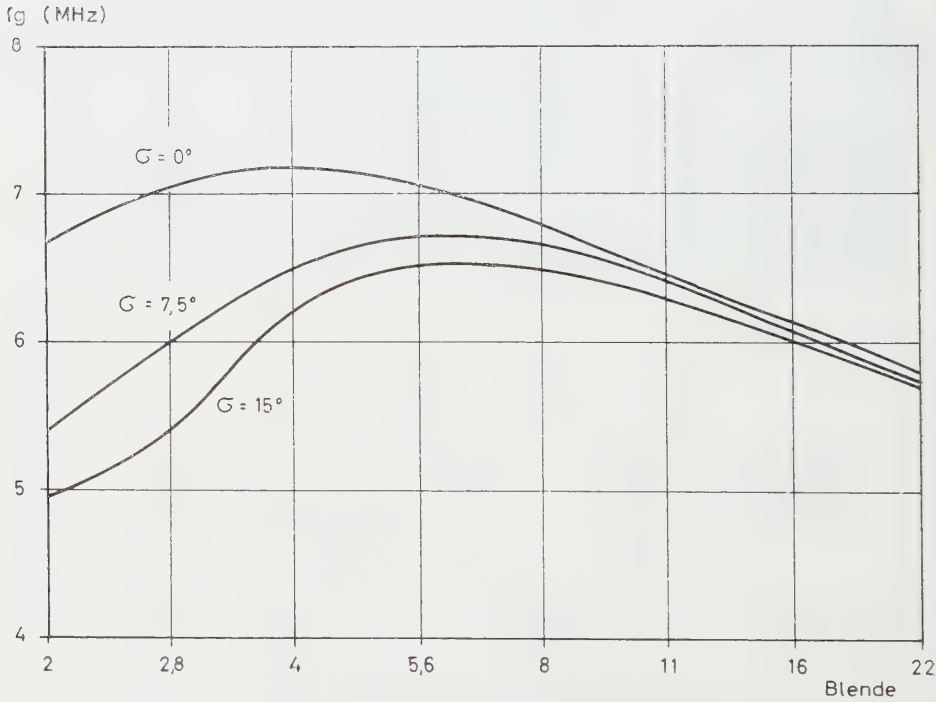
Figur 4. Amplitudenverluste in dB bei $f = 7$ MHz für ein Objektiv $f = 2/50$ (Nr. 478).

3. SCHLUSS

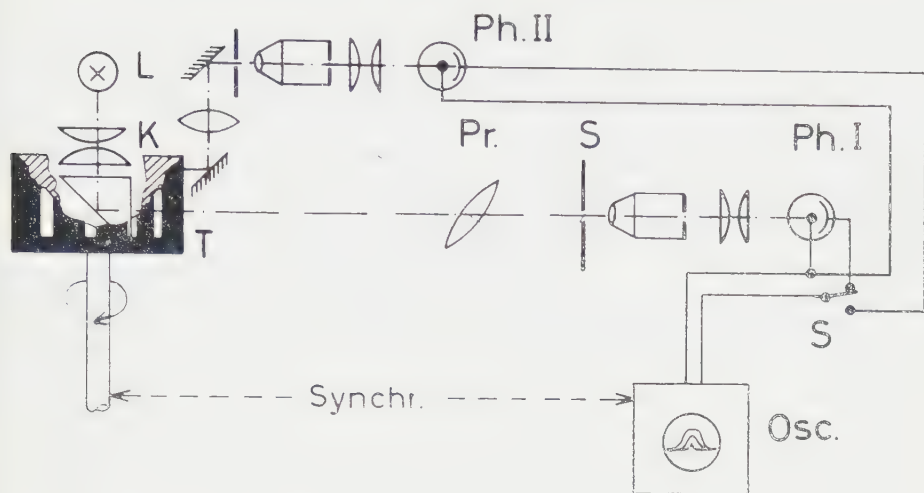
Leider ist die Apparatur zur Zeit noch nicht soweit durchgebildet, daß direkte Vergleichsmessungen damit vorgenommen werden konnten. Wir hoffen



Figur 5. Amplitudenverlust bei $f=7 \text{ MHz}$ für verschiedene Objektive.



Figur 6. Grenzfrequenzkurven für Objektiv Nr. 478, $f=50 \text{ mm}$.



aber, in absehbarer Zeit soweit zu sein, daß Schnellmessungen an beliebigen Objektiven routinemäßig durchgeführt werden können. Das letzte Bild (Figur 7) zeigt das Blockbild der Meßapparatur.

Die obengenannten Arbeiten werden im Institut für Rundfunktechnik, Zweigniederlassung Hamburg, durchgeführt und dienen der Bestimmung der Eigenschaften von Objektiven bezüglich ihrer Eignung für das 625-Zeilen-System des europäischen Fernsehens. Die Verfasser danken Herrn Dieter Frenzel für seine sorgfältigen Meßarbeiten und rechnerischen Auswertungen sowie für seine Anregungen und Mithilfe bei der Durchführung der Untersuchungen.

The measurement of the light distribution in slit images proves to be a practical method for a quick examination of optical systems. The widths of the slits and the magnification can be chosen so that the spatial frequencies in the image correspond to the principal time frequencies in the video-region of 1-10 Mc/s. The limit of the frequencies can be obtained by the steepness of the slope in the oscillogram. A special arrangement permits a more precise measuring of the phase error from the asymmetric curves. The influence of the optical system on the television image may be studied by the additional use of suitable low frequency filters.

La mesure de la distribution des éclaircissements dans l'image de fentes fournit une méthode utilisable pour le contrôle rapide des objectifs. Les largeurs de fente et le grandissement peuvent être choisis de telle sorte que les fréquences spatiales dans l'image correspondent aux fréquences temporelles les plus importantes dans le domaine Video de 1 à 10 MHz.

La fréquence limite est obtenue à partir de la pente de la remontée de la courbe dans l'oscillogramme. Les courbes asymétriques permettent, à l'aide d'un dispositif approprié, une détermination plus précise des erreurs de phase. L'utilisation de filtres passe bas supplémentaires permet de reconnaître et de déterminer directement l'influence d'un objectif sur l'image de télévision à l'infini.

LITERATUR

- [1] SPROSON, W. N., 1953, *B.B.C. Quart.*, **8**, 55.
- [2] NAT. BUREAU OF STANDARDS, 1954, Circular 526, 29 April.
- [3] LINDBERG, P., 1954, *Opt. Acta*, **2**, 80.
- [4] HOPKINS, H. H., 1955, *Proc. roy. Soc. A*, **231**, 91.

- [5] HOPKINS, H. H., 1955, *Opt. Acta*, **2**, 23.
- [6] INGELSTAM, E., DJURLE, E., und SJÖGREN, B., 1956, *J. opt. Soc. Amer.*, **46**, 707.
- [7] ROSENHAUER, K., und ROSENBRUCH, K. J., 1957, *Opt. Acta*, **4**, 21.
- [8] SPROSON, W. N., 1957, B.B.C. Engineering Monograph No. 15, December.
- [9] LACOMME, P., 1957/58, *Acta Electronica*, **2**, 263.
- [10] LAMBERTS, R. L., HIGGINS, G. H., und WOLFE, R. N., 1958, *J. opt. Soc. Amer.*, **48**, 487.
- [11] LAMBERTS, R. L., 1958, *J. opt. Soc. Amer.*, **48**, 490.
- [12] FRENZEL, D., 1958, *Rundfunktechnische Mitteilungen*, **2**, 20.
- [13] BELOW, F., und GRABKE, H., 1959, *Rundfunktechnische Mitteilungen*, **3**, 94.
- [14] GRABKE, H., und BELOW, F., 1959, *Rundfunktechnische Mitteilungen*, **3**, 145.
- [15] KÜPFMÜLLER, K., 1952, *Die Systemtheorie der elektrischen Nachrichtenübertragung* 2. Auflage (Stuttgart: Verlag, Hirtzel).
- [16] FRENZEL, D., 1959, *Rundfunktechnische Mitteilungen*, **3**, 235.

Semiconducting photo-emitters†

by A. H. SOMMER
RCA Laboratories, Princeton, N.J.

In the visible range of the spectrum, the quantum efficiency of metallic photo-emitters is below 0.1 percent because of low light absorption, energy loss of electrons by scattering and high work function. On the other hand, high efficiency can be obtained from some complex semiconducting materials which combine a small energy band gap with low electron affinity. Outstanding among these materials are the mono- and multi-alkali antimonides. Optical, electrical, photoelectric and other properties of these emitters are described which permit the interpretation of their characteristics in terms of self-consistent band models. Following a brief mention of the two photo-emitters symbolized by the formulas Ag-O-Cs and Bi-Ag-O-Cs , all photocathodes of high quantum efficiency are compared with regard to their usefulness in various applications. It is shown that for all wavelengths below 8000 Å the three-alkali cathode of the composition $[\text{Cs}]\text{Na}_2\text{KSb}$ is superior to other materials.

1. GENERAL CONSIDERATIONS

The number of photo-emissive materials of high sensitivity to visible light is limited because high quantum efficiency depends on the combination of three essential properties. Firstly, incident radiation in the spectrum range under consideration must be strongly absorbed. Secondly, the photo-electrons produced by the absorbed radiation must be able to reach the vacuum interface from the point of excitation. Thirdly, the surface barrier (work function) must be lower than the energy of the absorbed photons.

In metals, none of these conditions is satisfactorily fulfilled, at least in the visible and near-visible spectrum range with which we are here concerned. Most of the incident light is reflected, electrons produced at a distance from the vacuum interface lose their energy by collision with free electrons (electron scattering) and the lowest work function values of metals are in the range of 2 eV, thus restricting the response to visible light of 1.5 to 3 eV energy.

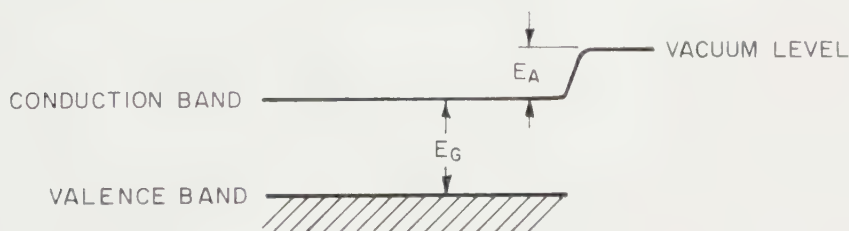


Figure 1

† This paper was read at the Fifth Conference of the International Commission for Optics in Stockholm, August 1959.

By contrast with metals, semiconductors have high absorption coefficients, provided the energy of the radiation exceeds the value of the forbidden gap E_G (figure 1). Furthermore, the virtual absence of free electrons enables photo-electrons to reach the vacuum interface from a considerable depth (several hundred ångströms) without appreciable loss of energy. In semiconductors, the height of the surface barrier is the electron affinity E_A , represented in the energy band model by the difference between the bottom of the conduction band and the vacuum level (see figure 1). Experience has shown that there are materials with E_A values below 1 ev.

From the foregoing it is apparent that one should make a systematic search for semiconductors combining low E_G and low E_A values to obtain photo-emitters with high quantum efficiency over the whole visible spectrum. In reality, the most useful emitters have been found by purely empirical methods, partly because in the past the above basic considerations were not fully appreciated, partly because our understanding of semiconductors has not yet reached the stage where materials combining desired values of band gap and electron affinity can be predicted and synthesized on a rational basis.

2. THE ALKALI ANTIMONIDES

During the past 30 years, three types of emitters with high efficiency in the visible spectrum have been discovered; these are the mono- and multi-alkali antimonides, the silver-oxygen-caesium (Ag-O-Cs) and the bismuth-silver-oxygen-caesium (Bi-Ag-O-Cs) cathodes. Of these, only the alkali antimonides have been extensively studied and their characteristics in terms of semiconductor physics are now fairly well understood. The Cs-Sb cathode was discovered by Görlich [1] in 1936; later it was found [2] that it consisted essentially of a stoichiometric compound Cs_3Sb with semiconducting properties. The peak quantum efficiency of this cathode can be as high as 30 per cent with a long wave threshold near 6500 Å. Corresponding 3:1 compounds of Sb with the other alkali metals Rb, K, Na and Li have lower quantum efficiency and shorter threshold wavelengths in this order. However, recent work has shown that some compounds of Sb with two or more alkali metals (multi-alkali cathodes [3, 4]) have higher quantum efficiency and longer threshold wavelength than Cs_3Sb . Table 1 shows the relevant values for all the investigated alkali antimonides; the most surprising feature is the high performance of the Na_2KSb cathode in comparison with the mono-alkali cathodes Na_3Sb and K_3Sb . Figure 2 shows typical spectral response curves of the alkali antimonides.

Table 1

Material	λ_{peak}	Maximum quantum efficiency at λ_{peak} (per cent)	λ_0 (1 per cent of peak) (Å)
Na_3Sb	2700	2	3700
K_3Sb	3500	7	5000
Cs_3Sb	4000	20	6200
Na_2KSb	3700	25	6500
$(\text{Cs})\text{Na}_2\text{KSb}$	4000	35	8500

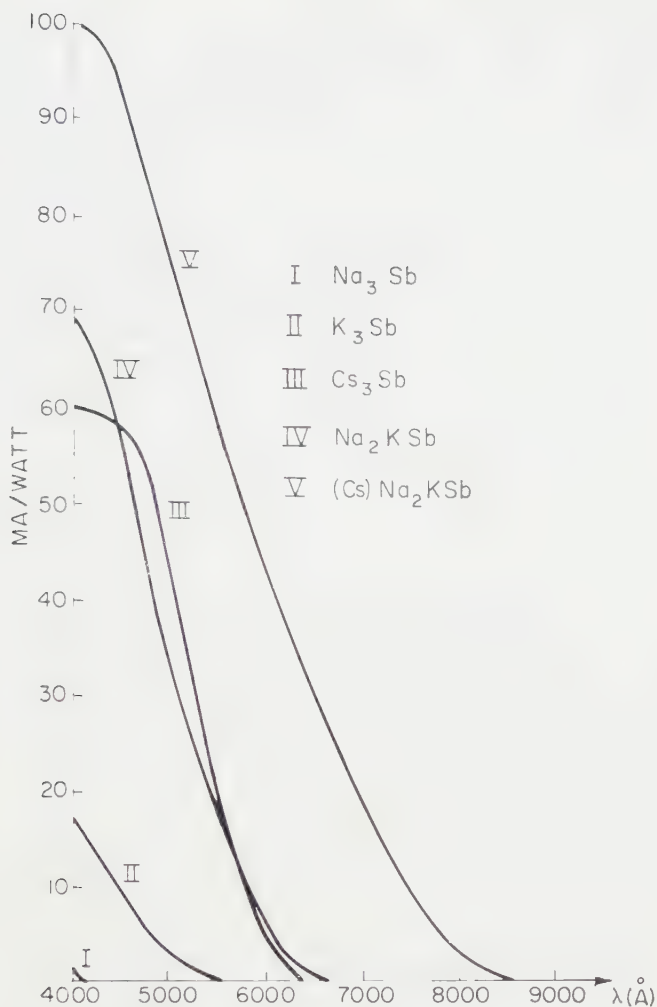


Figure 2

In order to explain the characteristics of the antimonides in terms of energy band models, Spicer [5] has measured light absorption, photo-conductivity and photo-emission of all the materials as a function of wavelength. The band gap energy E_G can be identified with the threshold of absorption and photo-conductivity. The threshold of photo-emission occurs at a higher photon energy (shorter wavelength) which—referring to figure 1—corresponds to the energy value $E_A + E_G$. Thus the value for the electron affinity E_A can be determined as the difference $(E_A + E_G) - E_G$. In these considerations it is assumed that the electrons are excited from the valence band rather than from impurity levels; the high quantum efficiency of photo-emission and the high absorption coefficients of the alkali antimonides seem to justify this assumption†.

† It should be noted that near the threshold there exists an experimental problem in separating excitation from the valence band and from impurity levels which has been taken into consideration in the values derived by Spicer [5].

Table 2 shows the values for E_G and E_A obtained by Spicer from the described measurements. The table shows that the band gap energy of the multi-alkali cathode Na_2KSb is similar to that of Na_3Sb and K_3Sb , but that the electron affinity is considerably lower; in other words, the higher quantum efficiency and longer threshold wavelength seem to result from a lowering of the electron affinity. A further reduction of the electron affinity is achieved by incorporating Cs into the surface of Na_2KSb , thus producing the three-alkali cathode $(\text{Cs})\text{Na}_2\text{KSb}$. In addition to the evidence provided by chemical analysis, the assumption that Cs enters only the surface layer of the three-alkali cathode is confirmed by the fact that light absorption and photo-conductivity remain unchanged.

Table 2

Material	E_G (ev)	E_A (ev)
Na_3Sb	1.1	2.0-2.4
K_3Sb	1.1	1.1-1.8
Cs_3Sb	1.6	0.45
Na_2KSb	1.0	1.0
$(\text{Cs})\text{Na}_2\text{KSb}$	1.0	0.55

If we compare the two antimonides with low E_A values, i.e. Cs_3Sb and $(\text{Cs})\text{Na}_2\text{KSb}$, it appears from table 2 that the higher efficiency of the three-alkali cathode may be attributed to the lower band gap energy. The outstanding performance of the three-alkali cathode is thus explained by a combination of the small band gap energy of the Na_3Sb and K_3Sb compounds with the low electron affinity of Cs_3Sb .

It is reasonable to assume that changes of the energy band structure of the alkali antimonides are correlated with changes in their crystal structure. X-ray studies of these materials have confirmed this assumption. Na_3Sb and K_3Sb are known [6] to have a hexagonal (Na_3As) structure. For Cs_3Sb , a cubic structure has been established [7]. Na_2KSb differs radically from Na_3Sb and K_3Sb in having a cubic structure [8] which is similar to, though not identical with, that of Cs_3Sb . The most recent experiments [9] have shown that if the ratio of Na to K exceeds the 2:1 value, the samples contain a mixture of Na_2KSb crystallites and Na_3Sb crystallites. This indicates that Na_2KSb is a well defined and stable compound and confirms the stoichiometric formula suggested [3] on the basis of chemical analysis of photo-cathodes. The accuracy of these analyses was limited by experimental difficulties so that the results of the x-ray work represent a welcome corroboration.

Additional information about the semiconducting characteristics of the alkali antimonides has been obtained from resistance measurements. Recent studies [5, 10] indicate that the most efficient emitters, i.e. Cs_3Sb , Na_2KSb and $(\text{Cs})\text{Na}_2\text{KSb}$ tend to be p-type, whereas Na_3Sb and K_3Sb are n-type. Using the concept of band bending due to defect levels, Spicer [11] has suggested that there may be a basic correlation between measured low electron affinity and p-type conduction.

3. THE Ag-O-Cs CATHODE

While the characteristics of the alkali antimonides can be represented satisfactorily in terms of energy band models, our understanding of the other two cathode materials of practical importance is still rudimentary.

The Ag-O-Cs cathode is characterized by a low peak quantum efficiency of approximately 1 per cent and a threshold wavelength in the infra-red at between 12000 and 15000 Å. The activated cathode consists of one or more caesium oxides, elementary silver and, possibly, a small amount of elementary caesium. The uncertainty about the chemical identity of the semiconducting Cs-oxide(s) involved in the mechanism of photo-emission is one of the reasons why a satisfactory model of the emission mechanism has not yet been established. The low quantum efficiency and the response to radiation of well below 1 eV energy are compatible [11] with the assumption that the photo-electrons originate from impurity levels in the forbidden gap. This would contrast with the excitation from the valance band which undoubtedly accounts for the photo-emission from the antimonides.

4. THE Bi-Ag-O-Cs CATHODE

The Bi-Ag-O-Cs cathode is of such a complex nature that no serious attempt has been made to interpret its behaviour in terms of semiconductor band models. Chemically, the activated cathode is likely to consist of Cs₃Bi (a I-V semiconductor, analogous to Cs₃Sb), elementary Ag, a small but essential amount of one or more Cs-oxides, and possibly some elementary Cs.

5. COMPARISON OF PRACTICAL PHOTO-EMITTERS

The essential characteristics of the most important practical photo-emitters are summarized in table 3 and in figure 3. In addition to peak quantum efficiency and long wavelength threshold, the table contains values for the sensitivity to tungsten light ($\mu\text{A/lumen}$) and for the thermionic emission at room temperature. The latter is an important parameter in low light level applications because the noise associated with the thermionic emission adversely affects the signal-to-noise ratio.

Referring to table 3, a few general rules can be stated which determine the choice of photo-cathode for some important applications.

Table 3

Cathode	λ_{peak}	Maximum quantum efficiency at λ_{peak} (per cent)	λ_0 (1 per cent of peak)	Maximum ($\mu\text{A/lm}$)	Thermionic emission (amps/cm ²)
Ag-O-Cs	8500	1	12000	60	10^{-12}
Cs ₃ Sb	4000	20	6200	90	10^{-15}
Bi-Ag-O-Cs	4500	10	7500	90	10^{-14}
Na ₂ KSb	3700	25	6500	60	$< 10^{-16}$
(Cs)Na ₂ KSb	4000	35	8500	230	10^{-16}

1. For wavelengths above 8000 Å, the Ag-O-Cs cathode is the only available photo-emitter. However, the high thermionic emission of this cathode eliminates its use at low light levels in all applications where infra-red response is not essential.

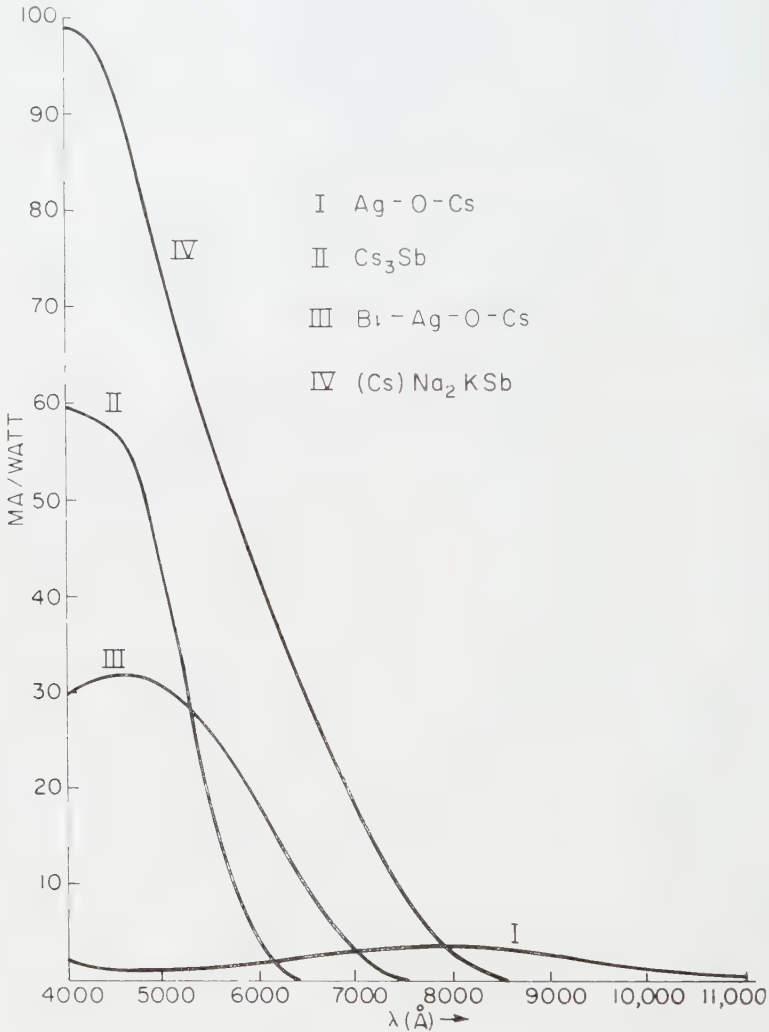


Figure 3

2. For scintillation counting, where only blue response is required, the Cs₃Sb cathode has been used in the past almost exclusively because it combines high efficiency in the 4000 Å region with relatively low thermionic emission. In the future, the (Cs)Na₂KSb cathode may replace it because of its higher quantum efficiency and lower thermionic emission. Where extremely low thermionic emission is essential, the Na₂KSb cathode will prove of great value.

3. For television and other applications requiring substantially panchromatic response, the Bi-Ag-O-Cs cathode has found widespread use. Here, too, the three-alkali cathode is gaining increasing importance because of higher

sensitivity throughout the visible spectrum combined with lower thermionic emission.

4. In general, it can be stated that for all applications at wavelengths below 8000 Å, the (Cs)Na₂KSb cathode is superior to all other emitters, both in high quantum efficiency and (except for the Na₂KSb cathode) in low thermionic emission. Whether it will completely replace the Cs₃Sb and Bi-Ag-O-Cs cathodes in the future will depend only on economic considerations. The three-alkali cathode is already extensively used in multiplier photo-tubes, image tubes and television pick-up tubes for applications involving extremely low light levels. As typical examples the fields of astrophysics, spectroscopy and scintillation track imaging may be mentioned.

ACKNOWLEDGMENT

The author wishes to thank Dr. W. E. Spicer for valuable contributions and discussions.

Dans la partie visible du spectre, le rendement quantique des photoémetteurs métalliques descend en-dessous de 0,1 pour cent à cause de la faible absorption de lumière, des pertes d'énergie des électrons dues à la diffusion et du travail de sortie élevé. D'un autre côté, on peut obtenir un grand rendement pour quelques substances semiconductrices complexes qui ont à la fois une faible largeur de bande interdite et une faible affinité électronique. Les plus remarquables parmi ces substances sont les antimoniures mono- et multi-alcalins. On décrit leurs propriétés optiques, électriques, photoélectriques et autres, qui permettent d'interpréter leurs caractéristiques à l'aide de modèles de bandes. Après une courte description des deux photémetteurs symbolisés par les formules Ag-O-Cs et Bi-Ag-O-Cs, on compare toutes les photocathodes de rendement quantique élevé en ce qui concerne leur utilité dans diverses applications. On montre que pour toutes les longueurs d'onde inférieures à 8000 Å, la cathode tri-alcaline de composition [Cs]Na₂KSb est supérieure aux autres.

Im sichtbaren Bereich des Spektrums ist die Quantenausbeute metallischer Photokathoden unter 0,1 Prozent, weil die Lichtabsorption gering ist und die Elektronen durch Streuung und hohe Austrittspotentiale Energie verlieren. Andererseits kann man bei einigen komplexen Halbleitermaterialien, die kleinen Bänderabstand mit niedriger Elektronenaffinität verbinden, eine hohe Ausbeute erreichen. Unter diesen Materialien ragen die Mono- und Multialkali-Antimonide besonders hervor. Die optischen, elektrischen, photoelektrischen und andere Eigenschaften dieser Strahler werden beschrieben, so daß man ihre charakteristischen Eigenschaften in Form von Bändermodellen interpretieren kann. Es folgt eine kurze Beschreibung von zwei Photokathoden die nach den Formeln Ag-O-Cs und Bi-Ag-O-Cs aufgebaut sind. Alle Photokathoden hoher Quantenausbeute werden im Hinblick auf ihre Brauchbarkeit für verschiedene Verwendungszwecke miteinander verglichen. Für alle Wellenlängen unter 8000 Å sind die Kathoden mit drei Alkali von der Zusammensetzung [Cs]Na₂KSb den anderen Materialien überlegen.

REFERENCES

- [1] GÖRLICH, P., 1936, *Z. Phys.*, **101**, 335.
- [2] SOMMER, A. H., 1941, *Nature, Lond.*, **148**, 468; 1943, *Proc. phys. Soc. Lond.*, **55**, 145.
- [3] SOMMER, A. H., 1955, *Rev. sci. Instrum.*, **26**, 725.
- [4] SOMMER, A. H., 1956, *I.R.E. Trans. Nucl. Sc.*, **3**, 8.
- [5] SPICER, W. E., 1958, *Phys. Rev.*, **112**, 114.
- [6] BRAUER, G., and ZINTL, E., 1937, *Z. phys. Chem. B*, **37**, 323.
- [7] JACK, K. H., and WACHTEL, M. M., 1957, *Proc. roy. Soc. A*, **239**, 46.
- [8] SCHER, J. J., and ZALM, P., 1959, *Philips Res. Rep.*, **14**, 143.
- [9] MCCARROLL, W. H., 1960, *J. Phys. Chem. Solids* (in the press).
- [10] SOMMER, A. H., 1958, *J. appl. Phys.*, **29**, 1568.
- [11] SPICER, W. E., 1958, *R.C.A. Rev.*, **19**, 555.



Visibility of a fine line in intermittent illumination

by D. H. FENDER and STELLA MAYNE

J. J. Thomson Physical Laboratory, Reading University, England

(Received 1 August 1959)

The visibility of a fine line in intermittent illumination has been examined in detail for one subject. It is shown that there are deviations from a regular response and that these effects can be associated with certain physiological frequencies exhibited by the subject, notably the tremor motions of the eyeball and the α -rhythm of the subject's cortical activity.

1. INTRODUCTION

The subjective variation in brightness which accompanies change in the frequency of intermittent illumination is well known [1]; indeed the similar relation which exists for the appearance of black and white sector discs rotating in steady illumination was first reported by Brucke [2] in 1864. Attempts have been made to utilize the apparent enhanced brightness to facilitate the performance of visual tasks.

Crozier and Wolf [3], in part of their exhaustive study of flicker fusion contours, report modification of these contours when the test field contains non-flickering regions and thus resolution of a more finely sub-divided field becomes possible with a lower flash intensity. These workers state that their results are consistent with the hypothesis that the existence of contrast edges, even when not visually resolved, serves to enhance the number of neural units concerned in the discrimination of flicker.

This has led to the speculation "are the flickering parts of the field themselves more visible when seen against unflickering regions?" Senders [4] has investigated this problem. She determined the median intensity of the light required to permit resolution of gratings seen in intermittent illumination and found that at all the flicker frequencies and light time fractions employed the mean energy required for resolution was less than that predicted by the Talbot-Plateau law. She concludes that intermittent illumination is more effective than steady illumination of the same mean intensity but notes that the deviations observed are not maximal at 8-12 flashes per sec as might be expected according to Bartley [5].

Senders however did not measure the subjective brightness of the intermittent illumination; this was done by Nachmias [6] who also examined the visibility of gratings. He took into account the modification involved in the mean intensity when the flash duration becomes an appreciable fraction of the total presentation time and also the effect of duration of stimulus on the visual effect of a light as described by Graham and Cook [7]. His experiments, with these refinements, confirm the findings of Senders, that is, visual acuity is improved in intermittent illumination except for very short exposures of the field. For exposures shorter than 0.25 sec Nachmias finds that 'steady' illumination gives better acuity.

Some experiments have also been described by Gerathewohl and Taylor [8] who determined the readability of an Anoxia Demonstration chart under varying conditions of illumination. They conclude that the effect of flicker is to lower the number of lines read and that it is doubtful if flicker can be used to improve visibility under conditions of low contrast. Senders [9] however has shown that if the results of Gerathewohl and Taylor are cast into mean intensity form then their results are in agreement with hers, namely that flickering illumination does improve contrast discrimination.

Having established the existence of this phenomenon, Senders then discusses some possible causes and suggests that interaction may occur between the intermittent illumination and the physiological nystagmus of the eye, the refractory periods of the retinal receptors and the neural processes central to the retina. Now all of these effects occur at frequencies fairly well defined in each individual; it is improbable therefore that the experiments referred to above would offer very much information on this point since the experimenters have only worked at isolated frequencies, viz. Senders 4, 6, 8, 10, 25-30 and 89 c.p.s.; Gerathewohl and Taylor 9 and 15 c.p.s.; Nachmias 8, 16, 24 and 48 c.p.s.

The experiment described below has been designed to avoid this criticism. A detailed investigation of the visual performance of one subject in intermittent illumination is reported; the frequency range has been covered in narrow contiguous frequency bands. The object of the experiment was to attempt to identify any variation in visual acuity with flicker frequency and to compare these variations with other physiological frequencies exhibited by the subject.

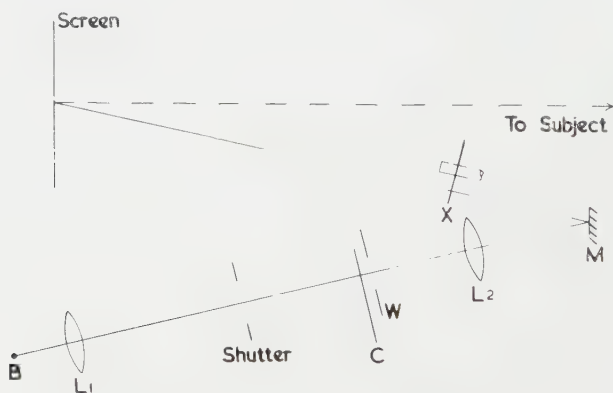


Figure 1. Optical system for projecting flickering image.

2. EXPERIMENTAL METHOD

The subject was required to identify the position of a vertical black bar on a white field under conditions of varying frequency of intermittence of the illumination. The target was formed by casting the black image of a wire on a bright field using the optical system shown in figure 1. The light from the Pointolite ball B is rendered parallel by the lens L_1 and then focused by the lens L_2 to form an image of the Pointolite ball at X. A sector disc interrupts the beam at X, and this ensures that the changes in illumination occur uniformly over the whole of the screen simultaneously. The mirror M simply folds the optical path for

convenience. The wire is mounted on a carrier C which has three possible settings located by a spring loaded ball rising into one of three notches. The carrier moves behind a window W which forms the frame of the projected image and the lens L_2 forms an image of the wire on a white screen which has a black surround. Low intensity lamps at the edges of the screen were used to indicate the upper and lower ends of the three possible positions of the image of the wire. The target on the screen was 15 cm high and 20 cm wide; the vertical bar extended for the full height of the patch and was 1 mm wide. The lateral displacement of the bar between adjacent settings was 3.8 cm on the screen.

The luminance of the white screen between trials was 0.23 ± 0.02 m.L.; during a trial with flicker the luminance was 0.31 ± 0.01 m.L.; and during a trial with continuous illumination the luminance was 0.39 ± 0.03 m.L. The sector disc gave a one-to-one light-to-dark ratio and was carried on the spindle of a servomotor whose speed remained constant to a high degree of accuracy. The frequency of interruption of the light beam was continuously monitored using a photocell and frequency meter.

The subject was required to report verbally the position—left, middle, or right—of the image of the black bar displayed in the 5 sec viewing period. The experimenter recorded the response and in order to maintain the subject's interest told him whether or not his guess was correct, 25 sec were allowed between each exposure. The subject viewed the screen binocularly and was seated at such a distance from the screen that he scored 50 per cent success in a pilot run of ten exposures. The average viewing distance was about 5 m, thus the test line subtended an angle of about 0.7 min arc and the possible positions of the wire were separated by about 26 min arc.

For convenience the frequency range was divided into two groups: 2–16 c.p.s. and 13–30 c.p.s. Nine desired frequency settings were used in each group and the presentation was randomized for frequency and position of the bar, giving 27 combinations. These combinations were presented in the same random cyclic order at all trials and the subject entered the cycle at a different point on successive trials.

3. RESULTS

The flicker frequency of the illumination was measured for each observation. The values obtained were histogrammed and were seen to be distributed in a number of narrow peaks. The frequency range was then divided into a number of bands each of which embraced a peak in the frequency distribution. All of the responses obtained from observations at flicker frequencies within this band were then considered as one class. The raw scores are given in the table.

From the results given in this table the percentage correct response has been calculated for each frequency and plotted against the mean flash duration in figure 2. This graph contains three points which are not derived from the results given in the table. The extreme right-hand point on the diagram was obtained by exposing the target for the 5 sec viewing period in continuous illumination. It may be argued that this represents a change in the experimental condition since it demands a fixed phase relationship between the chopper (assumed to be interrupting the light at 0.1 c.p.s.) and the shutter which exposes the target. This fixed phase relationship is not demanded for observations at higher frequencies. A subsidiary investigation showed that the subject scored complete

success in identifying the position of the line during a single flash even when this was shortened to about 2 sec. The phase relationship is not so important in this case. The 100 per cent point therefore lies somewhere between 2 and 5 sec and it will be seen later that, within this range, its precise position on the time scale is not very important. The pair of points at the left of the diagram were derived from an experiment similar in design to that described earlier but covering a higher frequency range.

The resulting curve appears to be sigmoid in basic form; indeed one might expect this since the ordinate essentially represents the chance of seeing the target detail during a short flash. The sigmoid does not reduce to zero, however, for as the flash duration is reduced the total number of flashes presented during the viewing period is increased and the curve levels out when the interflash period is sufficiently short for information to be carried over from one flash to the next. The extremes of the curve were taken to occur at 60 per cent and 100 per cent and a sigmoid curve between these values was fitted to the experimental results by the normal method of probit analysis. This curve is sketched in as a full line in figure 2.

The purpose of this research however is to look for any departure from a 'regular' response—to identify any fine structure in the curve. The variation of any particular point from the value predicted by the sigmoid has therefore been examined as follows. The deviation of each point from the predicted value

Frequency range (c.p.s.)	Flash duration (milliseconds)	Total presen- tations	Total correct
1.4 to 2.0	250 to 357	35	28
2.2 to 2.8	179 to 227	33	24
3.8 to 4.4	114 to 132	74	50
5.1 to 5.7	88 to 98	43	23
5.8 to 6.4	78 to 86	48	26
7.2 to 7.8	64 to 70	68	43
8.7 to 9.3	54 to 58	78	35
10.1 to 10.2	49 to 50	10	5
10.3 to 10.5	48 to 49	26	15
10.6 to 10.9	46 to 47	35	25
11.0 to 11.2	45 to 45	12	7
12.3 to 12.9	39 to 41	78	48
13.0 to 13.6	37 to 38	86	54
13.9 to 14.5	34 to 36	71	46
15.2 to 15.3	33 to 33	15	9
15.4 to 15.8	32 to 32	77	44
15.9 to 16.3	31 to 31	65	31
17.6 to 18.2	27 to 28	72	43
19.6 to 20.2	25 to 25	61	38
21.8 to 22.4	22 to 23	65	36
23.6 to 24.2	21 to 21	69	39
26.2 to 26.8	19 to 20	63	35
28.2 to 28.8	17 to 18	60	35
30.4 to 31.0	16 to 16	64	40

was calculated and the standard error σ of these deviations was then calculated. This process was performed on the raw scores shown in the table; thus points arising from classes with small populations are automatically ascribed low weight. In figure 2 the points are encoded as follows:

$\times \equiv \text{deviation} < \sigma$; $\circ \equiv \sigma \leq \text{deviation} \leq 2\sigma$; $\square \equiv \text{deviation} > 2\sigma$.

4. DISCUSSION

As a whole the sigmoid curve fits the data of figure 2 reasonably well; a χ^2 test indicates that the fit is significant at the 95 per cent level and there are only five points (those indicated by \circ or \square) whose deviation from the sigmoid curve can be said to have any great significance. Consider first the four points which are below the sigmoid and are linked by the dotted line. These points indicate a tendency for the visibility of the target to fall below the expected value in the

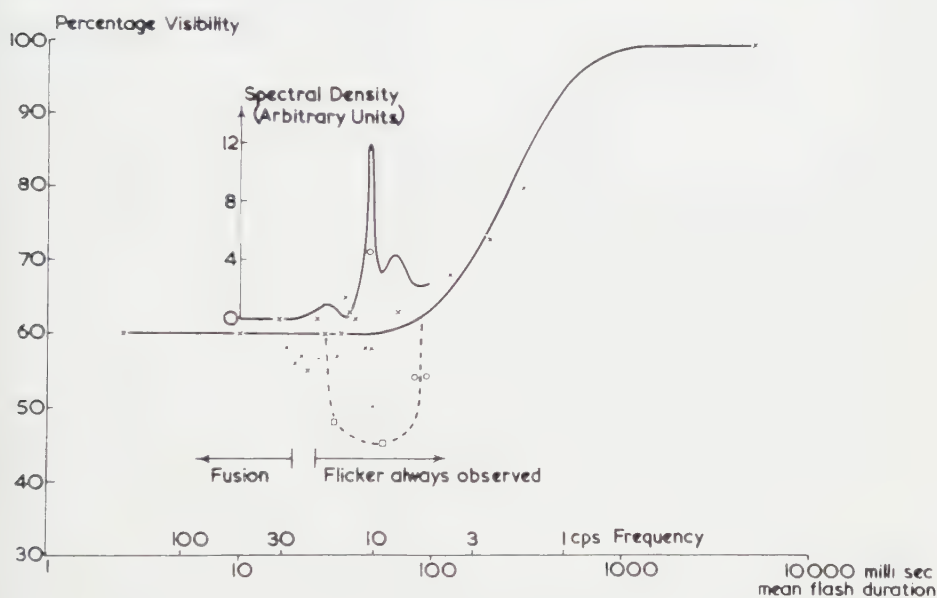


Figure 2. Visibility of a fine line in flickering illumination. The upper curve shows (in arbitrary units) the frequency distribution of energy in the signal forming an electroencephalograph record for the subject.

frequency range 5–16 c.p.s. Now it has been argued by many authors, e.g. Marshall and Talbot [10], Ditchburn [11], that the perception of a boundary between two areas of different brightness depends to a large extent on the involuntary motion of the eyeball. This motion causes a corresponding motion of the image on the retinal receptors subjecting some of them to change in illumination and thus initiating the typical on-off responses in the nervous pathways. Experiments by Ditchburn and Fender [12] or Riggs *et al.* [13], in which an optical system is used to cast an image which remains stationary on the retina despite involuntary eye movements, substantiate this hypothesis to some extent for contrast discrimination is found to fail intermittently in these circumstances.

Further experiments by Ditchburn *et al.* [14] have sought to identify the components of eye movements which are responsible for the maintenance of

normal visual acuity. For one subject it would appear that small amplitude tremor at frequencies ranging from about 4 to 12 c.p.s. is most effective in this respect.

If a scene illuminated intermittently is examined in normal vision, then it is possible that combination effects occur between the tremor frequencies and the frequency of the illumination. In the situation examined in this experiment we may imagine a retinal receptor lying on one of the boundaries between the dark line and the surrounding bright field. One component of the tremor motion of the eyeball would swing this receptor to and fro from dark to light, so producing the change of illumination which is assumed to be necessary if the boundary is to be perceived. If the field illumination is interrupted at the same frequency as the tremor and in phase with it, then the time pattern of illumination on this particular receptor will be unchanged. If the two are out of phase then the receptor will receive no illumination at all. In general some condition between these two extremes will exist and the effect of the flickering illumination will be to reduce the probable magnitude of the on-off responses initiated in the receptors on which the boundaries of the image lie. This in turn would diminish the likelihood of the line being perceived.

If it is accepted that a scanning motion produced by tremor in the frequency range 4–12 c.p.s. is necessary in order to maintain good acuity, then the illumination of the retinal image must be effectively continuous over the scanning period. This is satisfied for flicker frequencies which are either appreciably higher or lower than the tremor motion, but retinal illumination will be modified by the interaction between the intermittent illumination and the effect of the tremor motion in the frequency range 4–12 c.p.s.

Those receptors which lie well away from the boundaries of the image of the line are of course subjected continually to an on-off cycle of response by the flickering illumination. This may increase the signals generated by the receptors in the nervous pathways, but it has been suggested by Uttley [15], Platt [16] and others that the perception of form is based on a recognition of a conditional probability in the changing pattern of stimulation received by the brain. A coordinated response from a whole mass of receptors illuminated with intermittent light would therefore contain no information leading to the recognition of form.

The results of the present experiment have shown that four points lie significantly below the sigmoid in the region of eye tremor frequencies, indicating a decrease in visual acuity in this range. This experimental finding is consistent with the hypotheses advanced above.

A frequency analysis of an EEG record for the subject was also prepared. The resultant curve is shown in figure 2 and it will be seen that it has a well-marked peak at 10.4 c.p.s.—the α -rhythm for this subject. This peak coincides with the one point which lies significantly above the sigmoid, and is perhaps evidence for the cortical driving suggested by Bartley [17, 18].

5. CONCLUSION

The aim of the present work in making a detailed study of the visual acuity of one subject in intermittent illumination was to attempt to associate any variation in acuity with other physiological frequencies exhibited by the subject. We have seen that intermittent illumination at frequencies comparable with the effective

eye tremor decreased the subject's acuity. Conversely the interaction with the normal α -rhythm of the subject generates heightened acuity. Thus if the illumination is to be flickered to facilitate the performance of a visual task the frequency of intermittence must be 'tuned' to the subject with some care.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors wish to thank Professor R. W. Ditchburn for his advice and encouragement; Dr. M. B. Clowes has also taken part in some most helpful discussions.

This work has been supported in part by a research grant No. B-1233 from the Department of Health, Education and Welfare, Public Health Service, U.S.A.

On a examiné en détail pour un seul sujet la visibilité d'une ligne fine en éclairage intermittent. On montre qu'il y a des déviations par rapport à une réponse régulière et que ces effets peuvent être associés à certaines fréquences physiologiques présentées par la sujet, notamment les mouvements de tremblement du globe de l'oeil et le rythme α de l'activité corticale du sujet.

Die Sichtbarkeit einer dünnen Linie bei intermittierender Beleuchtung wurde für einen Beobachter genauer untersucht. Es zeigt sich, daß es dabei Abweichungen vom normalen Verhalten gibt und daß diese Wirkungen in Verbindung gebracht werden können mit gewissen physiologischen Eigentümlichkeiten des Beobachters. Hierbei ist besonders an die Zitterbewegungen des Augapfels und den α -Rhythmus in der Großhirnrinde des Beobachters zu denken.

REFERENCES

- [1] BARTLEY, S. H., 1938, *J. exp. Psychol.*, **23**, 313.
- [2] BRUCKE, E., 1864, *Wien. Ber.*, **49**, 21 January.
- [3] CROZIER, W. J., and WOLF, E., 1944, *J. gen. Physiol.*, **27**, 401.
- [4] SENDERS, V. L., 1949, *J. exp. Psychol.*, **39**, 453.
- [5] BARTLEY, S. H., 1941, *Vision* (New York: Van Nostrand), p. 138.
- [6] NACHMIAS, J., 1958, *J. opt. Soc. Amer.*, **48**, 726.
- [7] GRAHAM, C. H., and COOK, C., 1937, *Amer. J. Psychol.*, **49**, 654.
- [8] GERATHEWOHL, S. J., and TAYLOR, W. F., 1953, *J. exp. Psychol.*, **46**, 278.
- [9] SENDERS, V. L., 1954, *J. exp. Psychol.*, **47**, 135.
- [10] MARSHALL, W. H., and TALBOT, S. A., 1942, *Biol. Symp.*, **7**, 117.
- [11] DITCHBURN, R. W., 1955, *Opt. Acta*, **1**, 171.
- [12] DITCHBURN, R. W., and FENDER, D. H., 1955, *Opt. Acta*, **2**, 128.
- [13] RIGGS, L. A., RATLIFF, F., CORNSWEET, J. C., and CORNSWEET, T. N., 1953, *J. opt. Soc. Amer.*, **43**, 495.
- [14] DITCHBURN, R. W., FENDER, D. H., and MAYNE, S., 1959, *J. Physiol.*, **145**, 98.
- [15] UTTLEY, A. M., 1954, *Electroenceph. clin. Neurophysiol.*, **6**, 479.
- [16] PLATT, J. R., 1956, *Symposium on Information Theory in Biology*, Ed. H. P. Yockey (Pergamon Press, 1958).
- [17] BARTLEY, S. H., 1951, *J. Psychol.*, **32**, 57.
- [18] BARTLEY, S. H., 1951, *J. Psychol.*, **32**, 217.



Semiconductors and infra-red spectroscopy†

by R. A. SMITH

Royal Radar Establishment, Malvern, England

The use of semiconductors to provide extremely sensitive and fast infra-red detectors is discussed; in particular, recent work on InSb detectors for the spectral region 3μ – 5.5μ is described and also the extension of photoelectric detection to 135μ using germanium doped with antimony. The use of such detectors has led to an extension of infra-red techniques which in turn has led to some notable advances in our knowledge of the fundamental properties of semiconductors. A number of the more recent advances based on infra-red absorption and emission spectroscopy using single crystals are discussed.

1. EARLY OBSERVATION OF PHOTO-ELECTRIC EFFECTS

One of the earliest indications of the remarkable and characteristic properties of the class of materials now known as semiconductors was the observation of their sensitivity to light; the appearance of small voltages across certain crystals when illuminated was noted, and changes in electrical resistance were also observed. Later, these effects were also observed in the infra-red, particularly in certain minerals in the form of metallic sulphides such as galena (PbS) and in some metallic oxides such as Cu_2O . The possible use of these effects, known respectively as the photo-voltaic and photo-conductive effects, to provide sensitive light detectors has long been appreciated; since, originally, the available sensitivity did not compare favourably with that of the human eye or with the photographic plate, this use was not developed till the advantages of the rapid response of copper oxide and selenium photo-cells were realized, and these cells became widely used for scanning cinematograph sound tracks, and for other similar applications. Later, developments of photo-emissive cells and photo-multipliers also made the use of photo-voltaic and photo-conductive light detectors unprofitable when the highest sensitivity was required. The simplicity of the latter, however, has recently brought them into widespread use in their modern form as silicon and germanium photo-diodes or photo-transistors.

2. INFRA-RED DETECTORS

In the infra-red, however, it has been quite otherwise; the eye is not sensitive to this radiation, and only with great difficulty has the sensitivity of photographic plates been extended to a wavelength of the order of 1.3μ . Again, although photo-cathodes have been made to operate to this wavelength, they are not very sensitive for wavelengths greater than 1.0μ . Until photo-conductive infra-red detectors were developed the only effect of infra-red radiation which could be used for its detection at wavelengths greater than 1.3μ was its heating effect, and the detectors in use were mainly bolometers and thermocouples. These have

† This paper was read at the Fifth Conference of the International Commission for Optics in Stockholm, August 1959.

been developed to an advanced stage for some time and, although there has been a considerable increase in speed of operation in modern instruments, they have shown little increase in absolute sensitivity in the last half century. The history of their development and modern improvements have been discussed in detail by the author and his colleagues [1]. It is interesting to note that the Schwarz thermopile [2], the most widely used modern detector of this type, is based on the properties of semiconductors.

By far the greatest advance in the detection of infra-red radiation has resulted from the development of the photo-conductive type of detector. This really started in 1920 with the 'thalofide' cell of T. W. Case [3], although this type of detector provides little sensitivity at wavelengths beyond 1.1μ . It was the advent of detectors using PbS, and later PbTe and PbSe, that provided the great step forward enabling photo-electric detection to be obtained with a sensitivity considerably in excess of that of even the best thermopiles and bolometers, and with much more rapid response. PbS detectors were developed during World War II in Germany and later in other countries and gave high sensitivity out to a wavelength of about 3μ at room temperature and to nearly 4μ when cooled with liquid air. PbTe detectors such as those developed by A. S. Young [4] in our laboratory at Malvern, when cooled with liquid air, provided, until quite recently, the most sensitive infra-red detectors at wavelengths between 4μ and 5.5μ ; PbSe detectors made in the same way, have less sensitivity but extend the available spectral region to about 7μ . The properties of these detectors have also been described in detail by the author and his colleagues [1, 5], and will not be discussed further in this paper. More recent developments of cooled single-crystal infra-red detectors using the intermetallic compound semiconductor InSb indicate that these will soon make PbTe detectors obsolete; the single-crystal detectors are much easier to make, are faster, and as sensitive as the PbTe detectors. Single-crystal detectors, using the photo-magnetic effect, have been described by C. Hilsum and I. M. Ross [6], and detectors using the photo-conductive effect have been developed in our laboratory by D. G. Avery, D. W. Goodwin and Alison E. Rennie [7]. These two types of detector, mainly for use at room temperature, have been discussed and compared by D. H. Lee and D. H. Roberts [8]. For the highest sensitivity, cooling with liquid air is required, and cooled photo-conductive detectors of high sensitivity have been described by D. W. Goodwin [9] and further discussed by V. Roberts [10]. Whereas for the lead salts PbS, etc. an *increase* in the longwave limit of sensitivity is obtained on cooling, the reverse is true for InSb, the sensitive cooled detectors being useful only to about 5.5μ , while the less sensitive room-temperature detectors are effective to about 7.5μ . Sensitive InSb detectors using large-area p-n junctions have been described by M. R. Lasser, P. Cholet and E. C. Wurst [11]. The spectral response of some modern detectors is shown in figure 1.

Attempts to extend the spectral response of this type of detector by using semiconductors with a smaller forbidden energy gap have not, so far, been very successful. Recent developments using the photo-conductivity produced by photo-ionisation of impurity centres in Ge and Si, however, show great promise, and detectors of this type for the spectral region $1-5\mu$, using gold-doped Ge have also been described by Lasser, Cholet and Wurst [11]; commercial forms are also advertised in the U.S.A. A detector has been developed in our laboratory

by S. J. Fray and J. F. C. Oliver [12] for the spectral region 50μ – 120μ . It combines, with increased sensitivity, the advantage of having a much more rapid response than the best thermal detector we have found for this spectral region, namely a Golay cell. The sensitive element is a high quality crystal of Ge doped with Sb so as to have a room-temperature resistivity of about $2\Omega\text{cm}$. The crystal is 1.5cm thick and has a sensitive area of 0.1cm^2 . It is cooled to the temperature of liquid helium and when fully shielded has a resistance of $5 \times 10^5\Omega$. Radiation falls on the sensitive element after passing through a crystal quartz window at room temperature in an outer vacuum case and through a fused quartz window at 4.2°K . In operation, the resistance of the element falls to about $2.5 \times 10^5\Omega$ owing to thermal radiation passing through the windows. The detector is sensitive between 50μ and 137μ and the sensitivity is better than that of the Golay cell between 65μ and 120μ ; at the maximum response is about eight times more sensitive for the same bandwidth; the response time is less than 10^{-5}sec . A detector of this type but using Ge doped with Zn has been described by E. Burstein, S. Jacobs and G. S. Picus [13]; this is sensitive to about 40μ .

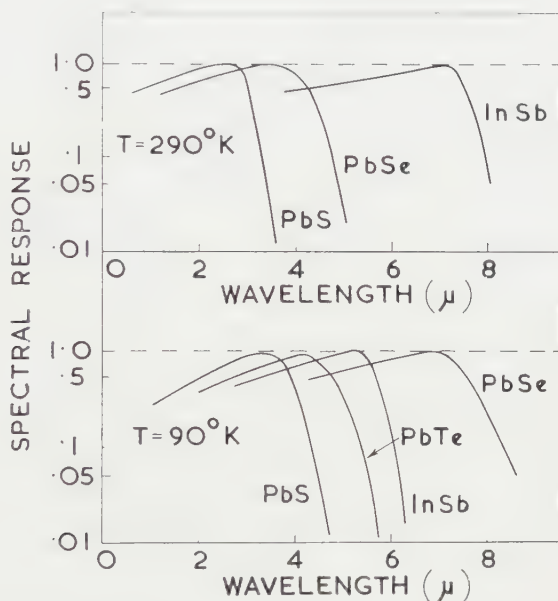


Figure 1. Spectral response of some modern infra-red detectors at 290°K and 90°K .

2.1. Present use of detectors

Summarizing, one might say that at the present moment, for highest sensitivity between about 0.8μ and 4μ one would use a PbS detector; for the range 3μ – 4μ this would have to be cooled with liquid air. For shorter wavelengths cooling may or may not give increased sensitivity depending on the type of detector. For the spectral range 4 – 5.5μ one would use a liquid-air cooled PbTe detector, or preferably an InSb or gold-doped Ge detector, if obtainable. For wavelengths greater than 5.5μ a very good thermocouple, bolometer or Golay cell would normally give the best sensitivity, unless a special detector for the spectral region to be studied based on impurity-doped Ge, Si, or some other semiconductor were

available; up to 7μ , a PbSe detector might be used with advantage, if speed of response is important. Some recent developments in photo-cathodes indicate that it might be possible to increase sensitivity in the near infra-red by the use of a photo-multiplier; this type of detector is not yet, however, generally available to spectroscopists.

2.2. *Future outlook*

There still seems to be a possibility of developing photo-detectors with wavelengths out to about 10μ using intrinsic photo-conductivity. Using mixed crystals of HgTe and CdTe, W. D. Lawson, S. Nielsen, E. H. Putley and A. S. Young [14], have made semiconducting crystals in our laboratory with photo-response at wavelengths longer than 10μ ; sensitivity, however, does not yet compare favourably with that available from thermal detectors. For wavelengths greater than 10μ the future seems to lie with impurity-doped semiconductors using photo-ionization of the impurities; such detectors will, of course, have to be cooled, possibly down to liquid helium temperatures (see above). It seems unlikely that controllable impurity levels will exist in semiconductors with ionization energies much less than 0.01 eV, and it follows that this type of detector will not be of use for wavelengths much in excess of 120μ . For longer wavelengths we shall have to depend for some time on thermal detectors, but developments in microwave techniques, such as MASER action, open up interesting possibilities for the future [15, 16].

3. STUDY OF SEMICONDUCTORS BY MEANS OF INFRA-RED SPECTROSCOPY

The use of semiconductors as detectors of infra-red radiation has led to an intensive study of the properties of PbS, PbTe, PbSe, and more recently of InSb, so that apart from Si and Ge, which have been even more intensively studied because of their use in the development of rectifiers and transistors, more is probably known about these semiconductors than about any others. The properties of these lead salts have been reviewed by the author [17, 18], and more recent work has been discussed by R. S. Allgaier and W. W. Scanlon [19]. Modern developments in infra-red spectroscopy, particularly the availability of cheaper and better optical components, encouraged by the advances in detection technique, have had important repercussions on the use of infra-red spectroscopy for the study of the fundamental properties of semiconductors. Measurements in the region of the spectrum where the absorption coefficient is high ($> 10^4 \text{ cm}^{-1}$), which may be expected to yield some of the most interesting data, have not been possible until fairly recently with single-crystal specimens. The technique of preparing single-crystal specimens only a few microns thick is a difficult one, but the misleading results obtained with evaporated films has made it essential. Measurements on such thin-crystal specimens have usually been made with the crystals mounted on some form of backing, but recent work in our laboratory [20] has shown the need for mounting them freely, when cooled to low temperatures, otherwise the position of the absorption lines and edges will be changed by strains in the crystal due to differential expansion with respect to the support. Techniques for removing the crystal from its support, after preparation, and for mounting it in a cryostat, have been developed.

In spite of the very large amount of work that has been carried out on semiconductors, surprisingly little accurate and detailed knowledge is yet available of their fundamental properties, except for Si and Ge. These elements have been successfully studied mainly because of the extraordinary degree of purity with which they may now be obtained in the form of nearly perfect single crystals. Even the most important parameter of all, the magnitude of the forbidden-energy gap, is known to an accuracy of better than 10 per cent for very few semiconductors, and, apart from Si and Ge and possibly InSb, almost nothing precise is known of the form of the energy bands occupied by the conduction and valence electrons. In 1954 a great step forward in the elucidation of the band structure of Si and Ge took place with the introduction of cyclotron resonance using microwaves; these are unfortunately almost the only materials which it has been possible to study in detail by this technique. Within the last two years, the information available from cyclotron resonance has been greatly augmented by infra-red spectroscopy, and a gate has been opened to further advances. In order to appreciate this it is necessary to examine in some detail the various mechanisms by means of which infra-red radiation may cause transitions in a semiconductor with absorption of a quantum of the incident radiation, and to discuss the relative importance, under various circumstances, of the different types of transition which can take place.

4. ELECTRONIC BAND STRUCTURE OF SEMICONDUCTORS

The simplest picture of the electronic levels in a crystalline solid is shown in figure 2; the electrons may occupy a series of allowed bands, which may or may not overlap and which may have gaps of forbidden-energy values between them. The inner electrons occupy completely filled bands which lie well below

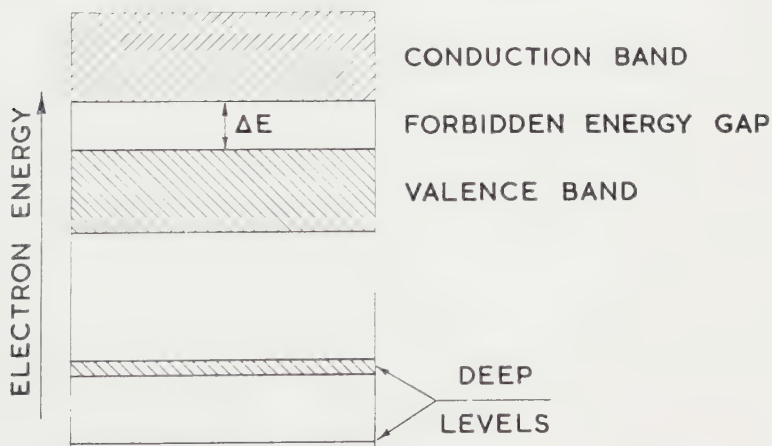


Figure 2. Electronic energy levels in a perfect crystal.

the upper occupied or 'valence' band. This band contains the outer atomic electrons which are responsible for the chemical binding between atoms. A semiconductor is a material, which, in its pure state, at the absolute zero of temperature, has its valence band just filled with electrons, there being two, with opposite spins, in each level in accordance with the Pauli principle; also, a

forbidden-energy gap of amount ΔE separates the next highest allowed energy band from the valence band. Conventionally, we call a material a semiconductor only if ΔE is sufficiently small. If ΔE is more than about 2 eV the material (apart from ionic conduction) would be an insulator at room temperature since only a very small number of electrons would be thermally excited into the higher or 'conduction' band. There is no general agreement as to what is the upper limit of ΔE which enables a material to be classed as a semiconductor; it would be rather nice to set this so that if $h\nu = \Delta E$ the frequency ν lies in the infra-red, setting the limit for ΔE at about 1.5 eV. In general, materials with $0 < \Delta E \leq 1.5$ eV are called conventional semiconductors and those for which $\Delta E > 1.5$ eV are called high-energy-gap semiconductors or insulators.

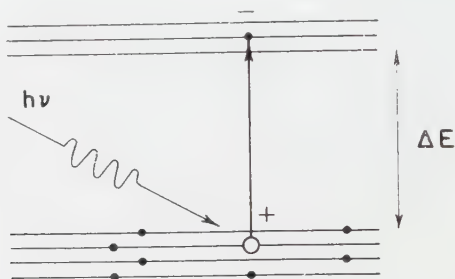


Figure 3. Creation of an electron-hole pair by absorption of a quantum of radiation.

Electrical conduction in a semiconductor takes place when electrons are excited from the valence band, normally by thermal agitation, leaving in the valence band vacancies which are mobile and take part in conduction, known as positive holes; conduction also takes place by means of electrons and holes excited from impurities. Photo-conductivity occurs when the number of electrons and holes is increased beyond the equilibrium values by absorption of external radiation; the absorption of a sufficiently energetic quantum will excite an electron from the valence band, creating a conduction electron and a positive hole, *both* of which may take part in conduction; this is illustrated in figure 3. At first sight it would appear that the condition for absorption by this process would be $h\nu > \Delta E$; as we shall see, this is only so in certain simple cases, energy generally being also supplied by or taken from the vibrations of the atoms of the crystal. However, we may at this stage regard the condition $h\nu > \Delta E$ as approximate and we should expect to have a large increase in optical absorption for a frequency ν nearly equal to that given by $h\nu = \Delta E$. Observation of this so-called fundamental absorption edge therefore gives a very direct method of obtaining a value of the important parameter ΔE . The advantages of this method over the so-called thermal methods, based on the variation of conductivity or Hall constant with temperature, have been discussed by the author [17], particularly in connection with the difficult problem of obtaining a reliable value of ΔE for the important semiconductors PbS, PbTe, PbSe. The difficulties of the method were also discussed; these are mainly associated with the fact that the transition of an electron from the valence band to the conduction band is by no means a simple process. However, the difficulties of the method are in fact a great boon since, when the absorption spectrum can be fully analysed near the

fundamental absorption edge, it can provide a great deal more information than was hoped for at one time.

4.1. Crystal momentum

The various electron levels in an allowed energy band of a crystalline solid may be labelled by means of the wave-vector \mathbf{k} of the electron waves corresponding to the stationary state having the appropriate value of the energy; thus the energy can be expressed as a function of the three components k_x, k_y, k_z of the wave vector. The wavelength λ_e of the electron waves is equal to $2\pi/|\mathbf{k}|$. The boundary conditions restrict the wave-vector \mathbf{k} to having certain specific values, but these lie so close together that, for many purposes, the energy may be regarded as a continuous function of \mathbf{k} . The energy may also be expressed as a function of the vector \mathbf{P} equal to $\hbar\mathbf{k}$, which is known as the crystal momentum (for a free electron, \mathbf{P} reduces to the normal momentum \mathbf{mv}). In the conduction band, in thermal equilibrium, most of the electrons will occupy energy levels corresponding to values of \mathbf{k} near the lowest minimum in the energy, and similarly in the valence band the positive holes will occupy levels corresponding to the highest maximum in the energy. The simplest situation which we may envisage is that both the bottom of the conduction band and the top of the valence band occur at $\mathbf{P}=0$; this situation is illustrated in figure 4 for a particular direction in the crystal.

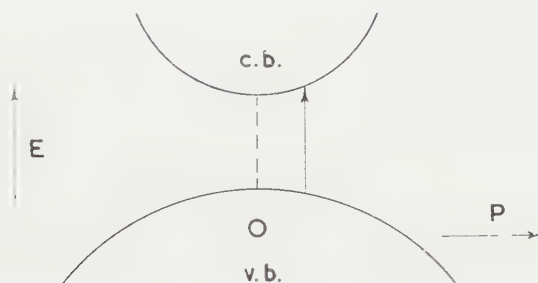


Figure 4. Valence band maximum and conduction band minimum at $\mathbf{P}=0$.

If we take the zero of energy at the lowest point of the conduction band we may write the energy of an electron in this band in the form

$$E_c = E_{kc}(\mathbf{P}). \quad (1)$$

$E_{kc}(\mathbf{P}) > 0$, and may be interpreted as the kinetic energy due to the motion of the electron through the crystal; it is zero when $\mathbf{P}=0$. Similarly for an electron in the valence band we may write

$$E_v = -\Delta E - E_{kv}(\mathbf{P}) \quad (2)$$

where also $E_{kv}(\mathbf{P}) > 0$ and is zero when $\mathbf{P}=0$.

Now suppose a quantum of radiation is absorbed and this raises an electron from a state in the valence band with crystal momentum \mathbf{P} to a state in the conduction band with crystal momentum \mathbf{P}' . If ν is the frequency of the quantum of radiation required to bring about this transition we shall have

$$\hbar\nu = \Delta E + E_{kc}(\mathbf{P}') + E_{kv}(\mathbf{P}). \quad (3)$$

A quantum is required with energy just sufficient to bridge the forbidden-energy gap and supply the kinetic energies of the electron and hole created; thus we see that E_{kv} represents the kinetic energy of the whole. The smallest value of ν for which such a transition will take place will then be given by

$$\hbar\nu = \Delta E. \quad (4)$$

At one time it was thought that the above situation would hold for many semiconductors, particularly for those whose crystal structure had cubic symmetry, but it is now known that this is not so. There is unfortunately only one well-established example of a conventional semiconductor for which this condition holds, namely InSb; in many instances the bottom of the conduction band and top of the valence band do not occur for the same value of the crystal momentum \mathbf{P} . For Si and Ge it has been established beyond doubt that, while the top of the valence band occurs at $\mathbf{P}=0$, the bottom of the conduction band occurs for quite different values of \mathbf{P} . We shall first of all discuss further the simpler condition and return later to the more complex situation.

5. DIRECT TRANSITIONS

In our discussion of the optical transition by means of which an electron-hole pair is created we have not assumed any relationship between the initial momentum vector \mathbf{P} and the final momentum vector \mathbf{P}' . It may, however, readily be shown from the quantum-mechanical expression for the matrix element of the transition that it will only take place with appreciable probability provided

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P} + \mathbf{p} \quad (5)$$

where $\mathbf{p} = \hbar/\lambda$ is the momentum of the absorbed photon, of wavelength λ , moving in the direction of the unit vector \mathbf{i} . The physical interpretation of equation (4) is that crystal momentum is conserved in a transition, along with the momentum of the photon. Except when $|\mathbf{P}|$ and $|\mathbf{P}'|$ are very small we shall have $p \ll |\mathbf{P}|$ or $|\mathbf{P}'|$, as may readily be seen as follows: for the electron waves $|\mathbf{P}| = \hbar/\lambda_e$, and for a thermal electron at 300°K we have $\lambda_e \sim 10^{-6}\text{cm}$ so that for radiation with $\lambda \sim 1\mu$ we have $\lambda/\lambda_e \sim 10^2$, and hence $p \ll |\mathbf{P}|$. It is therefore quite a good approximation to take, in place of equation (5), the condition $\mathbf{P}' = \mathbf{P}$ and to say that in such transitions, known as direct or 'vertical' transitions we must have conservation of crystal momentum; such a transition is illustrated in figure 4. The transition from the top of the valence band to the bottom of the conduction band is such a direct transition only when both have the same value \mathbf{P} .

The momentum of the *positive hole* left behind in the valence band is clearly equal to $-\mathbf{P}$; in a direct transition the hole and electron therefore tend to separate and move in opposite directions. When the value of $|\mathbf{P}|$ is appreciable they may be treated as separate entities but for small values of $|\mathbf{P}|$, as we shall see, this is not so.

When we neglect the electron-hole interaction it may be shown that the probability of a direct transition is almost independent of \mathbf{P} for not too large values of \mathbf{P} provided the wave-functions of the electron states in the valence and conduction bands are such that the transition is allowed in the usual sense. The probability of absorption then depends only on the number of states available. It may readily be shown (see for example, [18], p. 196) that the number of states in the conduction band with energy between E and $(E + dE)$ is of the form $AE^{1/2}$

where A is a constant; the number of possible transitions with ν between ν and $(\nu + d\nu)$ is therefore also of this form so that the absorption coefficient α_d may be expressed to this approximation by means of the equations

$$\left. \begin{aligned} \alpha_d &= a(\mathbf{h}\nu - \Delta E)^{1/2}, & \mathbf{h}\nu > \Delta E, \\ &= 0, & \mathbf{h}\nu \leq \Delta E. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

This form is frequently given in the literature as holding for all values of $\mathbf{h}\nu$ not too much in excess of ΔE , but is seriously in error in the very important region where $(\mathbf{h}\nu - \Delta E)$ is small. The reason for this is not difficult to see; when $(\mathbf{h}\nu - \Delta E)$ is small then $|P|$ is small and the electron and hole move apart slowly. Being oppositely charged they have a strong Coulomb attraction and this affects markedly the form of the absorption spectrum. A similar problem occurs in the calculation of the form of the recombination spectrum of electrons with positive ions in a gas, and has been extensively studied. The effect of the Coulomb attraction been treated by G. G. Macfarlane, T. P. McLean, J. E. Quarrington and V. Roberts [21] for the semiconductor problem and the form of the spectrum when $(\mathbf{h}\nu - \Delta E)$ is small has been calculated (see below). The main result of this calculation is that α_d does not tend to zero as $\mathbf{h}\nu \rightarrow \Delta E$, but to a finite value; this is illustrated in figure 5 in which α_d^2 is shown as a function of $\mathbf{h}\nu$. When $(\mathbf{h}\nu - \Delta E)$ reaches a value which we shall discuss later, equation (4) holds and we have a linear relationship between α_d^2 and $\mathbf{h}\nu$. Such linear plots have frequently been extrapolated to obtain ΔE from the intercept with the $\mathbf{h}\nu$ axis but must be used with extreme care, since unless they cover a sufficiently large range of frequencies they may not correspond truly to a linear region. We shall later discuss the direct transitions which occur in Ge, and shall see that the calculated form of absorption curve agrees well with experiment.

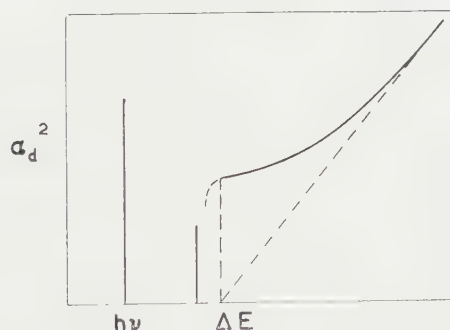


Figure 5. Variation of absorption coefficient α_d for allowed direct transitions.

When the wave-functions describing the states in the valence and conduction bands are such that the transition is forbidden, the transition probability is zero when $\mathbf{P}=0$. For small departures of \mathbf{P} from zero it may be shown that the probability is proportional to $|P|^2$, i.e. to $(\mathbf{h}\nu - \Delta E)$ to the same approximation for which equation (4) was derived; in this case we have

$$\left. \begin{aligned} \alpha_d &= b(\mathbf{h}\nu - \Delta E)^{3/2}, & \mathbf{h}\nu > \Delta E, \\ &= 0, & \mathbf{h}\nu \leq \Delta E. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

This formula also requires modification when the Coulomb interaction is taken into account. Values of the constants a and b have been given by J. Bardeen, F. J. Blatt and L. H. Hall [22]. The absorption due to direct transitions will therefore not vary much with the temperature apart from a frequency shift due to the variation of ΔE with temperature.

5.1. *Direct transition excitons*

The Coulomb interaction of an electron and hole discussed above has another most important effect; by losing energy, an electron and hole already created as free particles may form a series of bound states rather like a hydrogen atom. Such an electron-hole pair is known as an exciton; the lowest energy state of such a pair really occurs when they recombine to give an electron in the valence band, and the first excited state is the ground state of the exciton (hence its name). For a simple semiconductor of the form under discussion it may readily be shown [23] that the exciton energy levels form a series similar to the levels of a hydrogen atom, i.e. the binding energy W_{ex} of the exciton is given by an expression of the form

$$W_{\text{ex}}^n = W_{\text{ex}}^1/n^2 \quad (8)$$

where n is an integer.

A quantum of radiation which has insufficient energy to form a separated electron-hole pair as a result of a direct transition may yet be able to form an exciton provided

$$h\nu = \Delta E - W_{\text{ex}}^n. \quad (9)$$

We thus get a hydrogen-like absorption *line* spectrum lying to the long-wave side of the fundamental absorption edge due to direct transitions.

Exciton line spectra have been known for some time to exist for a number of large-energy-gap semiconductors such as CdS, HgI₂ and have been extensively studied by Y. F. Gross and his colleagues [24] and by S. Nikitine [25]; such spectra have also been observed by J. H. Apfel and L. H. Hadley [26] in Cu₂O. In view of the fact that certain types of impurity can also cause hydrogen-like absorption line spectra it seemed important to try to observe such a spectrum in Ge and Si, about the only materials for which, as yet, there can be no question about active impurity content, and attempts to do this have been made in our laboratory and elsewhere. This was successfully achieved by G. G. Macfarlane, T. P. McLean, J. E. Quarrington and V. Roberts [21, 27] about a year ago (see figure 8) and also by S. Zwerdling, Laura M. Roth and B. Lax [28] at the Lincoln laboratory, M.I.T., in the U.S.A.; the latter have also studied the effect of high magnetic fields on the form of the spectrum. The direct transition in Ge is not that of lowest energy corresponding to the fundamental absorption edge (see below); the behaviour is similar to that for the case we have discussed but the form of the line spectrum is modified by the complex structure of the bands, the ground state being a doublet [27, 52]. So far, no similar exciton lines have been observed for Si although we have looked carefully for them.

There is a relationship between the energy W_{ex}^1 and the value of $(h\nu - \Delta E)$ for which the $\frac{1}{2}$ -power law or $3/2$ -power law for the absorption coefficient α_d should hold. G. G. Macfarlane and his colleagues [21] have shown that, for

an allowed transition, the form of the absorption is given by

$$\alpha_d = \pi a (W_{\text{ex}}^{-1})^{1/2} (l\nu / \sinh \gamma), \quad \hbar\nu > \Delta E \quad (10)$$

where a is the same constant as in equation (4) and

$$\gamma = \pi (W_{\text{ex}}^{-1})^{1/2} / (\hbar\nu - \Delta E)^{1/2}; \quad (11)$$

when $(\hbar\nu - \Delta E) > \pi^2 W_{\text{ex}}^{-1}$, equation (9) reduces rapidly to the $\frac{1}{2}$ -power law given by equation (4); as $\hbar\nu - \Delta E$ however, α_d tends to the constant value $2\pi a (W_{\text{ex}}^{-1})^{1/2}$. This absorption then passes continuously into the absorption due to the series limit of the exciton line spectrum, the higher members of which will not be resolved; this part for $\hbar\nu < \Delta E$ is shown by the dotted line in figure 5,

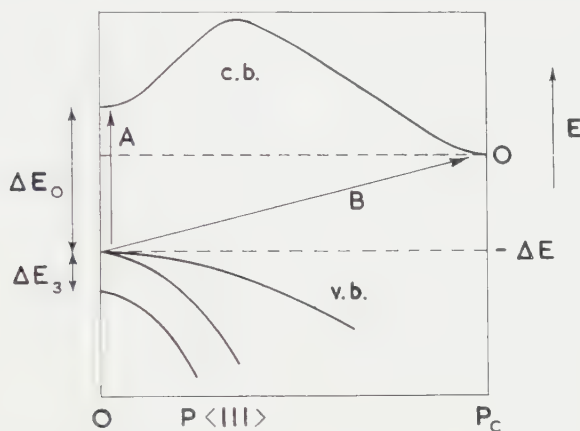


Figure 6. Energy band structure for Ge in $\langle 111 \rangle$ direction (not to scale).

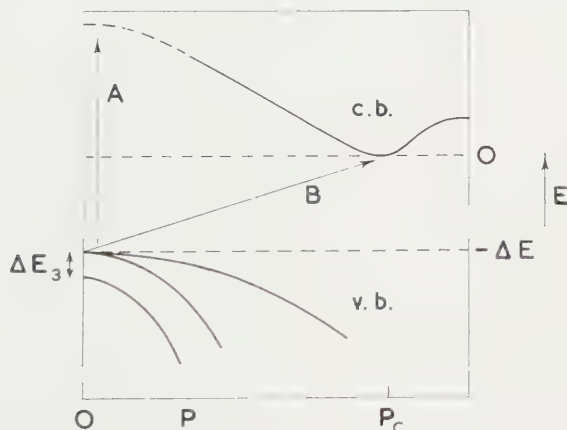


Figure 7. Energy band structure for Si in $\langle 100 \rangle$ direction (not to scale).

finally passing into the resolved line spectrum. The form of the absorption for $\hbar\nu > \Delta E$, is as we have seen, not very dependent on the temperature, apart from a frequency shift due to variation of ΔE . For $\hbar\nu < \Delta E$, however, the absorption varies, since the width of the individual lines varies; an exciton exists as a bound electron-hole pair in a crystal for only a short time and the absorption lines have therefore finite width. The life-time becomes longer at very low temperatures

and the lines correspondingly narrower as has been observed for Ge by G. G. Macfarlane and his colleagues [21, 27] who, from an analysis of the variation of line-width found that, for indirect transition excitons (see below), the life-time was about 3×10^{-12} sec for temperatures less than 100°K .

The quantity ΔE which determines the position of the absorption spectrum due to direct transitions in Ge is not the forbidden-energy gap but the separation of the bands at $\mathbf{P}=0$; it is usually written as ΔE_0 (see below). This quantity is not determined by 'thermal' methods and has only been obtained experimentally from a study of infra-red absorption.

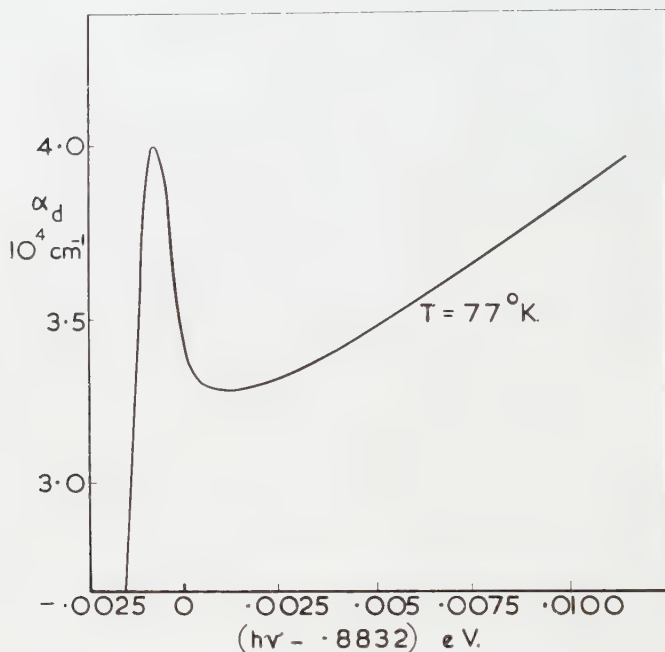


Figure 8. Absorption in Ge due to 'direct' transitions at $\mathbf{P}=0$, showing exciton line (after G. G. Macfarlane, T. P. McLean, J. E. Quarrington, and V. Roberts, 1958, *Proc. phys. Soc. Lond.*, **71**, 863).

For InSb, it has been established with a fair degree of certainty that the valence and conduction bands have their maximum and minimum values of the energy at $\mathbf{P}=0$, and fortunately, after Si and Ge, this is the purest material available in the form of high quality single crystals. The spectrum corresponding to the fundamental absorption edge of InSb has been obtained at fairly high resolution by V. Roberts and J. E. Quarrington [29] in our laboratory, for temperatures between 290°K and 4°K . Neither a $\frac{1}{2}$ -power nor a $\frac{3}{2}$ -power law is well obeyed and it has been suggested by W. Dumke [30] that, even here, indirect transitions (see below) may play a part. New measurements at considerably higher resolution are at present being made by means of which it is hoped to be able to obtain further information on the types of transition taking place.

6. INDIRECT TRANSITIONS

For most semiconductors, the simple model illustrated in figure 4 does not hold and the maximum of the valence band and minimum of the conduction band do not occur for the same value of the crystal momentum \mathbf{P} . We should have noted that the range of values of \mathbf{P} is not infinite since it may be shown that the energy is a periodic function of \mathbf{P} ; the values of \mathbf{P} used in describing the energy bands are usually restricted to a volume of \mathbf{P} -space surrounding the origin and known as the first Brillouin zone (see ref. [18], p. 27). The maximum value of \mathbf{P} is of the order of $\hbar/2d$ where d is the lattice spacing so that the shortest electron wavelength is of the order of $2d$. Two forms of the energy bands which are thought to apply respectively to Ge and Si are shown (not to scale) in figures 6 and 7. These have been derived mainly from cyclotron resonance experiments though the distance of the minimum in the conduction band from the zone-edge is not given by such experiments but has been deduced from infra-red and other measurements. The main difference between the forms in figures 6 and 7 is that, in the former, conduction band minima occur at the zone-edge. In this case there are four equal minima in the $\langle 111 \rangle$ directions for Ge (those at (111) and $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$ being equivalent) and six in the $\langle 100 \rangle$ directions for Si; this complicates the situation considerably. Moreover the degeneracy of the valence band at $\mathbf{P}=0$ further complicates the situation.

It will now be clear that the direct transition at $\mathbf{P}=0$ (marked A in figure 6) is not the transition requiring lowest energy. The transition from the top of the valence band to the minimum of the conduction band is the lowest energy transition and, as will be seen, this involves a large change in crystal momentum \mathbf{P} , so cannot take place with the absorption of only a photon. In order to conserve crystal momentum, the difference must either be given up to the crystal lattice or taken from it. This may be described by saying that the transition can only take place provided a phonon, or quantized lattice vibration, is absorbed or emitted at the same time as the photon is absorbed. If \mathbf{P}_c is the crystal momentum corresponding to the minimum of the conduction band the \mathbf{P}_p is the momentum of the phonon we must have for conservation

$$\mathbf{P}_c = \pm \mathbf{P}_p, \quad (12)$$

the $+$ and $-$ signs referring respectively to absorption and emission of a phonon. Now the phonon energies in a crystal are given as functions of their wave-vector \mathbf{K} which is related to the phonon momentum \mathbf{P}_p in the same way as for electrons, namely $\mathbf{P}_p = \hbar\mathbf{K}$ and \mathbf{P}_p also restricted in values to the first Brillouin Zone. If E_p is the energy of a phonon corresponding to the momentum $\mathbf{P}_p = \mathbf{P}_c$, the minimum frequency required to cause a transition from the top of the valence band to the bottom of the conduction band is given by

$$\hbar\nu = \Delta E + E_p \quad (13)$$

when a phonon is emitted, and

$$\hbar\nu = \Delta E - E_p \quad (14)$$

when a phonon is absorbed.

It should be noted that we now have an extra degree of freedom; if an electron is excited from a state in the valence band with momentum vector \mathbf{P}' to a state in the conduction band with momentum $\mathbf{P}_c + \mathbf{P}$ (\mathbf{P} and \mathbf{P}' being small) we need not have $P=P'$, a phonon of appropriate momentum \mathbf{P}_p' taking up the change in crystal momentum; i.e. we have

$$\mathbf{P}_c + \mathbf{P} - \mathbf{P}' = \mathbf{P}_p' \quad (15)$$

for phonon absorption. For small values of $|P|$ and $|P'|$ the transition probability will not vary much with \mathbf{P} and \mathbf{P}' provided the transition is allowed, and by calculating the number of available states (see ref. [18], p. 204) it may readily be shown that the absorption coefficient α_a for the transition with phonon absorption varies as follows

$$\alpha_a \propto \begin{cases} (\hbar\nu - \Delta E + E_p)^2, & \hbar\nu > \Delta E - E_p, \\ = 0, & \hbar\nu \leq \Delta E - E_p. \end{cases} \quad (16)$$

Similarly it may be shown that the absorption coefficient e for the transition with phonon emission varies as

$$\alpha_e \propto \begin{cases} (\hbar\nu - \Delta E - E_p)^2, & \hbar\nu > \Delta E + E_p, \\ \alpha_e = 0, & \hbar\nu \leq \Delta E + E_p. \end{cases} \quad (17)$$

The probability of absorption of a phonon is proportional to the number of phonons present, which, since they obey Einstein-Bose statistics, is proportional to $[\exp(E_p/kT) - 1]^{-1}$. We may therefore write, when $\hbar\nu > \Delta E - E_p$,

$$\alpha_a = \frac{C(\hbar\nu - \Delta E + E_p)^2}{\exp(E_p/kT) - 1}. \quad (18)$$

The ratio of the probabilities of phonon emission to phonon absorption is given by the well-known Einstein relationship (which is the same as for photons) and is equal to $\exp(E_p/kT)$; the probability of absorption of a photon with emission of a phonon is therefore proportional to $[1 - \exp(-E_p/kT)]$ so that when $\hbar\nu > \Delta E + E_p$

$$\alpha_e = \frac{C(\hbar\nu - \Delta E - E_p)^2}{1 - \exp(-E_p/kT)}. \quad (19)$$

The value of the total absorption coefficient α_i due to indirect transitions is therefore given by

$$\alpha_i = C \left\{ \begin{aligned} & \frac{(\hbar\nu - \Delta E - E_p)^2}{1 - \exp(-E_p/kT)} + \frac{(\hbar\nu - \Delta E + E_p)^2}{\exp(E_p/kT) - 1}, & \hbar\nu > \Delta E + E_p \\ & = C \frac{(\hbar\nu - \Delta E + E_p)^2}{\exp(E_p/kT) - 1}, & \Delta E - E_p < \hbar\nu < \Delta E + E_p, \\ & = 0, & \hbar\nu \leq \Delta E - E_p. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

The quantity C is nearly but not quite constant; the exact expression for α_i has been given, for example, by H. Y. Fan [31].

It will thus be seen that if $\alpha_i^{1/2}$ is plotted against $\hbar\nu$ the absorption curve obtained should be resolvable into two approximately straight lines, the slope of one of which varies rapidly with temperature (phonon absorption) and the slope of the other is almost independent of temperature, especially at low temperatures. Unfortunately the situation is not nearly so simple as this; there are several modes of vibration in a crystal each having its own type of phonon; along special symmetry directions such as the $\langle 100 \rangle$ or $\langle 111 \rangle$ directions in a cubic crystal there will be four modes, namely the transverse acoustic, longitudinal acoustic, transverse optical and longitudinal optical modes. In the acoustic modes, when we have two atoms in each unit cell in the crystal, the two move in step; in the optical modes they move in opposition. To obtain the total absorption coefficient we must therefore sum over all types of phonons, and there is also now some evidence that pairs of phonons may be absorbed and emitted and make an appreciable contribution to the absorption.

Within the last two years high resolution absorption spectra have been obtained in our laboratory for both Si and Ge by V. Roberts and his colleagues [32], over a wide range of temperatures, extending down to the temperature of liquid helium, and have been analysed in this way (figures 9 and 10). From this analysis, extremely accurate values of the forbidden energy gap ΔE at all temperatures covered by the experiments have been obtained as well as values for the phonon energies. As frequently happens, a timely check of the values

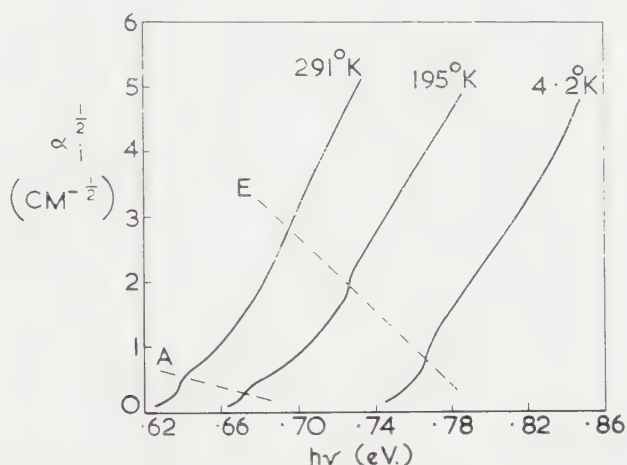


Figure 9. Absorption in Ge due to 'indirect' transitions. Steps at E and A are due to exciton formation with emission and absorption of phonons (after G. G. Macfarlane, T. P. McLean, J. E. Quarrington, and V. Roberts, 1957, *Phys. Rev.*, **108**, 1377).

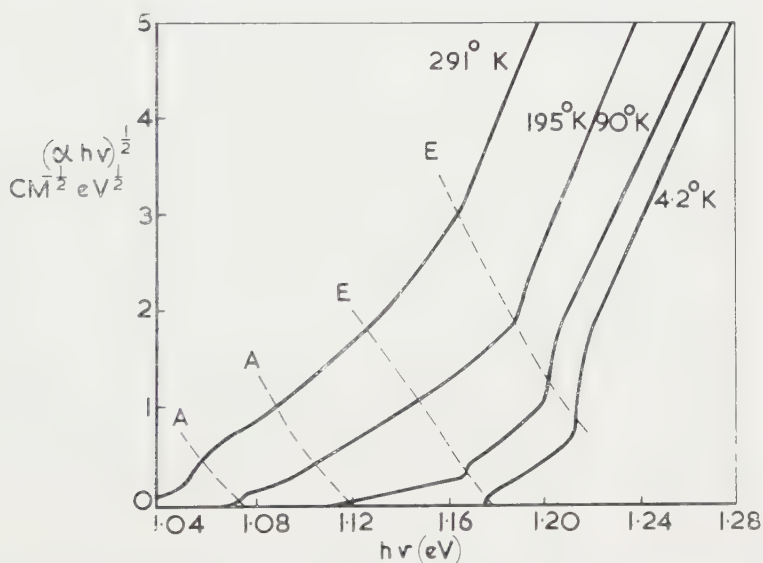


Figure 10. Absorption in Si due to 'indirect' transitions. Steps at E and A are due to exciton formation with emission and absorption of phonons (after G. G. Macfarlane, T. P. McLean, J. E. Quarrington, and V. Roberts, 1958, *Phys. Rev.*, **111**, 1245).

of the phonon energies has just become available from another branch of physics—neutron scattering. The values found for Ge (by B. N. Brockhouse and P. K. Iyengar [33]) agree very well with those obtained from the infra-red spectra; agreement also holds for the interpretation of the observed phonons (i.e. whether longitudinal, transverse, acoustic or optical). For Si, neutron scattering measurements by B. N. Brockhouse [34], have shown that the original allocation of the phonons was incorrect and that some of the increases in absorption are due to transitions involving *two* phonons. A doubt as to the correct value for the Raman frequency for Si has also been resolved by neutron scattering—the correct value being $15.3 \pm 0.3 \times 10^{12}$ c/s.

7. INDIRECT TRANSITION EXCITONS

Even the complexity discussed above is not all that we have to consider in the analysis of the absorption due to indirect transitions; we have so far neglected exciton formation. In the direct transitions, the exciton must be formed with very small total momentum and hence with nearly zero kinetic energy, so that it has a *definite* energy resulting in a *line* absorption spectrum. This restriction now no longer applies and any momentum of the exciton due to motion of its centre of gravity, may be taken up by the absorbed or emitted phonon. The excitons now have a continuous range of energies which are the sum of their binding energy and kinetic energy. The exciton absorption spectrum is therefore a *continuous* spectrum and not a *line* spectrum as for direct transitions. The low-frequency limit of the absorption due to exciton formation with absorption of a single phonon is given by

$$h\nu = \Delta E - E_p - W_{\text{ex}}^{-1}. \quad (21)$$

For formation with phonon emission the limit is given by

$$h\nu = \Delta E + E_p - W_{\text{ex}}^{-1}. \quad (22)$$

The bands due to excited states of the exciton will start at correspondingly higher frequencies and will be superimposed. G. Dresselhaus [35] and R. J. Elliot [36] have shown that, near the lower limit of the exciton bands, the absorption is proportional to $(h\nu - \Delta E \pm E_p)^{1/2}$ if the transition between the bands is an allowed one and proportional to $(h\nu - \Delta E \pm E_p)^{3/2}$ if it is forbidden. In the former case a plot of $\alpha^{1/2}$ against $h\nu$ would give a variation proportional to $(h\nu - \Delta E \pm E_p)^{1/4}$ at the head of the exciton bands as compared with a linear rise for band-to-band transitions. This steep rise in absorption should enable the exciton bands to be distinguished and has been found by G. G. Macfarlane and his colleagues [27, 32] in both Si and Ge.

It will thus be seen that analysis of absorption bands is a difficult but rewarding process. Very pure, high quality crystals are required since the absorption due to indirect transitions is usually small ($1 \sim 100 \text{ cm}^{-1}$) compared with that due to direct transitions ($10^3 - 10^5 \text{ cm}^{-1}$) and may be obscured by free-carrier absorption.

8. INFRA-RED EMISSION SPECTRA

Infra-red emission from semiconductors has been studied for some time [37] but usually with fairly low resolution. The infra-red emission from Si

corresponding to the absorption due to indirect transitions has recently been observed by J. R. Haynes, M. Lax and W. Flood [38] with high resolution, and very good correlation obtained with the spectral details found by Macfarlane *et al.* [32] in absorption. The study of emission spectra arising from transitions involving phonons is complementary to the study of absorption spectra; in the latter, at low temperatures, the transitions due to phonon absorption are not observed whereas the reverse transition involving emission of a phonon is observed in emission spectra.

9. OTHER INFRA-RED ABSORPTION SPECTRA

Various other types of infra-red absorption spectra have been observed and used to obtain information on the properties of semiconductors, and advances in technique have extended the range of observations to much longer wavelengths. For example the absorption due to free carriers has been extensively studied by H. Y. Fan [31] and his colleagues at Purdue University. Measurements on the absorption due to optically injected carriers in Si and Ge by L. Hultdt and T. Staflin [39] at the Institute of Optical Research, in Stockholm, have thrown light on the complex structure of the valence bands of Si and Ge. Not only is the valence band degenerate at $\mathbf{P}=0$, two bands meeting there, but there is a third band (see figures 6 and 7) separated by a small amount ΔE_3 at $\mathbf{P}=0$. Using the theory of A. H. Kahn [40] the separation ΔE_3 between the bands may be obtained from the absorption spectra. By such means we are gradually building up a very complete picture of the band structure of Si and Ge. For Ge, we now know ΔE and ΔE_0 (see figure 6) very accurately over a wide range of temperatures and also the quantity ΔE_3 ; for Si we know ΔE very accurately and ΔE_3 with fair accuracy but the value of ΔE_0 is not yet known.

Absorption spectra due to impurities in Si have been extensively observed and analysed [41], since these lie generally at wavelengths between 3μ and 20μ , in a fairly accessible region of the spectrum. Similar spectra have only recently been observed for Ge; since they usually occur at wavelengths greater than 50μ and have quite small absorption coefficients this has mainly been due to advances in technique. Such spectra have been observed by H. Y. Fan and P. Fisher [42] and also by W. S. Boyle [43].

In Boyle's experiments, a carbon resistance bolometer was used [44], cooled to the temperature of liquid helium. A superconducting bolometer for use in this region of the spectrum has been described by T. J. Dean *et al.* [45].

Absorption due to the lattice vibrations in Ge has also been studied for some time (see ref. [31]). Recently, the lattice vibration bands for Si have been observed in our laboratory by F. A. Johnson [46] with considerably higher resolution than previously. The very complex form of the bands has involved taking a vast number of experimental points, since, to provide adequate data for analysis, observations had to be made over a range of temperatures extending from 365°K to 20°K . This has only been possible through the use of automatic recording techniques, the spectrometer output being in the form of punched tape giving the results in binary code and suitable for feeding direct to an electronic digital computer. The complex bands were then analysed in terms of absorption

involving two and three phonons by using the digital computer, and the phonon energies were obtained. The values are in excellent agreement with those obtained from neutron scattering (see above) and have confirmed the interpretation of the infra-red absorption due to indirect transitions between bands, in which it appears that some two-phonon processes may take place more readily than certain other one-phonon processes (for the lattice vibrations, of course, single phonon processes give no absorption in Si since they give rise to no dipole moment). This is an excellent example of the use of modern 'automation' techniques to take some of the drudgery out of physical observations.

10. USE OF HIGH MAGNETIC FIELDS

The amount of information on the band structure of semiconductors available from infra-red spectroscopy can be greatly increased if measurements are made in a strong magnetic field. In particular, it is virtually impossible to obtain information about the curvature of the bands near maxima and minima, which determines the form of the effective-mass tensor, without the use of a magnetic field. It turns out that, for most of the experiments which it is desired to carry out, quite strong magnetic fields are required. Magnetic flux up to about 25 kg over a volume of a few cubic centimetres is readily obtainable with iron-cored electro-magnets, but such fields are hardly adequate for the purpose in hand; with a field corresponding to 50 kg a fair amount can be done, but a number of laboratories, including our own, are experimenting with pulsed fields which can give a flux of more than 300 kg, and are building installations to give steady fields corresponding to a flux of over 100 kg.

With a sufficiently high field, cyclotron resonance may be observed in the far infra-red; the relationship between the wavelength λ of the resonance (in microns), the magnetic flux β (in gauss) and the effective mass m^* (if scalar) of the charge carriers is given by

$$\lambda = \frac{1.07 \times 10^8}{B} \cdot \frac{m^*}{m}. \quad (23)$$

For a wavelength of 40μ and $m^* = m$, the free electron mass, we require a flux of approximately 2.7×10^6 G. For semiconductors such as *n*-type InSb with $m^* \sim 0.015m$ a field of about 40 kg would be required and such resonances have been observed at the Naval Research Laboratory, U.S.A. by E. Burstein and his colleagues [47] and also at the Lincoln Laboratory, U.S.A., by B. Lax and his colleagues [48]. Fortunately there are other magnetic effects which give information on the effective mass with fields somewhat smaller than those required for cyclotron resonance. It may be shown that in a strong magnetic field the electron motions in the valence and conduction bands are quantized, and the levels are grouped into narrow bands whose mean energies, when the effective-mass tensors for holes and electrons are scalar, are given by

$$E = \hbar\omega_c(l + \tfrac{1}{2})$$

for the conduction band, and

$$E = -\Delta E - \hbar\omega_v(l' + \tfrac{1}{2})$$

for the valence band where $\omega_c/2\pi$ is the cyclotron resonance frequency for the conduction band and $\omega_v/2\pi$ for the valence band, l , and l' being integers; these are the so-called Landau levels [49]. The grouping of the levels in the bands is of course only complete at very high fields and for normal values of the magnetic flux only a periodic change in the density of states is found which leads to an absorption which varies in an oscillatory manner with frequency. This absorption has been studied with high spectral resolution by B. Lax and his colleagues [50] at the Lincoln Laboratory U.S.A. and has already yielded a great deal of information not only on Si and Ge but also on semiconductors such as InSb, InAs, and GaSb. The distance between the absorption maxima corresponding to the conduction band will be equal to $\hbar\omega_c$, from which the effective mass may be found; similarly a separation $\hbar\omega_v$ will result from states in the valence band. The lowest energy in the conduction band will now be $\frac{1}{2}\hbar\omega_c$ and the highest energy in the valence band $-\Delta E - \frac{1}{2}\hbar\omega_v$. The band separation therefore will be equal to $\Delta E + \frac{1}{2}\hbar\omega_v + \frac{1}{2}\hbar\omega_c$ and will increase linearly with magnetic field. Observation of the shift of the fundamental absorption edge gives a value for one of the effective masses only if $\omega_v \gg \omega_c$ or $\omega_v \leq \omega_c$. The requirements for such studies have recently been reviewed by E. Burstein, G. S. Picus, R. F. Wallis and F. Blatt [51]. Lax and his colleagues [52] have also studied the splitting of the direct transition excitons in Ge in a high magnetic field. The effect of magnetic fields on exciton lines observed with high-energy-gap semiconductors, such as Cu_2O , CdS , HgI_2 , etc. has been studied by E. F. Gross [53] and gives strong evidence for the interpretation of these spectra as being due to direct transition excitons. Since the exciton spectra observed in such large-energy-gap semiconductors are *line* spectra we must conclude that either they have the maximum and minimum respectively of their valence and conduction bands at the same value of the crystal momentum \mathbf{P} or else the transitions observed do not correspond to the inter-band transitions with lowest energy. If the latter condition were so we should expect to have some indication of the lower-energy indirect transitions as for Ge, and there appears to be no evidence for these.

There are quite a number of other interesting applications of infra-red spectroscopy to semiconductors, but it will not be possible within the scope of the present paper to discuss more. We have tried to bring out the significance and importance of a number of these applications but the paper is in no sense a complete review of all the work in this field in the past few years. The subjects discussed in rather more detail are those in which work is being carried out in our laboratory at Malvern. There is no doubt that the next few years will see a great increase in such applications of infra-red spectroscopy and consequent development of infra-red techniques, particularly in the use of very low temperatures and high magnetic fields. We may expect some further development of detectors for the far infra-red and a better understanding of the region of the spectrum adjacent to the very short radio waves. Much work will have to be done, however, in the preparation of suitable samples, for observation in the form of very pure and perfect single crystals, possibly in the form of wafers only a few microns thick, with good optical surfaces. It is frequently with the development of techniques in a quite different field that spectacular advances are made in physics research.

On discute l'utilisation des semiconducteurs en tant que détecteurs très sensibles et rapides pour l'infrarouge; en particulier, on décrit les travaux récents sur les détecteurs In Sb pour la région spectrale comprise entre 3μ et $5,5\mu$ et aussi les possibilités d'utiliser une détection photoélectrique jusqu'à 135μ en utilisant du germanium dopé avec de l'antimoine. L'utilisation de tels détecteurs a conduit à étendre les techniques infrarouges lesquelles à leur tour ont permis des progrès importants dans notre connaissance des propriétés fondamentales des semiconducteurs. On discute un certain nombre des progrès les plus récents basés sur la spectroscopie d'absorption et d'émission dans l'infrarouge en utilisant des monocristaux.

Die Verwendung von Halbleitern erlaubt die Herstellung höchst empfindlicher und schneller Infrarot-Detektoren. Insbesondere wird eine neue Arbeit über InSb-Detektoren für den Spektralbereich 3μ – $5,5\mu$ behandelt, sowie die Ausdehnung des photoelektrischen Nachweises bis zu 135μ mit Hilfe von Germanium, das mit Antimon dotiert ist. Die Verwendung solcher Detektoren hat die Infrarot-Technik erweitert und führt damit zu einer bemerkenswerten Bereicherung unserer Kenntnis von den grundsätzlichen Eigenschaften der Halbleiter. Die Absorptions- und Emissionsspektroskopie im Infraroten mittels einzelner Kristalle hat zu einer Reihe von neueren Erkenntnissen geführt.

REFERENCES

- [1] SMITH, R. A., JONES, F. E., and CHASMAR, R. P., 1957, *The Detection and Measurement of Infra-red Radiation* (Oxford: University Press).
- [2] SCHWARZ, E., *Research*, 1952, **5**, 407.
- [3] CASE, T. W., 1920, *Phys. Rev.*, **15**, 289.
- [4] YOUNG, A. S., 1955, *J. sci. Instrum.*, **32**, 142.
- [5] SMITH, R. A., 1956, *Sci. Mon., New York*, **82**, 3.
- [6] HILSUM, C., and ROSS, I. M., 1956, *Nature, Lond.*, **179**, 146.
- [7] AVERY, D. G., GOODWIN, D. W., and RENNIE ALISON, E., 1957, *J. sci. Instrum.*, **34**, 394.
- [8] LEE, D. H., and ROBERTS, D. H., 1960, *Opt. Acta* (in the press).
- [9] GOODWIN, D. W., 1957, *J. sci. Instrum.*, **34**, 367.
- [10] ROBERTS, V., 1959, Paper presented at 5th I.C.O., Stockholm.
- [11] LASSER, M. E., CHOLET, P., and WURST, E. C., 1958, *J. opt. Soc. Amer.*, **48**, 468.
- [12] FRAY, S. J., and OLIVER, J. F. C., 1959, *J. sci. Instrum.*, **36**, 195.
- [13] BURSTEIN, E., JACOBS, S., and PICUS, G. S., 1959, Paper presented at 5th I.C.O., Stockholm.
- [14] LAWSON, W. D., NIELSEN, S., PUTLEY, E. H., and YOUNG, A. S., 1959, *J. Phys. Chem. Solids*, **9**, 325.
- [15] SCHAWLOW, A. L., and TOWNES, C. H., 1958, *Phys. Rev.*, **112**, 1940.
- [16] BLOEMBERGEN, N., 1959, *Phys. Rev. Letters*, **2**, 84.
- [17] SMITH, R. A., 1953, *Advanc. Phys.*, **2**, 321; 1954, *Physica*, **20**, 910.
- [18] SMITH, R. A., 1959, *Semiconductors* (Cambridge: University Press).
- [19] ALLGAIER, R. S., and SCANLON, W. W., 1958, *Phys. Rev.*, **111**, 1029.
- [20] MACFARLANE, G. G., McLEAN, T. P., QUARRINGTON, J. E., and ROBERTS, V., 1959, *Phys. Rev. Letters*, **2**, 252.
- [21] MACFARLANE, G. G., McLEAN, T. P., QUARRINGTON, J. E., and ROBERTS, V., 1958, *Proc. phys. Soc. Lond.*, **71**, 863.
- [22] BARDEEN, J., BLATT, F. J., and HALL, L. H., 1956, *Proceedings of Atlantic City Photoconductivity Conference, 1954* (New York: John Wiley and Sons).
- [23] MOTT, N. F., and GURNEY, R. W., 1940, *Electronic Processes in Ionic Crystals*, Ch. 5 (Oxford: University Press).
- [24] See, for example, E. F. GROSS, and A. KAPLIANSKI, 1955, *Zhur. Tekh. Fiz.*, **25**, 2061.
- [25] NIKITINE, S., 1956, *J. Phys. Radium*, **17**, 817; 1959, *J. Phys. Chem. Solids*, **8**, 190.
- [26] APFEL, J. H., and HADLEY, L. H., 1955, *Phys. Rev.*, **100**, 1689.
- [27] MACFARLANE, G. G., McLEAN, T. P., QUARRINGTON, J. E., and ROBERTS, V., 1959, *J. Phys. Chem. Solids*, **8**, 388.
- [28] ZWERDLING, S., ROTH, LAURA M., and LAX, B., 1958, *Phys. Rev.*, **109**, 2207; 1959, *J. Phys. Chem. Solids*, **8**, 397.

- [29] ROBERTS, V., and QUARRINGTON, J. E., 1955, *J. Electron.*, **1**, 152.
- [30] DUMKE, W., 1957, *Phys. Rev.*, **108**, 1419.
- [31] FAN, H. Y., 1956, *Rep. Progr. Phys.* (London: Physical Society), **19**, 107.
- [32] MACFARLANE, G. G., MCLEAN, T. P., QUARRINGTON, J. E., and ROBERTS, V., 1957, *Phys. Rev.*, **108**, 1377; 1958, *Ibid.*, **111**, 1245.
- [33] BROCKHOUSE, B. N., and IYENGAR, P. K., 1958, *Phys. Rev.*, **111**, 747.
- [34] BROCKHOUSE, B. N., 1959, *Phys. Rev. Letters*, **2**, 259.
- [35] DRESSELHAUS, G., 1956, *J. Phys. Chem. Solids*, **1**, 15.
- [36] ELLIOTT, R. J., 1957, *Phys. Rev.*, **108**, 1384.
- [37] See for example MOSS, T. S., 1959, *Optical Properties of Semiconductors* (Butterworths).
- [38] HAYNES, J. R., LAX, M., and FLOOD, W., 1959, *J. Phys. Chem. Solids*, **8**, 392.
- [39] HULDT, L., and STAFLIN, T., 1958, *Phys. Rev. Letters*, **1**, 236; *Ibid.*, **1**, 313.
- [40] KAHN, A. H., 1955, *Phys. Rev.*, **97**, 1647.
- [41] See also, for example, BURSTEIN, E., 1955, *Advances in Electronics and Electron Physics*, **7**, 1 (New York: Academic Press Inc.); 1957, KOHN, W., *Solid State Physics*, **5**, 257 (New York: Academic Press, Inc.).
- [42] FAN, H. Y., and FISHER, P., 1959, *J. Phys. Chem. Solids*, **8**, 270.
- [43] BOYLE, W. S., 1959, *J. Phys. Chem. Solids*, **8**, 322.
- [44] BOYLE, W. S., and RODGERS, K. F., 1959, *J. opt. Soc. Amer.*, **49**, 66.
- [45] DEAN, T. J., JONES, G. O., MARTIN, D. H., MAWER, P. A., and PERRY, C. H., 1960, *Opt. Acta*, **7**, 185.
- [46] JOHNSON, F. A., 1959, *Proc. phys. Soc. Lond.*, **58**, 265.
- [47] BURSTEIN, E., PICUS, G. S., and GEBBIE, H. A., 1956, *Phys. Rev.*, **103**, 825.
- [48] KEYES, R. J., ZWERDLING, S., FONER, S., KOLM, H. H., and LAX, B., 1956, *Phys. Rev.*, **104**, 1804.
- [49] LANDAU, L., 1930, *Z. Phys.*, **64**, 629.
- [50] See, for example, ZWERDLING, S., LAX, B., and ROTH, LAURA M., 1958, *Phys. Rev.*, **108**, 1402.
- [51] BURSTEIN, E., PICUS, G. S., WALLIS, R. F., and BLATT, F., 1959, *Phys. Rev.*, **113**, 15.
- [52] ROTH, LAURA M., KLEINER, W. H., ZWERDLING, S., and LAX, B., 1959, *Phys. Rev. Letters*, **2**, 161.
- [53] GROSS, E. F., 1959, *J. Phys. Chem. Solids*, **8**, 172.

Le solide de tolérances d'un système optique travaillant à de faibles fréquences spatiales†

par JOSE PASTOR

Institut d'Optique, Madrid et Paris

(Received 22 October 1959)

Nous avons trouvé la condition générale de tolérance sur l'ensemble des aberrations d'un système optique travaillant à de faibles fréquences spatiales, en utilisant la méthode et le critère de Hopkins. Les résultats sont appliqués à un objectif photographique et à un instrument pour la vision de nuit. Les tolérances pour ce cas se trouvent en multipliant celles de la vision de jour par un facteur fonction du contraste objet. On a fait une vérification expérimentale de quelques résultats. L'application de ces tolérances au calcul optique fait penser à une amélioration photométrique des instruments, par simplification du système et sans modifier sa performance.

1. INTRODUCTION

Hopkins a proposé une méthode pour le calcul des tolérances sur les diverses aberrations [1] en fonction des fréquences spatiales. Dans le cas des faibles fréquences, il a développé une approximation optique-géométrique [2] par laquelle nous nous sommes proposés d'étudier le cas où ces diverses aberrations du troisième ordre sont superposées.

Soient (x_0, y_0) des coordonnées cartésiennes sur la pupille de sortie d'un système, la section sagittale et la section meridienne étant les axes correspondants du système de coordonnées. Soit une structure périodique sinusoidale de direction ψ par rapport au plan meridien du système optique et appelons (x, y) les nouvelles coordonnées d'un point sur la pupille par rapport aux nouveaux axes suivants: la direction de la mire et de sa normale passant par le centre de la pupille tous les deux dans ce plan.

$$\begin{aligned}x_0 &= y \sin \psi - x \cos \psi, \\y_0 &= y \cos \psi + x \sin \psi.\end{aligned}$$

Soit $W(x_0, y_0)$ où $W(x, y)$ l'abberation de l'onde.

La modulation complexe, pour une périodicité unidimensionnelle suivant l'axe OX , correspondant à une fréquence spatiale s , s'écrit :

$$M(s, \psi) \exp \{i\theta(s)\} = \iint_S \exp \{iks W(x, y; s)\} dS \quad (1)$$

dans laquelle :

$$W(x, y; s) = \frac{1}{s} \left\{ W\left(x + \frac{s}{2}, y\right) - W\left(x - \frac{s}{2}, y\right) \right\} = W_x'(x, y) + \frac{1}{3!} \left(\frac{s}{2}\right)^2 W_x'''(x, y) + \dots$$

$M(s, \psi)$ représente la modulation et $\theta(s)$ le déphasage produit par l'instrument ; S est la région de sommation, domaine commun à la pupille de sortie avec elle-même déplacée de s par l'autocorrélation ; $dS = dx dy / S$. Le critère de tolérance proposé par Hopkins, et relié très étroitement à la 'Strehl Definition', est :

$$M(s, \psi) \geq 0,8. \quad (1a)$$

Pour l'approximation optique-géométrique, la valeur de la fonction de modulation, déduite de l'expression (1) et des aberrations géométriques s'écrit :

$$M(R', \psi) \geq [1 - 2\pi^2 R'^2 K_g] \quad (2)$$

en fonction de R' , fréquence de la structure périodique, et dans laquelle

$$K_g = \left(-\frac{1}{n' \sin \alpha'} \right)^2 \left[\iint_A [W''(x, y)]^2 dA - \left\{ \iint_A W'(x, y) dA \right\}^2 \right] \quad (3)$$

représente l'écart quadratique moyen de l'onde réelle par rapport à l'onde idéale sphérique centrée sur le plan image. A est la nouvelle région de sommation qui coïncide avec la pupille même; $dA = dx dy / A$; on prend pour unité le rayon de la pupille, en conséquence $A = \pi$; α' représente l'ouverture angulaire du système et n' l'indice de réfraction de l'espace image. Le critère (1') devient :

$$K_g \leq \frac{0,10}{\pi^2 R'^2}. \quad (4)$$

Le calcul de (3) conduit à des fonctions de la forme :

$$H_{k,l}^{(0)} = \iint_A x^k y^l dA = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}\{k+1\})\Gamma(\frac{1}{2}\{l+1\})}{\pi\Gamma(\frac{1}{2}\{k+l+4\})}$$

expression dans laquelle Γ est la fonction d'Euler.

Entre ces fonctions existent les relations suivantes :

$$H_{k+2,l}^{(0)} = \frac{k+1}{k+l+4} H_{k,l}^{(0)}, \quad H_{k,l}^{(0)} = H_{l,k}^{(0)}, \quad H_{2,0}^{(0)} = \frac{1}{4}.$$

2. TOLÉRANCE GÉNÉRALE SUR L'ENSEMBLE DES ABERRATIONS

Supposons la fonction d'aberration développée au troisième ordre :

$$W(x_0, y_0) = W_{20}(x_0^2 + y_0^2) + W_{22}y_0^2 + W_{40}(x_0^2 + y_0^2)^2 + W_{31}(x_0^2 + y_0^2)y_0 \quad (5)$$

expression dans laquelle

$W_{20}(x_0^2 + y_0^2)$ représente le défaut de mise au point,

$W_{40}(x_0^2 + y_0^2)^2$ l'aberration sphérique,

$W_{31}(x_0^2 + y_0^2)y_0$ représente la coma

et

$W_{20}(x_0^2 + y_0^2) + W_{22}y_0^2$ l'astigmatisme et la courbure du champ.

Le coefficient W_{20} représente la différence entre le foyer sagittal et le plan image; $W_{20} + W_{22}$ mesure la différence entre la mise au point choisie et le foyer tangentiel.

Pour une structure périodique d'orientation ψ , la fonction d'aberration s'écrit, en fonction des coordonnées (x, y) :

$$W(x, y) = W_{20}(x^2 + y^2) + W_{40}(x^2 + y^2)^2 + W_{22}(y \cos \psi + x \sin \psi)^2 + W_{31}(x^2 + y^2)(y \cos \psi + x \sin \psi). \quad (6)$$

Dans ces conditions le calcul de Kg donne :

$$\begin{aligned} (n' \sin \alpha')^2 Kg &= W_{20}^2 4H_{20} \\ &+ W_{22}^2 4H_{20} \sin^2 \psi \\ &+ W_{40}^2 8H_{20} \\ &+ W_{31}^2 \frac{2}{3} H_{20} (1 + 2 \sin^2 \psi) \\ &+ W_{22} W_{20} 8H_{20} \sin^2 \psi + W_{40} W_{20} \frac{32}{3} H_{20} + W_{22} W_{40} \frac{32}{3} H_{20} \sin^2 \psi \\ &\equiv \phi(W_{20}, W_{22}, W_{40}, W_{31}; \psi). \end{aligned} \quad (7)$$

La condition de tolérance qui doit se vérifier, devient :

$$\left(\frac{1}{n' \sin \alpha'} \right)^2 \phi(W_{20}, W_{22}, W_{40}, W_{31}; \psi) \leq \frac{0,1}{\pi^2 R'^2} \quad (8)$$

ou bien :

$$\phi(W_{20}, W_{22}, W_{40}, W_{31}; \psi) \leq \frac{0,1}{\pi^2} \left(\frac{n' \sin \alpha'}{R'} \right)^2. \quad (9)$$

Dans cette expression quadratique, prenons le terme du défaut de mise au point comme référence, c'est-à-dire, écrivons l'expression (9) en fonction des termes classiques d'aberration [3], h représentant le deuxième membre de l'inégalité et étant proportionnel à λ/s :

$$\phi\left(\frac{W_{22}}{W_{20}}, \frac{W_{40}}{W_{20}}, \frac{W_{31}}{W_{20}}; \psi\right) - \frac{h}{W_{20}^2} \leq 0. \quad (10)$$

L'expression (10) donne le critère de tolérance et représente une famille doublement infinie de quadriques, dont les paramètres sont W_{20} et ψ . L'ensemble de tous les points intérieurs à ces quadriques (inégalité) sont des points de tolérance pour le système optique travaillant dans les conditions imposées.

Dans le cas d'un instrument parfaitement mis au point sur le foyer sagittal, $W_{20} = 0$, l'équation (10) n'a pas de sens physique, mais on verra que, même pour ce cas, les tolérances des autres aberrations sont déterminées.

3. ÉTUDE DE LA QUADRIQUE

La quadrique générale dans l'espace

$$\frac{W_{22}}{W_{20}}, \frac{W_{40}}{W_{20}}, \frac{W_{31}}{W_{20}}$$

doit être réelle. De l'étude de ses invariants on déduit :

L'invariant linéaire

$$I = \frac{1}{3} \sin^2 \psi + \frac{13}{6}$$

est toujours positif.

L'invariant quadratique :

$$J = 2 \sin^2 \psi \left(1 - \frac{8}{9} \sin^2 \psi\right) + \frac{1}{6} (2 + \sin^2 \psi) (1 + 2 \sin^2 \psi)$$

reste toujours positif. En conséquence, la quadrique peut être seulement un ellipsoïde où un cylindre elliptique réel, un cône ou un ellipsoïde imaginaire. Pour avoir un ellipsoïde réel il faut que l'invariant biquadratique, A , soit négatif et l'invariant cubique, A_{44} , soit différent de zéro.

Mais

$$A = \frac{1}{3} (1 + 2 \sin^2 \psi) \sin^2 \psi \left\{ \frac{1}{9} \cos^2 \psi - \frac{h}{W_{20}^2} \left(1 - \frac{8}{9} \sin^2 \psi\right) \right\}$$

et

$$A_{44} = \frac{1}{3} (1 + 2 \sin^2 \psi) \sin^2 \psi \left(1 - \frac{8}{9} \sin^2 \psi\right).$$

Les deux conditions ci-dessus sont vérifiées si on a :

$$W_{20}^2 < \frac{9 - 8 \sin^2 \psi}{\cos^2 \psi} h. \quad (11)$$

Condition de tolérance pour le défaut de mise au point. Pour une structure périodique parallèle au plan méridien du système $\psi = 0$, $A = A_{44} = 0$; la quadrique devient un cylindre elliptique d'axe parallèle à la direction W_{22}/W_{20} ; cela veut dire que l'astigmatisme n'intervient pas dans la condition générale de tolérance pour une mire d'orientation parallèle au foyer sagittal du système.

4. TOLÉRANCES MAXIMA ET MINIMA

4.1. Système général

Les plans tangents aux quadriques et parallèles aux plans de coordonnées nous fourniront les valeurs maxima et minima des tolérances. Le calcul conduit aux expressions suivantes :

$$\frac{W_{40}}{W_{20}} \leq \frac{3}{9 - 8 \sin^2 \psi} \left(-2 \cos^2 \psi \pm \left[\frac{f(W_{20}, \psi)}{2} \right]^{1/2} \right), \quad (12b)$$

$$\frac{W_{22}}{W_{20}} \leq \frac{1}{9 - 8 \sin^2 \psi} \left(-1 \pm \frac{3}{\sin \psi} [f(W_{20}, \psi)]^{1/2} \right), \quad (12c)$$

$$\left| \frac{W_{31}}{W_{20}} \right| < \left\{ \frac{6f(W_{20}, \psi)}{(1 + 2 \sin^2 \psi)(9 - 8 \sin^2 \psi)} \right\}^{1/2}, \quad (12d)$$

$$f(W_{20}, \psi) = (9 - 8 \sin^2 \psi) \frac{h}{W_{20}^2} - \cos^2 \psi$$

ou bien aux valeurs correspondantes des tolérances :

$$|W_{20}| < \frac{\{(9 - 8 \sin^2 \psi)h\}^{1/2}}{\cos \psi}, \quad (13a)$$

$$W_{40} \leq \frac{3}{9 - 8 \sin^2 \psi} \left(-2 W_{20} \cos^2 \psi \pm \left\{ \frac{f_1(W_{20}, \psi)}{2} \right\}^{1/2} \right), \quad (13b)$$

$$W_{22} \leq \frac{1}{9 - 8 \sin^2 \psi} \left(-W_{20} \pm \frac{3}{\sin \psi} \left\{ f_1(W_{20}, \psi) \right\}^{1/2} \right), \quad (13c)$$

$$|W_{31}| < \left\{ \frac{6f_1(W_{20}, \psi)}{(1 + 2 \sin^2 \psi)(9 - 8 \sin^2 \psi)} \right\}^{1/2}, \quad (13d)$$

$$f_1(W_{20}, \psi) = W_{20} f(W_{20}, \psi).$$

4.2. Système parfaitement mis au point

Des expressions (13) on peut déduire les tolérances pour un système parfaitement mis au point, $W_{20} = 0$, par un passage à la limite. Dans ce cas on trouve :

$$|W_{40}| < \frac{3}{2} \left(\frac{2h}{9 - 8 \sin^2 \psi} \right)^{1/2}, \quad (14b)$$

$$|W_{22}| < \frac{3}{\sin \psi} \left(\frac{h}{9 - 8 \sin^2 \psi} \right)^{1/2}, \quad (14c)$$

$$|W_{31}| < \left(\frac{6h}{1 + 2 \sin^2 \psi} \right)^{1/2}. \quad (14d)$$

D'autre part, la condition de tolérance (9) pour $W_{20}=0$ se réduit à un ellipsoïde dans l'espace (W_{22} , W_{40} , W_{31}) centré sur l'origine des coordonnées.

4.3. Orientation $\psi = \pi/2$

Pour l'orientation de la mire $\psi = \pi/2$, l'expression (13 a) donne une valeur quelconque pour la tolérance du défaut de mise au point

$$|W_{20}| < \infty.$$

Pour cette orientation le défaut de mise au point n'intervient pas dans les tolérances maxima et minima de l'aberration sphérique et de la coma (on le déduit de 13 b et 13 d); le terme d'astigmatisme est lié dans ce cas au terme du défaut de mise au point par la relation :

$$|W_{20} + W_{22}| < 3\sqrt{h}.$$

4.4. Tableau de tolérances

Les tolérances maxima de W_{20} en fonction de ψ sont : Pour

$\psi = 0^\circ$	30°	45°	60°	90°
$W_{20}^2 < 9h$	$9'3h$	$10h$	$12h$	∞

Afin de rester dans la tolérance pour n'importe quelle orientation de la mire nous avons fait le calcul des tolérances maxima et minima pour différents défauts de mise au point

$$|W_{20}| = 2,8\sqrt{h}, \quad 2,4\sqrt{h}, \quad 2\sqrt{h}, \quad 1,6\sqrt{h}$$

elles sont toujours plus petites que la tolérance la plus étroite correspondant à $\psi = 0$. Ces valeurs correspondent à :

$$W_{20} = 0,2818 \frac{\lambda}{s}, \quad 0,2416 \frac{\lambda}{s}, \quad 0,2013 \frac{\lambda}{s}, \quad 0,1610 \frac{\lambda}{s}$$

compte tenu de l'expression de la fréquence spatiale :

$$s = \frac{\lambda}{n' \sin \alpha'} R'.$$

Les résultats sont représentés dans la figure 1. Il existe une valeur particulière du défaut de mise au point pour laquelle la valeur maximum ou minimum de l'aberration sphérique est indépendante de l'orientation de la mire :

$$|W_{20}| = 0,2818 \frac{\lambda}{s}$$

on la déduit de (13 b).

Toutes ces valeurs maxima et minima décident à priori de la non tolérance d'un système qui présente une aberration quelconque plus grande que la limite correspondante maximum. Mais ces tolérances maxima et minima ne donnent aucun renseignement positif; pour trouver un ensemble de tolérances il faudra résoudre dans chaque cas la quadrique.

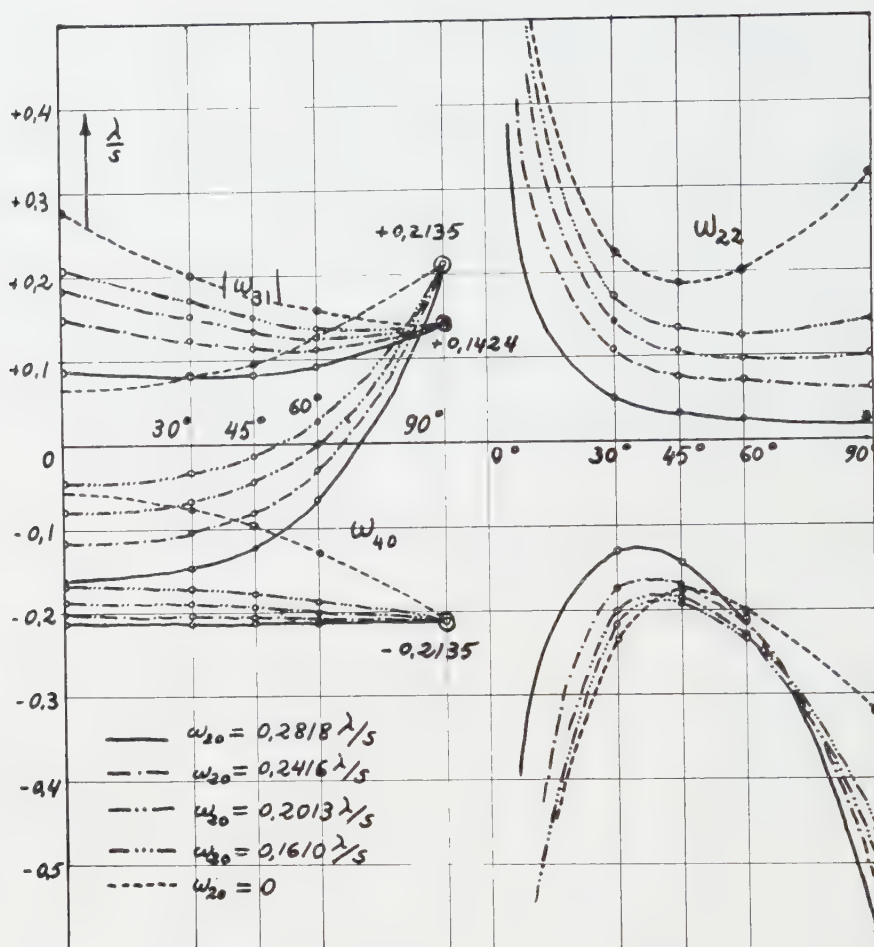


Figure 1. Tolérances maxima et minima pour différents défauts de mise au point, W_{20} , diverses orientations de la mire (abscisses) et mesurés en λ/s .

5. SOLIDE DE TOLÉRANCES

Dans la fig. 2 nous avons représenté deux sections principales de chaque quadrique de tolérances, après avoir fait son étude sous la forme canonique. Une section principale de chaque quadrique est placée dans le plan $W_{31}/W_{20}=0$. La tolérance sur la coma est symétrique. Sur le plan $W_{40}/W_{20}=0$ nous avons projeté l'une des deux autres sections principales. Dans la figure ce plan est rabattu (pointillé). Avec ces éléments on peut trouver un point quelconque de tolérance, c'est-à-dire, ce système de projection donne une solution graphique au problème suivant :

“Étant donné dans le développement de l'onde (6), la valeur du coefficient d'une aberration, trouver les valeurs correspondantes des autres aberrations pour que l'ensemble reste dans la tolérance. Ou bien, choisir un ensemble quelconque de tolérances.”

Dans la figure 3, étant donné le défaut de mise au point $W_{20}=0,2818(\lambda/s)$ et l'aberration sphérique $W_{40}=-0,1409(\lambda/s)$, nous avons trouvé les valeurs de la coma et de l'astigmatisme pour un système qui travaille avec une structure

périodique d'orientation $\psi = 45^\circ$. Le problème se réduit à faire deux sections dans les ellipsoïdes correspondants. Dans notre cas, l'astigmatisme peut varier entre A et B, et, si on choisit un point M, la valeur du coefficient de coma peut varier de M jusqu'à P. Dans l'espace

$$\left(\frac{W_{22}}{W_{20}}, \frac{W_{40}}{W_{20}}, \frac{W_{31}}{W_{20}} \right)$$

on a :

$$M \left(\frac{W_{40}}{W_{20}} = -0,5, \quad \frac{W_{22}}{W_{20}} = -0,3 \right) \quad \overline{MP} = 0,23$$

ou bien, dans l'espace des coefficients d'aberration :

$$W_{20} = 0,2818 \frac{\lambda}{s}, \quad W_{40} = -0,1409 \frac{\lambda}{s}, \quad W_{22} = -0,0845 \frac{\lambda}{s} \quad |W_{31}| < 0,0648 \frac{\lambda}{s}.$$

Pour une fréquence spatiale $s = 0,01$

$$W_{20} = 28\lambda, \quad W_{40} = -14\lambda, \quad W_{22} = -8,5\lambda, \quad |W_{31}| < 6,5\lambda.$$

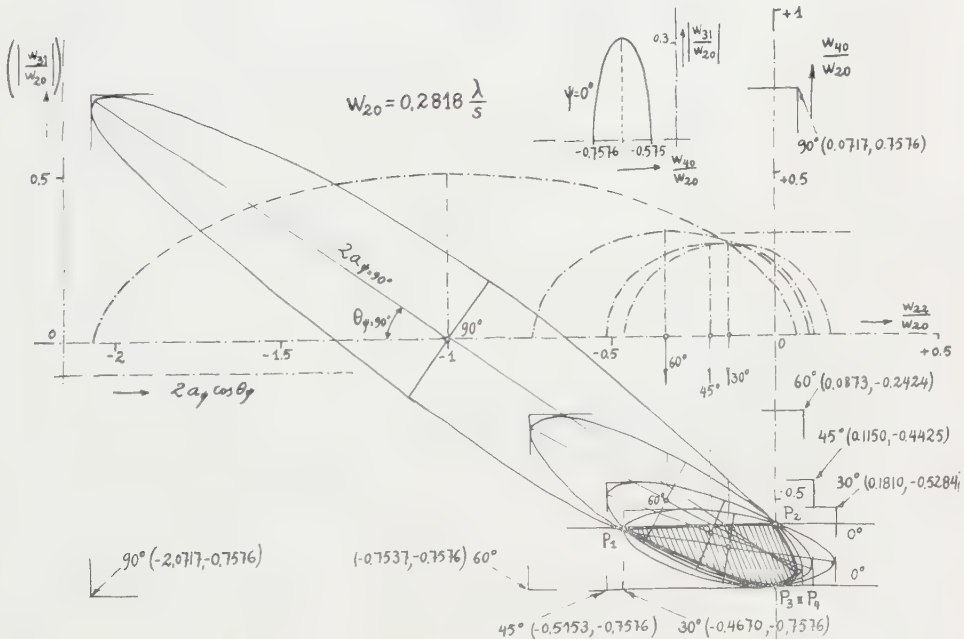
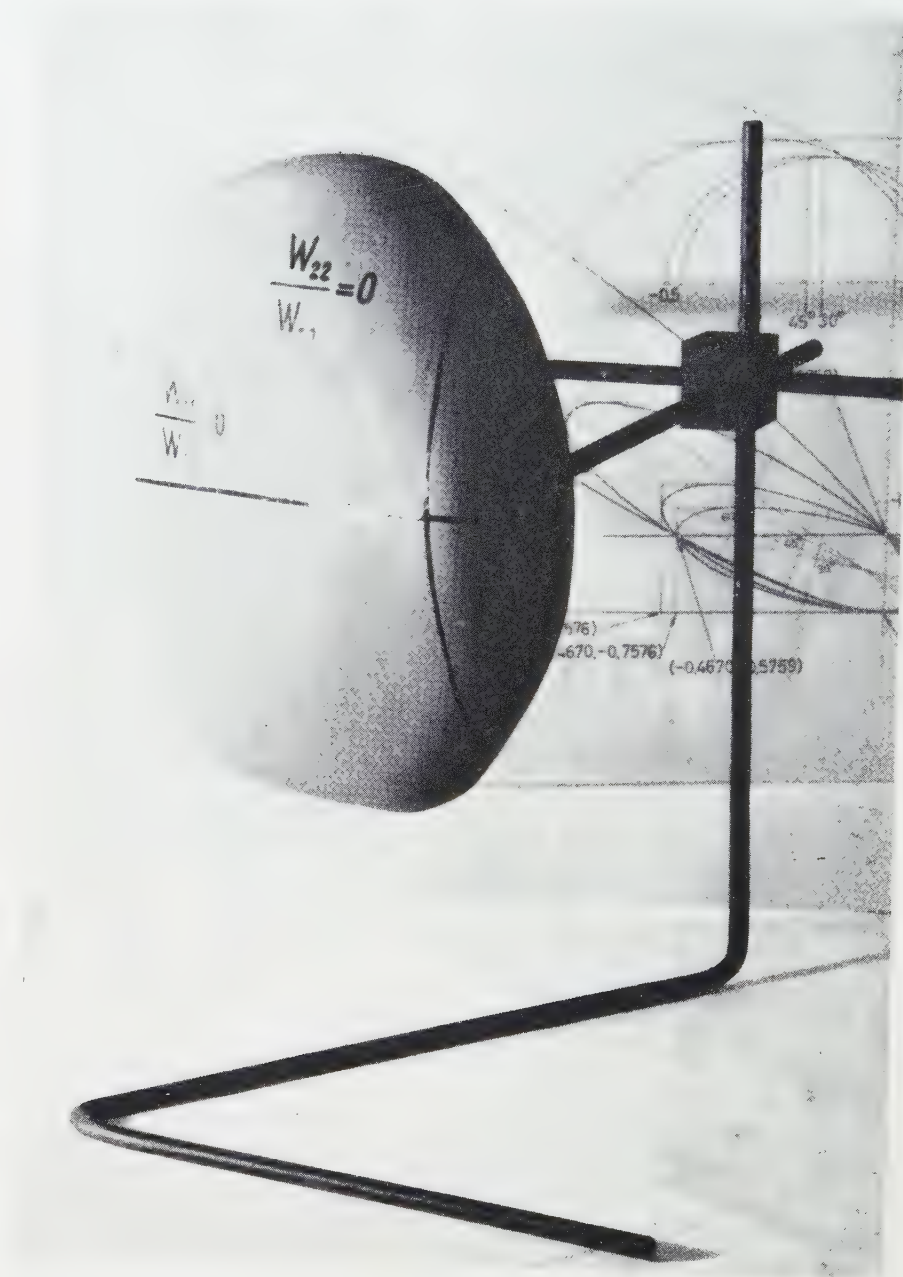


Figure 2. Solide de tolérances pour un défaut de mise au point $W_{20} = 0,2818(\lambda/s)$. Avec les éléments présentés on peut trouver un point quelconque de tolérance. Les ellipsoïdes correspondent aux diverses orientations de la mire.



Solide de tolérances construit pour un défaut de mise au point $W_{20}=0,2818(\lambda/s)$ (figure 2).

Les points intérieurs à toutes les quadriques sont les seuls points qui restent dans la tolérance pour n'importe quelle orientation de la mire. Tous ces points définissent un solide que nous appelons 'Solide de Tolérances'. Toutes les coniques dans le plan $W_{31}/W_{20}=0$ ont quatre points en commun

$$\begin{aligned} P_1 & \left\{ -\frac{2}{9} - \frac{4}{9} \sqrt{[f_2(W_{20})]} ; -\frac{4}{6} + \frac{1}{6} \sqrt{[f_2(W_{20})]} \right\}, \\ P_2 & \left(0 ; \quad \quad \quad \right) \\ P_3 & \left\{ -\frac{2}{9} + \frac{4}{9} \sqrt{[f_2(W_{20})]} ; -\frac{4}{6} - \frac{1}{6} \sqrt{[f_2(W_{20})]} \right\} f_2(W_{20}) = 2 \left(9 \frac{h}{W_{20}^2} - 1 \right) \\ P_4 & \left(0 ; \quad \quad \quad \right) \end{aligned} \quad (15)$$

$P_3 \equiv P_4$ dans le cas particulier $W_{20}=0,2818(\lambda/s)$. Les points P_2 et P_4 sur l'axe indiquent, qu'en l'absence de coma et d'astigmatisme, la tolérance d'aberration

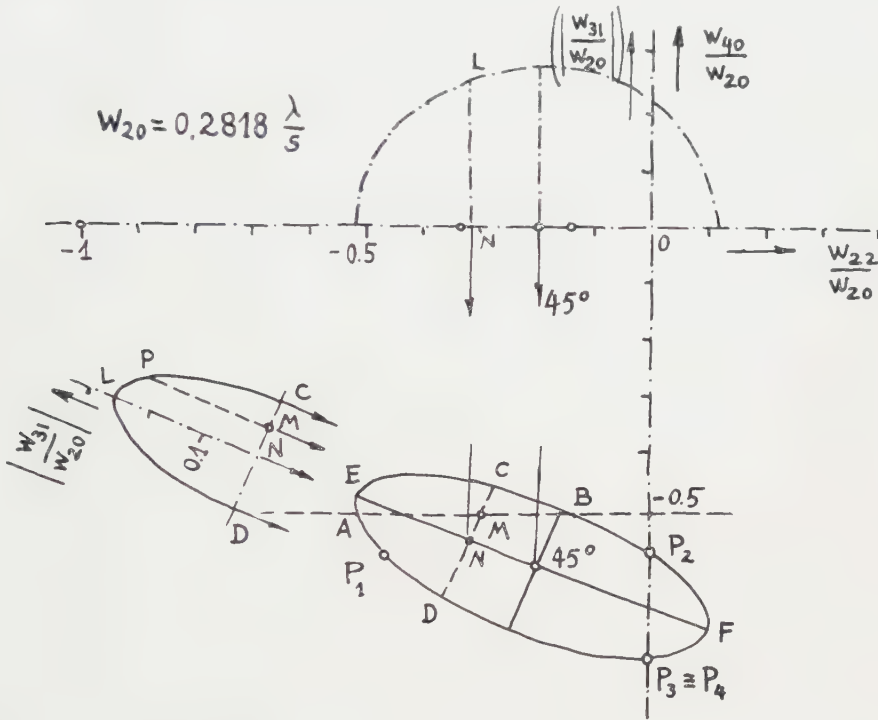


Figure 3. Résolution graphique d'un cas concret; défaut de mise au point $W_{20}=0,2818(\lambda/s)$, aberration sphérique $W_{40}/W_{20}=-0,5$, orientation de la mire $\psi=45^\circ$.

sphérique est indépendante de l'orientation de la mire; conclusion tout à fait normale, puisque le défaut de mise au point et l'aberration sphérique sont des aberrations de symétrie circulaire.

Dans la figure 2 le plan $W_{40}/W_{20}=0$ ne coupe pas le solide de tolérances et, en conséquence, pour une aberration sphérique nulle il n'existera aucun système dans la tolérance; ce résultat peut s'expliquer par le défaut de mise au point. Le solide de tolérances sera coupé par le plan $W_{40}/W_{20}=0$ si la double limitation de (12b) est telle que les bornes sont l'une positive et l'autre négative. Cette condition imposée on trouve:

$$W_{20}^2 < \frac{9-8\sin^2\psi}{\cos^2\psi} \frac{h}{1+4\cos^2\psi}. \quad (16)$$

C'est-à-dire, que pour le cas de l'aberration sphérique nulle, il faut multiplier la tolérance du défaut de mise au point par un facteur

$$\sqrt{\left(\frac{1}{1 + 4 \cos^2 \psi}\right)} < 1.$$

Tous les résultats seront symétriques par rapport au centre de coordonnées, dans l'espace

$$\left(\frac{W_{22}}{W_{20}}, \frac{W_{40}}{W_{20}}, \frac{W_{31}}{W_{20}}\right)$$

si on change le signe du défaut de mise au point.

6. APPLICATION DES RESULTATS

La validité des résultats se limite à la bande des fréquences spatiales $s < 0,2$, [2], [4], [5].

6.1. Objectif photographique

Le pouvoir de résolution d'un objectif photographique exprimé en mm^{-1} pour une ouverture $f/4$ et une longueur d'onde de $5 \times 10^{-1} \text{ mm}$, est de 500 lin/mm. Mais l'émulsion photographique limite la bande de fréquences, de telle façon que l'objectif travaille à de faibles fréquences. En effet, une valeur de 25 lin/mm, avec un transmission de 50 pour cent [6] est normale pour une émulsion photographique, cela veut dire que l'objectif travaillera avec une fréquence spatiale $s = 0,1$.

Les valeurs correspondantes, pour cette fréquence, à l'ensemble déterminé dans la figure 3, sont :

$$W_{20} = 2,8\lambda, \quad W_{40} = -1,4\lambda, \quad W_{22} = -0,85\lambda, \quad |W_{31}| < 0,65\lambda.$$

6.2. Instruments pour la vision de nuit

L'application à ce cas, est beaucoup plus exacte, donc l'instrument travaillera avec une bande de fréquences spatiales plus étroite. Le pouvoir de résolution de l'oeil pour une luminance de 10^{-3} nit , peut s'admettre de $20'$ d'arc; traduit en fréquence spatiale à travers l'instrument qu'on utilise, une jumelle 7×50 par exemple, il lui correspond une fréquence $s = 0,024$. Si la vision de nuit est un problème de reconnaissance des contrastes, on pourra admettre une modulation suffisante pour atteindre une perte du contraste jusqu'à arriver au minimum perceptible pour l'œil, 0,02. Dans ces conditions on doit vérifier :

$$\frac{4C_0 M}{\pi} \geq 0,01 \quad (17)$$

pour la mire en créneaux, et

$$MC_0 \geq 0,01 \quad (18)$$

pour une mire sinusoïdale; C_0 étant le contraste objet dans les deux cas. L'application de la relation (2) aux expressions (17) et (18) conduit aux conditions de tolérance suivantes :

$$\phi \leq \frac{h}{W_{20}^2} \left[5 - \frac{\pi}{400C_0} \right]$$

pour la mire en créneaux, et

$$\phi \leq \frac{h}{W_{20}^2} \left[5 - \frac{5}{100C_0} \right]$$

pour la mire sinusoïdale. Alors, les tolérances de vision nuit s'obtiendront en multipliant les tolérances de vision de jour par les facteurs :

$$f_c = \left[5 - \frac{\pi}{400C_0} \right]^{1/2}, \quad f_s = \left[5 - \frac{5}{100C_0} \right]^{1/2}$$

correspondants respectivement à la mire en créneaux et sinusoïdale. Ces deux facteurs sont représentés dans la figure 4. Dans le calcul de la mire en créneaux nous avons négligé les harmoniques à cause du filtrage de l'œil. L'ensemble des tolérances trouvées dans la figure 3, se traduit dans ce cas et pour $C=0,25$ par :

$$W_{20} = 26\lambda, \quad W_{40} = -13,5\lambda, \quad W_{22} = -7,8\lambda, \quad |W_{31}| < 6\lambda.$$

Ces tolérances très larges permettront de simplifier l'instrument optique et de ce fait d'améliorer sa transparence.

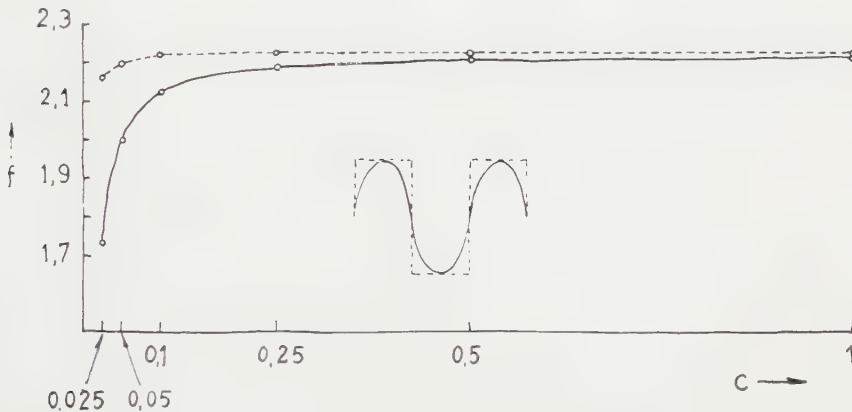


Figure 4. Facteur par lequel il faut multiplier les tolérances de vision de jour pour trouver les tolérances de vision de nuit. En Abscisses, contraste objet.

7. VERIFICATION EXPERIMENTALE

Nous avons essayé de vérifier les résultats théoriques. Nous avons utilisé une jumelle à prismes 7×50 , d'ouverture 1/3,5, avec un léger excentrement du système optique de telle façon que, même au centre du champ, nous ayons de la coma et de l'astigmatisme; nous avons introduit un défaut de mise au point qui conduit à une variation de toutes les aberrations, mesurant celles-ci par rapport à l'aberration correspondant à la meilleure mise au point visuelle, compte tenu de la myopie nocturne de l'œil, $-1D$ dans notre cas. Nous avons enregistré sur un film Plus X les images des mires de pas différents, placées au foyer d'un collimateur travaillant à 1/20, à travers la jumelle, et avec les différentes mises au point, $-1D, 0D, 2D, 4D$, choisies visuellement pour atteindre la limite du contraste pour lequel l'œil peut encore reconnaître le nombre de traits de la mire. Pour l'enregistrement nous avons utilisé un objectif photographique AXIAR $f 360$ mm, diaphragmé par la pupille de sortie de la jumelle, et travaillant à 1/50.

La figure 5 représente le schéma du montage. L'éclairage incohérent des mires est assuré par un verre dépoli. Les deux polariseurs règlent la luminance à la valeur désirée. Un filtre interférentiel, placé dans le faisceau lumineux, nous permet de travailler avec de la lumière assez monochromatique

$$\lambda = 5,6 \times 10^{-4} \text{ mm.}$$

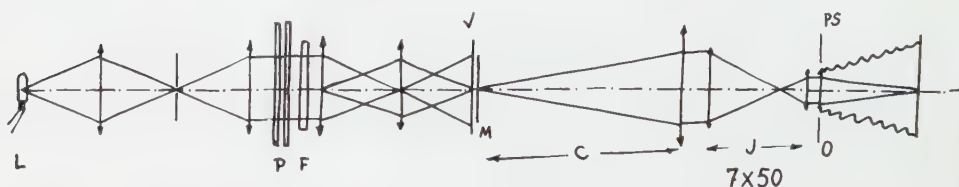


Figure 5. Montage expérimental pour les instruments de vision. L, lampe; P, polariseurs réglant la luminance; F, filtre interférentiel; V, verre dépoli; M, mires; C, collimateur; J, jumelle 7 × 50; O, objectif photographique placé dans la pupille de sortie, PS, de la jumelle.

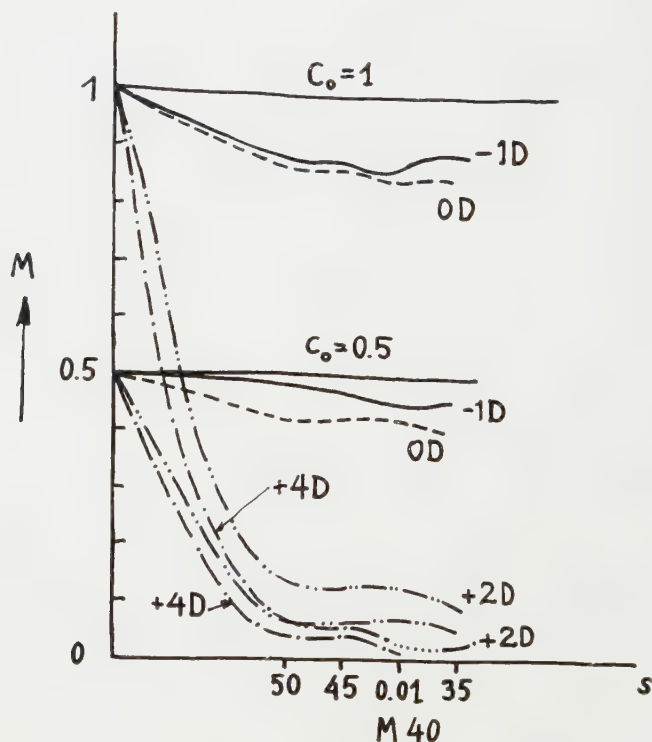


Figure 6. Courbes de modulation pour les différents défauts de mise au point et pour deux contrastes objet. Sont dessinées aussi les courbes de l'instrument parfait.

Les densités mesurées ont été traduites en intensités pour faire le calcul des contrastes à la sortie de la jumelle.

La figure 6 représente les courbes de modulation pour la bande de fréquences utilisée, et pour deux contrastes objet différents. Nous avons choisi trois mires M50, M45, M40, correspondants à des fréquences spatiales $s = 0,008; 0,0097; 0,01$;

ses premiers harmoniques ne sont plus transmis pour l'oeil. L'interprétation des interférogrammes de la jumelle nous permet d'obtenir les valeurs de coefficients du développement de l'onde aberrante; ces valeurs mises dans l'équation déduite de (9), pour la condition expérimentale $\psi=0$, nous donnent les valeurs suivantes de la fonction ϕ :

$$\begin{array}{ll} \text{Pour } -1D & \phi = 85,54\lambda^2, \\ 0D & = 17,58\lambda^2, \\ 2D & = 177,69\lambda^2. \end{array}$$

Les valeurs du deuxième membre de (9) calculées pour nos fréquences spatiales sont :

$$\begin{array}{ll} \text{Pour M50} & \frac{0,01\lambda^2}{s^2} = 156\lambda^2, \\ M45 & = 106\lambda^2, \\ M40 & = 100\lambda^2. \end{array}$$

La comparaison des deux résultats met en accord les résultats théoriques et expérimentaux (figure 6). Pour la mise au point 4D la modulation est masquée par la granularité et les mesures du contraste ne sont pas assez précises.

8. CONCLUSION

Nous avons travaillé avec un instrument de série et, en conséquence, il a été impossible de faire l'exploration de tout l'espace de tolérances et de vérifier les particularités de la forme du solide de tolérances, mais, malgré tout, la bonne concordance trouvée dans les résultats, permettra, à notre avis, d'obtenir des instruments plus simples, à cause des aberrations plus larges, réalisant ainsi une économie considérable et une amélioration photométrique. Dans le cas des instruments pour la vision de nuit, il faudra peut-être modifier les résultats concernant la performance du récepteur, mais la méthode développée restera valable.

Les seules limitations de la méthode sont celles imposées dans l'ouverture et dans le champ par les hypothèses admises dans le développement de la Théorie de Formation des Images.

REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier Professeur Maréchal, dont les conseils nous ont été d'un précieux secours, et à la Fondation 'Juan March' de Madrid dont l'aide nous a permis de rester à Paris.

A general condition has been found for the tolerances of all types of aberrations in an optical system for low spatial frequencies, using Hopkins' method and criterion. The results are applied to a photographic objective and to an instrument for night vision. The tolerances in this case are found by multiplying those for daylight vision by a factor depending on the object contrast. Experimental verification of the results is given. The application of these tolerances in optical calculation suggests that an improvement is possible in the photometry of instruments by using simpler systems, without loss of definition.

Mit Hilfe der Methode und des Kriteriums nach Hopkins kann man die allgemeine Toleranzbedingung für die Gesamtheit der Aberrationen eines für niedrige Lienienfrequenzen bestimmten optischen Systems erhalten. Die Ergebnisse werden auf ein photographisches Objektiv und auf ein Gerät für Nachtbeobachtung angewendet. Man bekommt die Toleranzen für diesen Fall durch Multiplikation der Toleranzen für Tagesbeobachtungen mit einem Faktor, der vom Objektkontrast abhängt. Die Ergebnisse werden durch den Versuch bestätigt. Die Berücksichtigung dieser Überlegungen bei der optischen Rechnung läßt hoffen, die Helligkeit der Instrumente verbessern zu können, indem man das System vereinfacht, ohne seine Leistungsfähigkeit zu beeinträchtigen.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] HOPKINS, H. H., 1957, *Proc. phys. Soc. Lond. B*, **70**, 450.
- [2] HOPKINS, H. H., 1957, *Proc. phys. Soc. Lond. B*, **70**, 102.
- [3] MARÉCHAL, A., 1952, *Imagerie géométrique. Aberrations*. Ed. R.O.
- [4] MIYAMOTO, 1959, *J. opt. Soc. Amer.*, **49**, 35.
- [5] GOODBODY, 1957-58, *Elec. Acta*, **2**.
- [6] MME. MARQUET, 1959, *Opt. Acta*, **6**, 404.

Einige Bemerkungen zum Problem der optischen Bildgütebeurteilung

von E. HEYNACHER†

Mitteilung aus dem Optischen Institut der Technischen Universität Berlin

(Received 16 November 1959)

Es wird die Frage nach geeigneten Kriterien und Methoden zur Bildgütebeurteilung behandelt und dabei insbesondere auf die Schwierigkeiten eingegangen, die durch die Besonderheiten der Bildübertragung durch das Betrachterauge entstehen.

Zur Frage, woran man die Abbildungsleistungen optischer Systeme beurteilen kann, sind bereits zahlreiche Untersuchungen durchgeführt worden. Die erarbeiteten, teilweise vielfach bewährten Vorschläge zeigen, daß man das Problem von verschiedenen Seiten erfolgreich anfassen kann. Tatsächlich ist es wohl auch ziemlich gleichgültig, ob man ein strahlen- oder wellenoptisches Kriterium über die Strahlenvereinigung benutzt, ob man die Übertragungsfunktion prüft oder geeignete, vom System entworfene Bilder beurteilt. Dem Geübten gibt die eine wie die andere Methode normalerweise hinreichend Auskunft. Bei kleinen Unterschieden und ganz konkreten Fragestellungen allerdings werden (außer in einigen Sonderfällen) alle abstrahierten Gütemaße unsicher. Hier bleibt nichts anderes übrig, als sich Bilder der Objekte, die das System abbilden soll, zu verschaffen und dem Auge die Entscheidung zu überlassen. Das ist besonders deswegen notwendig, weil das vom Auge 'gesehene' Bild in den meisten Fällen erheblich von dem objektiv vorliegenden Bild abweicht (Machsches Kontrastphänomen) [1] und sich diese Abweichungen quantitativ nur sehr schwer erfassen lassen.

Normalerweise wird man sich aber scheuen, Versuchsobjektive zur Klärung derartiger Fragen herzustellen. Im Fall inkohärenter Objektbeleuchtung, auf den wir uns hier beschränken wollen, ist das auch nicht notwendig. Hier kann man sich schon im Entwurfsstadium des optischen Systems bei Kenntnis der Helligkeitsverteilung im Bild eines Punktes—im Folgenden im Anschluß von K. Strehl [2] als Lichtgebirge bezeichnet—die Möglichkeit einer visuellen Bildbeurteilung verschaffen: Bekanntlich ist die Helligkeitsverteilung im Bild eines beliebigen Objektes mathematisch als Faltungsintegral über das Lichtgebirge und die Helligkeitsverteilung im Objekt gegeben. Durch Realisieren der Funktionen unter dem Integral als Durchlässigkeitsverteilungen je eines Filters läßt sich das Integral in einem optischen Analogie-Gerät über seinen ganzen Definitionsbereich gleichzeitig als Helligkeitsverteilung sichtbar machen [3].

Der Einfluß des Auges auf die Bildbeurteilung ist zweifacher Art: Erstens besitzt auch das Auge als Übertragungskanal nur eine endliche Bandbreite. Es ist daher sinnvoll, vom optischen System die (möglichst gute) Übertragung nur des Frequenzbereiches zu verlangen, der vom Auge auch wirklich wahrgenommen werden kann. Zweitens spielt für die Bildbeurteilung mit dem Auge das

† Jetzt: Carl Zeiss, Oberkochen.

schon genannte Machsche Kontrastphänomen eine sehr bedeutsame Rolle. Es bewirkt nach unseren Erfahrungen wegen seiner Kompliziertheit, daß sich der Übertragungsprozeß durch das Auge im allgemeinen nicht mit ausreichender Genauigkeit als linearer Prozeß deuten läßt:

Bei Betrachtungen über das endliche Auflösungsvermögen des Auges ist es üblich, die Schärfe S (=reziproke Winkelausdehnung des kleinsten erkennbaren Details in Winkelminuten gemessen) anzugeben. Ihr entspricht bei der Betrachtungsentfernung s die wahrnehmbare Bandbreite im betrachteten Bild

$$N^* = S \frac{1}{s} 3,5 \times 10^3 \text{ [Linien/mm]}$$

(Zahlenfaktor = Umrechnungsfaktor von Winkelmaß in Bogenmaß). Bei Okularbeobachtung tritt an die Stelle von s die Brennweite f_{Ok} des Okulars, bei perspektivisch richtiger Betrachtung photographischer Bilder die Brennweite f_{Obj} des Aufnahmeobjektivs. Der Wert von N^* liegt normalerweise erheblich unterhalb der Bandbreite des abbildenden Objektivs. Im Gebiet der Photographie z.B. erhält man für N^* , bezogen auf die Bildebene eines Kleinbildobjektivs der Brennweite $f = 50 \text{ mm}$ unter der Voraussetzung perspektivisch richtiger Betrachtung der Bilder:

$$\begin{aligned} N^*_{(1)} &= 70 \text{ [Linien/mm]}, \quad \text{wenn } S = 1, \\ N^*_{(0,5)} &= 35 \text{ [Linien/mm]}, \quad \text{wenn } S = 0,5 \text{ (bequemes Sehen)} \end{aligned}$$

angenommen wird. Demgegenüber ist die inkohärente Bandbreite N_{ink} für ein Objektiv mit der Blendenzahl $k = 3$ für $\lambda = 5,5 \times 10^{-4} \text{ mm}$ um eine Zehnerpotenz größer

$$N_{\text{ink}} = \frac{1}{k\lambda} \approx 700 \text{ [Linien/mm]}.$$

Die angegebenen Werte von N^* entsprechen nebenbeobachtet etwa den von normalen photographischen Amateuremulsionen gerade eben bzw. bequem auflösbaren 'Grenzfrequenzen'.

Der Frequenzbereich, in dem das Machsche Kontrastphänomen zur Wirkung kommt, ist überraschend groß. Betrachtet man ein Bild mit normalen Kontrasten so, daß die Grenzfrequenz im Bild gerade mit der dem Auge bei bequemer Sehen zuzuordnenden Grenzfrequenz übereinstimmt (Betrachtung mit förderlicher Vergrößerung), so sind die Machschen Streifen erkennbar. Bei Vergrößerung des Bildes (Verkleinerung der Grenzfrequenz des Bildes gegenüber der Grenzfrequenz des Auges) bleiben sie sichtbar und sind selbst bei $N_{\text{Bild}} = \frac{1}{10} N^*$ noch immer nicht verschwunden! Sie gehen erst bei noch stärkerer Verkleinerung der Grenzfrequenz des Bildes allmählich verloren. Daraus folgt, daß sich die Wirksamkeit des Machschen Phänomens praktisch über den ganzen Frequenzbereich des Auges erstreckt. Zur Demonstration der Schwierigkeiten, die insbesondere durch das Machsche Kontrastphänomen hervorgerufen werden, sei ein Beispiel betrachtet (Abb. 1–3). Es zeigt, daß zu zwei sich umeinander schlängelnden Übertragungskurven Bilder gehören können, die sich sehr deutlich voneinander unterscheiden. Man sieht daraus, daß bei der Interpretation von Übertragungskurven einige Vorsicht am Platze ist.

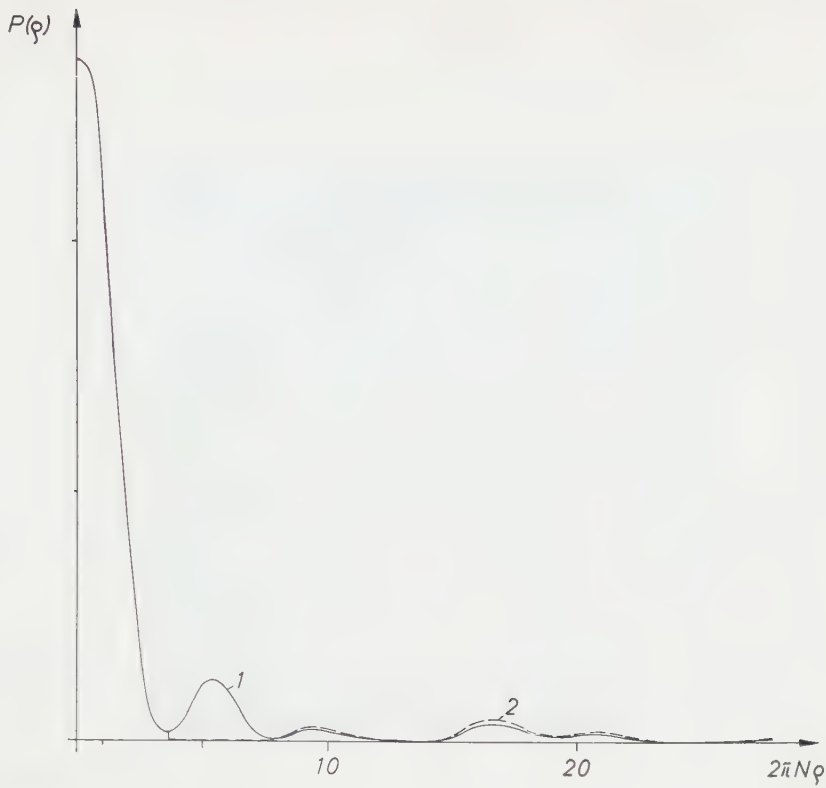


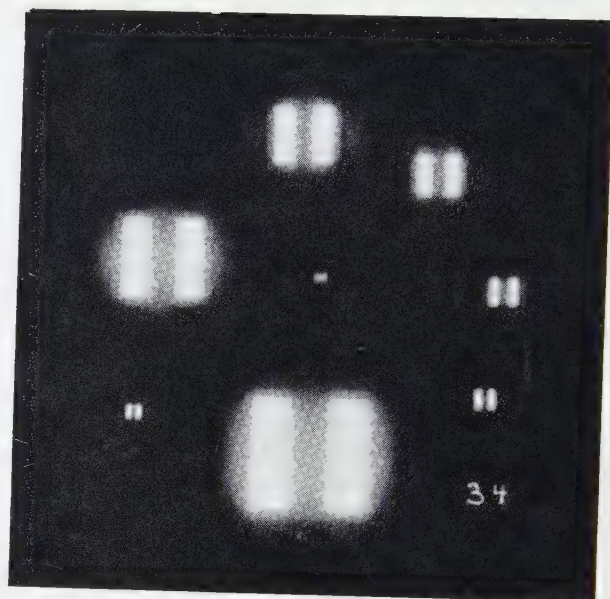
Abb. 1. Radiale Helligkeitsverteilung $P(\rho)$ in zwei rotationssymmetrischen Lichtgebirgen (1 ausgezogen, 2 gestrichelt). Sie unterscheiden sich dadurch, daß im Lichtgebirge 2 der innerste Beugungsring unterdrückt ist und sein Lichtstromanteil proportional auf die weiter außen liegenden Beugungsringe verteilt wurde.

$$\left(N = \frac{\sin u}{\lambda} = \text{Bandbreite bei kohärenter Abbildung.} \right)$$



Abb. 2. Zu den Lichtgebirgen 1 und 2 der Abb. 1 gehörige Übertragungskurven $\ddot{U}(\nu)$ sowie der Anteil des innersten Ringes von Beispiel 1 an der Übertragungsfunktion (3) [4].

$$\left(\frac{\nu}{N} = \text{relative Ortsfrequenz.} \right)$$



(a)



(b)

Abb. 3. Cob-Test-Bilder, oben für das Beispiel 1, unten für das Beispiel 2 der Abb. 1 u. 2. Sie wurden in einem optischen Analogie-Gerät durch Faltung der Lichtgebirge mit dem Cobb-Test gewonnen [5], [6].

Die zu einer sicheren Beurteilung notwendige Erfahrung läßt sich verhältnismäßig leicht durch Vergleich zwischen Lichtgebirgen, Übertragungskurven und den Bildern ausgedehnter Objekte an Beispielen in der Art des gezeigten gewinnen. Dann gibt die Übertragungsfunktion in den meisten Fällen sehr bequem und sicher Aufschluß über die Abbildungseigenschaften des optischen Systems. Für den Praktiker ist diese Funktion gut zugänglich am Bild des Radialsinusgitters. An ihm gewinnt man die Kontrastübertragungsfunktion $\tilde{U}(r, \phi)$ durch Photometrie längs der Helligkeitsmaxima (I_{\max}) und Minima (I_{\min}) und Bilden von $(I_{\max} - I_{\min}) : (I_{\max} + I_{\min})$ an benachbarten Stellen (für $r = \text{const}$)

$$|\tilde{U}(r, \phi)| = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

und die Phase ϑ der Übertragungsfunktion durch Vergleich der Lage der Extrema in Objekt und Bild

$$\tilde{U}(p, \phi; \vartheta) = |\tilde{U}(p, \phi)| \exp(i\vartheta).$$

Dabei seien (r, ϕ) Polarkoordinaten mit dem Ursprung im geometrischen Zentrum des Radialgitters, $p = (1/c)r$ die zu r gehörige Periodenlänge ($c = \text{Zahl der Perioden auf dem Kreisumfang}$). Man ist also beim Betrachten des Radialsinusgitterbildes in der Lage, mit einem Blick die zweidimensionale Übertragungsfunktion einschließlich ihrer Phase zu überschauen. Abb. 4 gibt ein Beispiel. Es stellt einen Ausschnitt aus dem Radialsinusgitterbild für eine mit Koma behaftete Abbildung dar. Es zeigt sehr deutlich den Gang der Phase der Übertragungsfunktion.

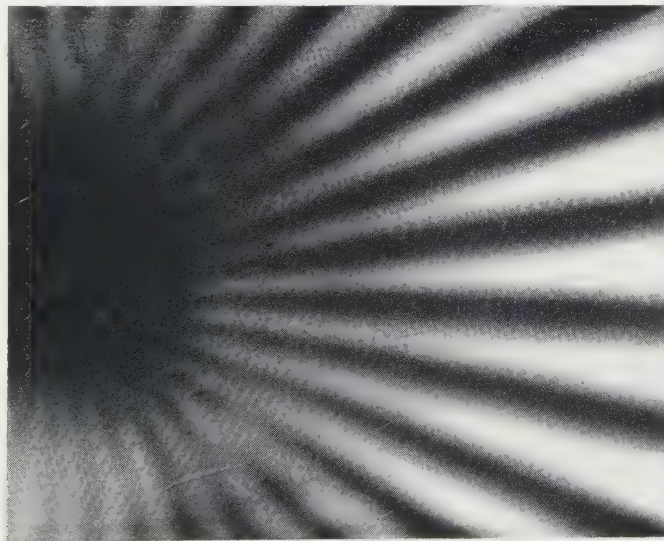


Abb. 4. Das Radialsinusgitter als Testobjekt zur Gewinnung der Übertragungsfunktion einschließlich ihrer Phase. Bild eines Radialsinusgitters für eine mit Koma behaftete Abbildung [5, 6].

Gegenüber dem Radialsinusgitter hat das Radialraster (Siemensstern) den Nachteil, daß die Phasenbeziehung im Bild für Frequenzen unter $\frac{1}{3}$ der Grenzfrequenz zugedeckt werden. Andererseits gestattet es aber, den Einfluß des

Auges auf die Beurteilung der Abbildung kantenförmiger Strukturen, wie sie ja in den meisten Objekten vorliegen, zu erfassen.

Als Testobjekt scheint uns das Radialsinusgitter gegenüber anderen Testobjekten den Vorteil zu haben, daß sich aus ihm verhältnismäßig leicht universelle Aussagen über die Abbildungseigenschaften machen lassen, während das Radialraster ein Test darstellt, das sich für die visuelle Kontrolle von Kontrastwiedergabe und 'Zeichenschärfe' besonders eignet.

ANERKENNUNG

Herrn Professor Dr. H. Slevogt danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für wertvolle Diskussionen.

The assessment of image quality is discussed in terms of various criteria and methods. In particular the difficulties are examined, which arise from the properties of image transfer through the human eye.

On examine les critères et méthodes concernant la qualité des images et on envisage surtout les difficultés qui proviennent de la transmission de l'image à travers l'oeil de l'observateur.

LITERATUR

- [1] MACH, E., 1865, *S.B. Akad. Wiss., Wien*, **52**, II. Abt., 303; 1866, *Ibid.*, **54**, II. Abt., 131; 1868, *Ibid.*, **57**, II. Abt., 11.
- [2] STREHL, K., 1897, *Z. InstrumKde*, **17**, 165.
- [3] BRAGG, W. L., 1944, *Nature, Lond.*, **154**, 69.
- [4] HEYNACHER, E., 1959, *Opt. Acta*, **6**, 266
- [5] HEYNACHER, E., 1958, Dissertation, TU Berlin.
- [6] HEYNACHER, E., 1960, *Z. Instrum Kde*, **68**, 64.

The problem of optimum optical systems†

by ROMAN S. INGARDEN

Department of Theoretical Physics, University of Wrocław,
Wrocław, Poland

(Received 15 August 1959)

A new definition of the entropy of the light intensity distribution in the object and image planes of an optical system is formulated. A definition of classes C_m^n of optical systems and a definition of the optimum system in each class for a given object point are also given. For finding the optimum system in a class C_0^n an extremal problem is formulated and in a class C_m^0 a variational problem (in the general case of a class C_m^n two types of problems occur). When an optical system is non-conservative (the light energy in the object plane is not equal to the light energy in the image plane), the variational problem is composite.

1. INTRODUCTION

The problem of determining an optical system with the greatest possible resolving power among systems of arbitrary class was first formulated and approximately solved in 1954 [1]. Diffraction and geometrical aberrations were considered simultaneously.

In the language of information theory, whose application to optics were developed in the meantime, c.f., e.g., [2, 3], this problem may be reformulated as determining the optical instrument giving the greatest possible amount of information about the object. The notion of amount of information (or negative entropy) makes possible a new approach to the problem, more general and much more simple in principle than that of [1].

2. ASSUMPTIONS AND NOTATION

For the sake of simplicity we shall confine ourselves to scalar theory of monochromatic light.

Let $\xi = (\xi_1, \xi_2), \xi_3$ be Cartesian rectangular coordinates in the object space, and $x = (x_1, x_2), x_3$ be the ones in the image space. Let, further, $\xi_3 = 0, x_3 = 0$ be equations of object and image planes, respectively. The optical representation may be determined by Mandelstam's formulae [4, 5]:

$$u(x) = \int K(x, \xi) u(\xi) d^2\xi \quad (1)$$

(u = the light amplitude) in the case of coherent light, and

$$v(x) = \int |K(x, \xi)|^2 v(\xi) d^2\xi \quad (2)$$

† This paper was read at the Fifth Conference of the International Commission for Optics in Stockholm, August 1959.

in the case of incoherent light. Here $v = |u|^2$ is the light intensity and $K(x, \xi)$ a characteristic function of the instrument. Our discussion will be confined to the case of incoherent light only.

For most of our paper we normalize v by means of the energy condition

$$\int v(\xi) d^2\xi = \int v(x) d^2x = k^2 \quad (3)$$

(k = the wave number) assuming that no loss (dissipation) of energy occurs in the instrument between object and image planes. (Conservative system.) This condition involves that

$$\int |K(x, \xi)|^2 d^2x = v \quad (4)$$

for each ξ (and the same with ξ and x interchanged).

3. DEFINITION OF ENTROPY

We define (dimensionless) entropy of the intensity distribution of light in object and image planes, respectively, by

$$\sigma = -k^{-2} \int v(\xi) \log [4\pi^2 k^{-4} v(\xi)] d^2\xi, \quad (5)$$

$$s = -k^{-2} \int v(x) \log [4\pi^2 k^{-4} v(x)] d^2x. \quad (6)$$

This definition is strictly analogous to the definition of entropy in statistical mechanics, c.f., e.g., [6],

$$\sigma = - \int \rho(p, q) \log [h^r \rho(p, q)] d^r p d^r q, \quad (7)$$

where the p and q are momenta and coordinates of a mechanical system with r degrees of freedom, $\rho(p, q)$ is its probability density in the phase space, and h is Planck's constant. The 'elementary area' (or 'uncertainty area') $\lambda^2 = 4\pi^2 k^{-2}$ in the image plane, below which it is impossible to localize a photon, cf., e.g., [7], p. 16, corresponds to the 'elementary cell' h^r in the phase space of the mechanical system.

4. CLASSES OF OPTICAL SYSTEMS

If an optical system of some class is determined by n arbitrary parameters $q = (q_1, \dots, q_n)$ and by m arbitrary functions $f = (f_1, \dots, f_m)$, e.g. functions of x , we shall denote this class of systems by C_m^n . As parameters may serve, say, indices of refractions of optical media of the instrument, axial distances of refracting or reflecting (in short: optical) surfaces, radii of spherical optical surfaces, etc. As functions f 's may be taken, e.g. x_3 -coordinates of the optical surfaces ($x_3 = f_i(x)$, $i = 1, \dots, m$), etc. We have

$$|K(x, \xi)|^2 \equiv M(q, f(x), \dot{f}(x), \ddot{f}(x), \dots |x, \xi), \quad (8)$$

where dots over f denote the order of partial derivatives of f . If we use the approximations of the diffractive theory of aberrations developed, e.g., in [8], it may be easily seen that the highest order of derivatives of f occurring in M is two.

5. OPTIMUM OPTICAL SYSTEM

Let us consider a point distribution of light in the object plane

$$v(\xi) = k^2 \delta(\xi - \xi_0), \quad (9)$$

where $\delta(\xi)$ is Dirac's delta function and ξ_0 coordinates of the given point. Then it may be easily proved from (5) that

$$\sigma = -\infty. \quad (10)$$

We shall call an optical system belonging to a class C_m^n the optimum system in the class C_m^n and for the point ξ_0 , if the entropy s (6) for the light distribution (9) is the minimum in the class C_m^n .

6. EXTREMAL PROBLEM

In the case of a class C_0^n we have, according to (9), (2), (6) and (8),

$$\begin{aligned} s(q) &= - \int |K(x, \xi_0)|^2 \log [\lambda^2 |K(x, \xi_0)|^2] d^2x \\ &= - \int M(q|x, \xi_0) \log [\lambda^2 M(q|x, \xi_0)] d^2x. \end{aligned} \quad (11)$$

Because of (4) it should be

$$t(q) = \int M(q|x, \xi_0) d^2x = 1. \quad (12)$$

For finding the minimum of $s(q)$ with the additional condition (12) we may consider the function

$$S(q, \mu) = s(q) + \mu t(q), \quad (13)$$

where μ is the Lagrange multiplier. For the conditional minimum of $s(q)$ we have

$$(a) \frac{\partial S}{\partial q} = 0, \quad (b) \frac{\partial^2 S}{\partial q^2} > 0. \quad (14)$$

After finding q from (14) as a function of μ , μ may be determined from (12).

7. VARIATIONAL PROBLEM

In the case of a class C_m^0 we have, instead of an ordinary extremal problem, a variational problem. The function

$$s[f] = - \int M[f(x), \dot{f}(x), \dots |x, \xi_0] \log \{\lambda^2 M[f(x), \dot{f}(x), \dots |x, \xi_0]\} d^2x \quad (15)$$

should be stationary (and even minimum) when condition

$$\int M[f(x), \dot{f}(x), \dots |x, \xi_0] d^2x = 1 \quad (16)$$

is satisfied. Denoting

$$N[f(x), \dot{f}(x), \dots, \mu(x)|x, \xi_0] = -M(x) \log [\lambda^2 M(x)] + \mu(x) M(x) \quad (17)$$

we obtain relations

$$(a) \frac{\delta N}{\delta f} = 0, \quad (b) \frac{\delta^2 N}{\delta f^2} > 0 \quad (18)$$

for determining $f[x, \mu(x)]$. The function $\mu(x)$ may be found from (16).

8. GENERAL CASE

In the general case C_m^n both sorts of conditions (14) and (18) are to be applied for solution of the problem.

9. NON-CONSERVATIVE SYSTEMS

When the system is non-conservative (i.e. when dissipation of energy between object and image planes caused by reflection, absorption and back diffraction of light cannot be neglected), condition (4) is not valid and we must consider instead of (2)

$$\rho(x) = \frac{\int |K(x, \xi)|^2 v(\xi) d^2 \xi}{\int \int |K(x, \xi)|^2 v(\xi) d^2 x d^2 \xi} \quad (19)$$

and

$$s = - \int \rho(x) \log [\lambda^2 \rho(x)] d^2 x \quad (20)$$

instead of (6). The variational problem for C_m^0 is then a composite one

$$\delta s[f, t[f]] = - \delta \int \frac{M[f(x), \dot{f}(x), \dots | x, \xi_0]}{t[f]} \log \left\{ \lambda^2 \frac{M[f(x), \dot{f}(x), \dots | x, \xi_0]}{t[f]} \right\} d^2 x = 0, \quad (21)$$

where

$$t[f] = \int M[f(x), \dot{f}(x), \dots | x, \xi_0] d^2 x. \quad (22)$$

A method of solution of such a problem is given in [9].

10. FURTHER GENERALIZATIONS

Instead of considering object and image planes $\xi_3=0$, $x_3=0$ we may take

$$\xi_3 = \phi(\xi), \quad x_3 = \psi(x) \quad (23)$$

and formulate a problem of optimum ϕ and ψ , besides of optimum q and/or f . It is possible, too, to discuss arbitrary given $v(\xi)$ instead of the form (9). For given q and/or f the best $v(\xi)$ may also be found.

On donne une nouvelle définition de l'entropie de la distribution d'intensité lumineuse dans les plans objet et image d'un système optique. On donne aussi une définition des classes C_m^n de systèmes optiques ainsi qu'une définition du système optimal dans chaque classe pour un point objet donné. Pour trouver le système optimal dans une classe C_0^n , on formule un problème extrémal, et un problème variationnel pour une classe C_m^0 (dans le cas général d'une classe C_m^n , les deux types de problème interviennent). Lorsqu'un système optique est non-conservatif (l'énergie lumineuse dans le plan objet n'est pas égale à l'énergie lumineuse dans le plan image), le problème variationnel est composite.

Die Entropie der Verteilung der Lichtintensität in Objekt- und Bildebene eines optischen Systems wird neu definiert. Ebenso werden Klassen C_m^n von optischen Systemen und das jeweils beste System in jeder Klasse für einen gegebenen Objektpunkt festgelegt. Die Ermittlung des besten optischen Systems in einer Klasse C_0^n stellt sich als Extremalproblem und in einer Klasse C_m^0 als Variationsproblem dar. (Im allgemeinen Fall der Klasse C_m^n gibt es zwei Typen der Aufgabe.) Wenn ein optisches System nicht konservativ ist, d.h. wenn die Lichtenergie in der Bildebene nicht gleich der in der Objektebene ist, dann wird das Variationsproblem verwickelt.

REFERENCES

- [1] INGARDEN, R. S., and OCHMAN, H., 1954, *Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III*, **2**, 271.
- [2] BLANC-LAPIERRE, A., 1953, *Ann. Inst. Poincaré*, **13**, 245.
- [3] FELLGETT, P. B., and LINFOOT, E. H., 1955, *Phil. Trans. roy. Soc. A*, **247**, 369.
- [4] MANDELSTAM, L., 1912, *Weber-Festschrift*; 1948, *Coll. Pap., Moscow*, **1**, 229.
- [5] MANDELSTAM, L., 1946, *Ź. exp. teor. Phys.*, **16**, 302; 1947, *Coll. Pap., Moscow*, **2**, 388.
- [6] LANDAU, L., and LIFSHITZ, E., 1951, *Statistical Mechanics* (Moscow).
- [7] ACHIEZER, A. I., and BERESTETZKIJ, W. B., 1953, *Quantum Electrodynamics* (Moscow).
- [8] INGARDEN, R. S., 1955, *Acta physica polon.*, **14**, 77.
- [9] INGARDEN, R. S., 1959, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. math. asst. phys.*, **7**, 687.



Superconducting bolometers and spectrometry in the far infra-red†

by T. J. DEAN, G. O. JONES, D. H. MARTIN, P. A. MAWER
and C. H. PERRY

Department of Physics, Queen Mary College (University of London),
London

A superconducting bolometer is described for use in the spectral region
50–1000 microns.

1. INTRODUCTION

Superconducting bolometers depend on the very high temperature-coefficient of resistance of a superconducting metal when in the neighbourhood of its transition temperature (the temperature at which the resistance drops to zero as the metal is cooled). A number of authors have constructed such detectors since Andrews *et al.* [1–4] reported the first in 1942, but, so far as we are aware, none has been sufficiently effective to justify its use in spectroscopy. In this paper we describe the superconducting bolometers which we have recently constructed and which are superior in sensitivity to available detectors of other kinds.

An improved detector is urgently required for spectrometry in the range between 50 and 1000 microns, and our bolometers are designed for use in the grating spectrometers which we are using in this spectral region. We discuss also some details of the methods which we use to test spectral purity in this region.

2. THE SUPERCONDUCTING BOLOMETER

The sensitive elements in our bolometers are evaporated tin films with transition temperatures at about 3.8°K . Liquid helium is used with a manostat device to control the temperature to $\pm 0.001^{\circ}\text{K}$. In our most fully studied bolometer the tin is evaporated upon a thin strip of mica a few millimetres square, supported in a vacuum by nylon threads on which lead is evaporated (figure 1). The lead, being fully superconducting throughout, provides perfect electrical contact while maintaining good thermal insulation. The thermal time constant of this type of bolometer is about 0.1 sec, as can be seen from the response to radiation chopped at a variable frequency illustrated in figure 1.

In order to use the bolometer effectively its signal must be amplified greatly before being applied to an electronic valve amplifier, since the best of these have equivalent noise input resistances of about 0.1 megohm at 10 c/s, the frequency

† This paper was read at the Fifth Conference of the International Commission for Optics in Stockholm, August 1959.

at which the incident radiation is normally chopped, while the resistances of our bolometers are of the order 1 to 10 ohms. The first stage of amplification is therefore by a transformer, which detects the off-balance current in a bridge, of which the bolometer forms one arm, supplied with d.c. or 800 c/s a.c. The transformer operates in the liquid helium bath and has a strip-wound core of a special nickel-iron alloy (provided by the Post Office Research Station, London) having an initial permeability of 7000 at 4°K. Using a second transformer at room temperature in the case of d.c. supply or with the cooled secondary self-tuned for the 800 c/s supply, the resulting signal is applied to a narrow-band low noise amplifier. With d.c. supply to the bridge the input to the amplifier varies at 10 c/s and the detected output gives a direct measure of the radiation intensity. With 800 c/s a.c. the detected output is a 10 c/s signal which is passed through a phase-sensitive detector 'tuned' by a reference signal from the radiation chopper. The final stage before the pen recorder is a smoothing circuit providing a selection of time constants up to 40 sec.

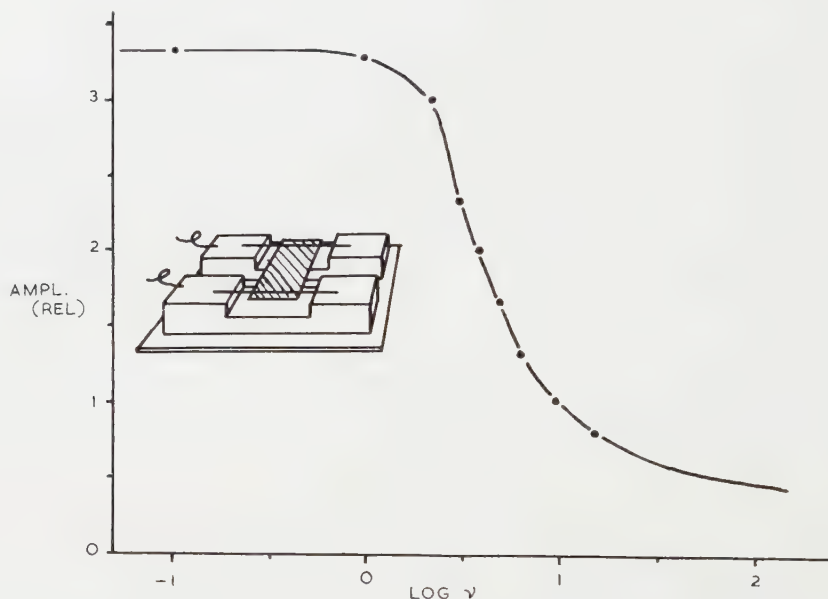


Figure 1. Diagram to illustrate construction of bolometer and measurement of time-constant.

The gain so far achieved with the transformers is not sufficient for the limiting noise to be that from the bolometer. We calculate that the Johnson and temperature fluctuation noise in our bolometer elements would give a minimum detectable signal of 2.5×10^{-14} watts for a receiving area of 3 mm^2 , assuming a chopping frequency of 10 c/s and an overall bandwidth of 0.2 c/s. This is some 40 times better than that achieved in figure 2, described later. The use of the new core materials should lead to an improved performance.

3. USE IN A SPECTROMETER

It would be difficult to maintain a correctly focused image upon the bolometer in the face of the thermal contractions and twisting as the cryostat cools. The problem is simplified by the use of a stainless steel cone, instead of a condensing mirror, to conduct the radiation to the detector, but inadequate attention to positioning the bolometer as closely as possible to the end of the cone can cause a large loss of energy. Placed in the end of the cone are filters, glass for work in the visible region and quartz and paraffin for the far infra-red. These, being at 4°K , protect the bolometer from radiation of wavelengths greater than about 3 microns or less than 50 microns respectively. The cryostat is incorporated in the vacuum spectrometer by a flexible metal bellows.

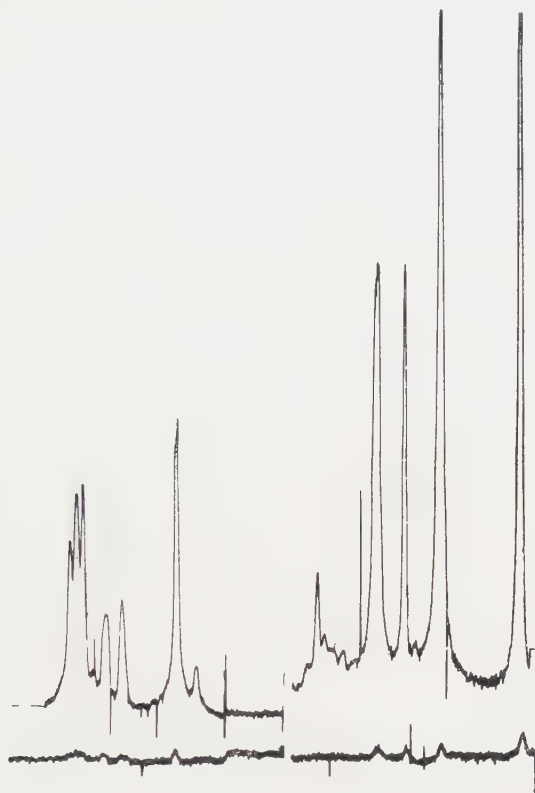


Figure 2. Comparison of Golay detector and superconducting bolometer in visible and near infra-red.

In figure 2 we show records of some of the visible and near infra-red lines emitted by a high-pressure mercury discharge lamp. The upper trace was obtained with a superconducting bolometer of the mica-strip type and the lower trace with a Golay detector under identical optical conditions. (The spectrometer was not of course set up for maximum resolution; it contained several screens with small apertures, and no condensing mirror. The spectral lines are from overlapping orders.) The sensitive areas of the two detectors were respectively 3 mm^2 and 5 mm^2 , and in both cases the effective time constant of the amplifiers was 2 sec and the frequency at which the incident radiation was

chopped was 10 c/s. The trace due to the superconducting bolometer is in two halves which were separated in time by more than an hour, during which the bolometer was in continuous use. The gain in the signal-to-noise ratio over the Golay detector is about $\times 40$. The absorbing surface of the bolometer was the untreated tin film, which in this case was of the fogged grey variety, and had an absorptivity in the visible and near infra-red presumably in excess of, say, 40 per cent. Our main problem in adapting the bolometers for use in the far infra-red has been to obtain surface coatings which have high absorptivities, since metallic surfaces absorb in the far infra-red only to about 1 per cent. We have made an absolute measurement of the minimum detectable signal at about 10 microns using a black body at 0°C . The bolometer used in this case had a bright tin surface of area 3 mm^2 , and the measured minimum detectable signal was somewhat less than 4×10^{-11} watts. This sensitivity is about that quoted by the manufacturers for a good Golay detector and is consistent with the comparison above if the absorptivity of the bright film at 4°K and 10 microns wavelength is about 1 per cent, as seems likely.



Figure 3. Pure rotation spectrum of HCl including a second-order line.

The bolometer has also recently been used (with its highly reflecting surface) to record spectra at wavelengths in the range 100 to 300 microns, with a sensitivity comparable to that of a Golay detector, and we hope to be able to present records to the Conference taken with thallium halide surface coatings, substances which absorb strongly, even in thicknesses of about 1 micron, over a spectral range centred on their crystalline eigen-frequencies, which lie between 150 and 250 microns.

4. TESTS OF SPECTRAL PURITY IN THE FAR INFRA-RED

In conclusion, we add a few remarks about two simple methods of calibrating the spectrometer and testing for spectral purity at wavelengths greater than

100 microns. The rapid fall in energy from a source as wavelength increases means that careful filtering is necessary to prevent energy in the second order of the grating reaching the detector. The gaseous hydrogen halides, HCl and HI, and ammonia, have simple rotation spectra beyond 100 microns, with wavelengths accurately known from near infra-red and microwave data. They provide a useful calibration and in addition a test of spectral purity since those second order lines whose wave-numbers are odd multiples of that of the $J0 \rightarrow 1$ transition appear well separated from first order lines, and may be eliminated by adjustment of the filter combination. In figure 3 we show, as an example, the rotation spectrum of HCl, including a second order line.

For some time certain marked variations in the response of our Golay through the far infra-red region concerned us until we identified them as interference effects in the $\frac{1}{4}$ mm quartz window of the Golay detector. Since then we have used the interference in quartz plates as a convenient method for recalibrating the spectrometer. The order numbers of the successive maxima and minima of transmission are easily identified up to $n=30$, and having once measured the refractive index of quartz, a simple calibrating technique is available. Second order radiation is also clearly revealed in the process.

On décrit un bolomètre supraconducteur utilisable dans la région spectrale comprise entre 50 et 1000 microns.

Es wird ein supraleitendes Bolometer für den Gebrauch im Spektralbereich zwischen 50–1000 μ beschrieben.

REFERENCES

- [1] ANDREWS, D. H., BRUCKSCH, W. F., JNR., ZEIGLER, W. T., and BLANCHARD, E. R., 1942, *Rev. sci. Instrum.*, **13**, 281.
- [2] HULBERT, J. A., and JONES, G. O., 1958, *Proc. phys. Soc. Lond. B*, **68**, 801.
- [3] WILSON, J. L., 1958, Thesis, University of London.
- [4] DEAN, T. J., JONES, G. O., MARTIN, D. H., MAWER, P. A., and PERRY, C. H., 1958, *Proc. Kamerlingh Onnes Conference on Low Temperature Physics*.



Construction and performance of a position-sensitive photo-transistor †

by L. R. BAKER
B.S.I.R.A., England

A description is given of the construction of a solid-state light detector whose voltage output is related in phase to the position of a light spot on the receiving surface. The mechanical, optical and electrical stability is considered in an attempt to approach the very high degree of ultimate sensitivity expected. Test results describing the performance of the detector from these points of view are included.

1. INTRODUCTION

Although much time has been spent in the construction of highly sensitive optical radiation detectors both to cover a wide range of the spectrum, and to operate at very low power levels relatively little effort has been given to developing photo-cells which are primarily sensitive to a change in position of the incident radiation with respect to the receiving surface. Normally a photo-cell should have a uniform sensitive area so that any movement of the radiation pattern does not vary the output. Most detectors are not perfect in this respect, and some are difficult to use because of their high sensitivity to orientation.

There are occasions, however, in instrument design when it is not convenient to use the eye for accurately recording a spatial coincidence, as for example in the repeated setting of a graticule, for aligning a number of separated components or in the dynamic case for closely tracking a moving optical image. The requirement here is that the detector should give a voltage output which changes sign when a spot or line of light passes through a balanced position. In many circumstances a high degree of linearity of response is less important than the electrical, mechanical and optical stability of the null position.

The existence of such a cross-over setting implies the use of a balanced bridge network the component values of which must have the maximum stability. The two halves of the bridge, which for convenience of amplification can be modulated in antiphase, may be fed by the incident radiation divided into two parts. Upon recombination the two beams can be fed into a single photocell and then into a phase sensitive rectifier. Equality in the power of the two beams will result in zero output. Alternatively a single beam may be used in conjunction with a photo-cell having a split photo-cathode, the two halves of which are connected in opposition. In each of these systems the null setting will depend on the magnitude of the optical and electrical impedance of the two arms which must therefore be highly stable and preferably corrected for temperature changes.

A new type of semiconductor photocell first described by Wallmark [1] appeared to possess unique advantages over existing types of position sensitive systems and so the method of construction and the performance of such a photo-cell made by modifying an ordinary photo-transistor is given here. It was felt that the compact nature of this type of cell together with the absence of a physical dividing

† This paper was read at the Fifth Conference of the International Commission for Optics in Stockholm, August 1959.

boundary would permit the construction of a device having good physical stability, since in this instance the bridge network occurs within a single highly purified crystal of germanium.

2. PRINCIPLE OF OPERATION

The principle of operation of the position sensitive photo-transistor depends on the fact that if an n-type germanium wafer with an indium pellet alloyed on the back is non-uniformly illuminated there will be set up a lateral photo-voltage across the plane of the wafer. This voltage, which is in addition to the transverse photo-voltage normally observed between the collector and the base, may be measured with the aid of a pair of ohmic contacts. It is zero if the area of light is uniformly disposed with respect to the contacts on the surface of the germanium, but is positive if on one side and negative if on the other side of the null setting. The basic requirement for the existence of a lateral photo-effect is a junction defined as a transition between regions of different conductivity. Wallmark has shown with a junction between n-type material, in this case germanium and a more heavily doped p-type in our case indium that the photo-voltage should vary linearly with displacement of the light spot, be proportional to the resistivity of the germanium and the total photo-current, and be inversely proportional to the area of cross section of the wafer.

As in the ordinary photo-transistor the frequency response depends on the finite base width over which recombination of the electron-hole pairs created at the surface can occur before they diffuse through to the collector pellet. Since only one junction is needed the thickness of germanium could be reduced to a small fraction of 0.001 in. if need be, probably giving rise to response times considerably in excess of 10 kc/s.

There is no reason why other semiconducting materials should not be used. One would expect for example, that silicon with an intrinsic resistivity of 1000 Ω cm would give a higher photo-voltage than germanium with an intrinsic resistivity of only 47 Ω cm but the latter type was chosen as the p-n junctions are readily available in a number of commercial transistors and it is easier to make the ohmic contacts onto a germanium surface.

3. METHOD OF CONSTRUCTION

A schematic representation of the device is given in figure 1. For the sake of simplicity a three-terminal model sensitive to movement in one direction only is shown. A five-terminal model with an ohmic contact at each corner of the germanium wafer will measure displacements in two coordinate directions.

The basic requirement for the fabrication of this device is a germanium-indium n-p type junction such as exists in diode rectifiers. The element of a photo-transistor can also be used by removing the smaller emitter pellet with an etching solution. If, however, a detector with a restricted range and high sensitivity is needed the emitter pellet can be left in position and an annular lamp filament projected onto the exposed surface of germanium above the larger collector pellet.

The flow diagram shown in figure 2 demonstrates the sequence of operations as used in the construction of a position-sensitive element starting from an OCP71 photo-transistor. The various processes described can be arranged to suit ones

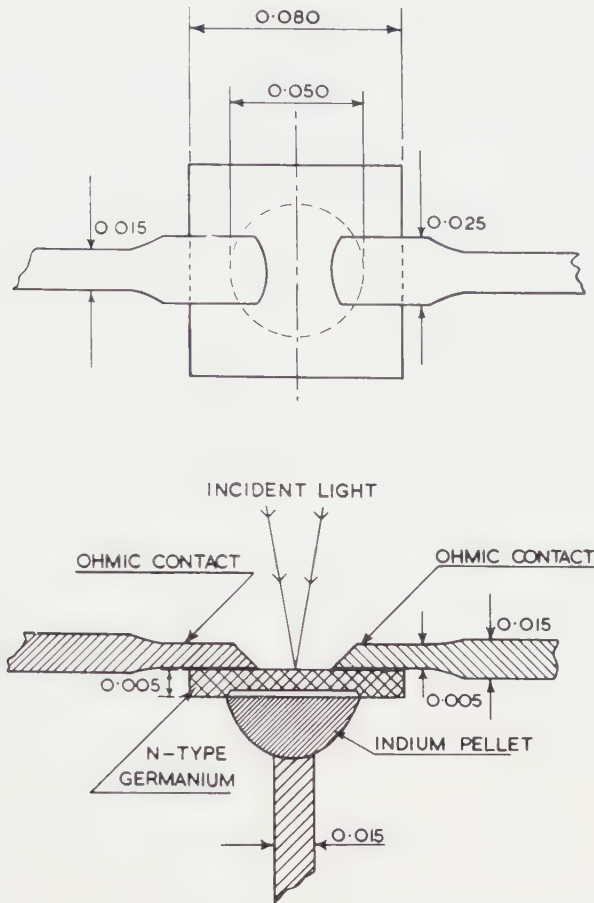


Figure 1. Plan and section view of position-sensitive detector (all dimensions in inches).

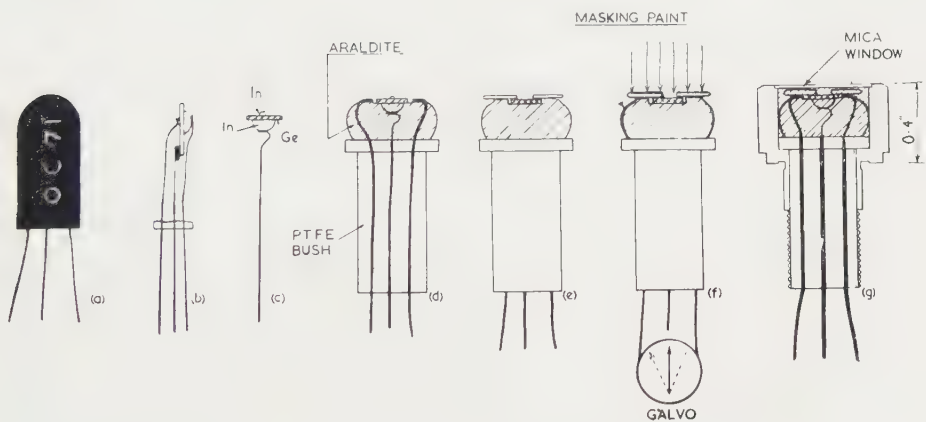


Figure 2. Sequences of operation for construction of a position-sensitive detector.

own requirements, but assuming that an OC71 or OCP71 is to be used the glass envelope should first be removed by scratching the base area with a diamond, damping the surface and then applying a hot wire. The element will probably

be coated with a silicone grease which will come away if left to soak for $\frac{1}{2}$ hour in a mixture of equal parts of methyl ethyl ketone in benzene. The only connection required is the one to the larger of the indium pellets (see (b)) so that the others can be severed and the glass seal chipped away from the base leaving a single wire carrying the indium pellet and wafer at one end as in (a). The base connection is best removed by scratching the germanium across its width with a diamond when it will easily snap off.

For convenience of manipulation an insulating bush (P.T.F.E.) was made to carry the indium pellet wire and the two ohmic contact wires. The ends of the wires were flattened and positioned level with the germanium surface, and to hold these three elements securely during the remaining operations a partially set air-drying epoxy resin such as Araldite was liberally applied so as to completely surround the indium pellet. Only the upper surfaces of the germanium and the wires were left exposed as shown in (d). These surfaces were then chemically etched in a hydrofluoric acid bath [2] so as to remove the emitter pellet and to prepare the germanium for soldering. After washing, the germanium and wires were tinned with Woods metal using a zinc chloride flux, and then a short length of tinned wire was used to connect the prepared areas (see (e)). A light-weight iron was employed for this purpose with the bit turned down to 0.030 in. diameter, and with variac control of the voltage. After washing and drying the device was coated with an opaque masking paint leaving only the sensitive area exposed, and this was given a final 5 min chemical etch. It is unlikely that the device will be perfectly balanced for light output at this stage, and so a check was made by connecting the ohmic contacts across a sensitive galvanometer and uniformly illuminating the sensitive area (see (f)). In general there will be a slight residual voltage which can be reduced by further masking the appropriate contact to bring the output signal to null. This photometric balancing is important if good zero stability is required over a wide range of light levels.

In order to ensure precise mechanical location and freedom from attack by moisture the completed unit was potted in a stainless steel cell fitted with a thin mica window bloomed for a wavelength of 1.5μ corresponding to the peak of light sensitivity of germanium. A section through the final assembly showing the design of cell together with the overall dimensions is given in figure 2 (g).

4. PERFORMANCE OF THE DETECTORS

The performance of the detectors under d.c. conditions was checked by displacing the reduced image of either a slit or a pin hole across the receiving surface and measuring the voltage output on a slide wire potentiometer reading to 10^{-6} volts. A sub-standard stabilized lamp was used to illuminate the small object aperture.

Measurements could be carried out over three levels of sensitivity. In the first instance the detector was moved with respect to the aerial image on one end of a 14 in. arm hinged at the other end with a pair of cross spring pivots arranged at right angles. A schematic drawing showing the two large drum micrometers which read directly to 10^{-4} in. in the two coordinate directions is given in figure 3. The location spring was controllable in stiffness and line of action so as to equalize the thrusts on the two micrometer screws. Although the detector moved on an

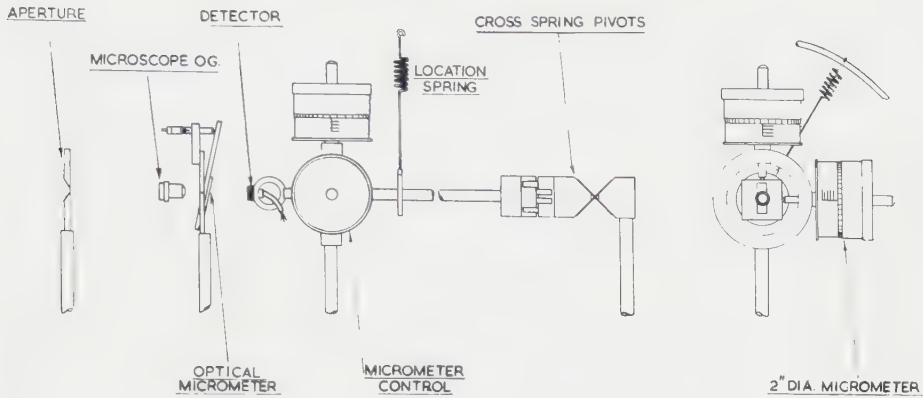


Figure 3. Detector test rig.

astigmatic surface the axial movement was always less than $1/70$ of the depth of focus of the lens. For more precise displacements in units of 10^{-5} in. and 10^{-6} in. an optical parallel plate micrometer was used between the lens and the detector which was now fixed in space.

Typical response curves of voltage output against displacement are given in figure 4. A range of slit widths from 0.0006 in. to 0.008 in. were used, the height being fixed at 0.050 in. The widths of the slit images are shown by the length of a

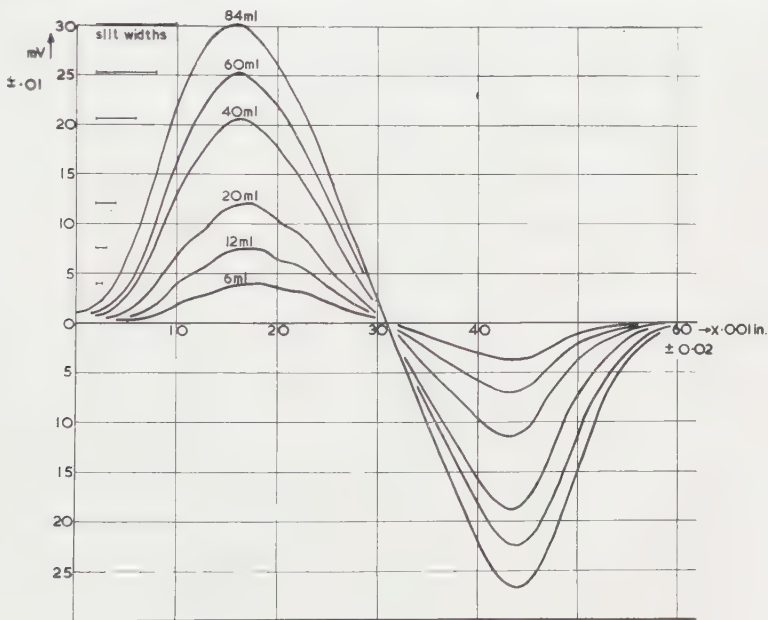


Figure 4. Voltage displacement curves for various image slit widths.

horizontal line placed to the side of each curve, and the number near the maximum gives the total light flux then present in milli-lumens. The gradient at cross-over is approximately proportional to the light flux and in this detector was 57 v/in./lumen. The irregularities in response over a working range of ± 0.010 in. amounted to ± 2 per cent of the maximum signal for the smaller slit widths and were

due to the microcrystalline structure of the germanium which compared in extent with the width of slit image. These irregularities were smoothed out by using wider slits. The maximum and minimum gradients shown here are $2.6 \mu\text{V}/\mu\text{in.}$ and $0.33 \mu\text{V}/\mu\text{in.}$, so that without amplification distances of $1 \mu\text{in.}$ could be measured directly on the potentiometer. Since the diffusion of electron-hole pairs from the point of injection is exponential in form it is clear that larger gradients could be obtained by decreasing the electrode separation, but this would be at the expense of the range of operation.

The photometric balancing of the device has already been mentioned and it can be seen from figure 4 that there is still some residual asymmetry in the curves. When the detector was uniformly illuminated there was a residual voltage output which with this cell amounted to $1/20 \mu\text{V}/\text{lux}$. Thus a sudden exposure of the device from darkness to bright room lighting (200 lux) would cause a shift of the zero of the curves in figure 4 varying between $4 \mu\text{in.}$ for the steepest curve to $40 \mu\text{in.}$ for the shallowest curve.

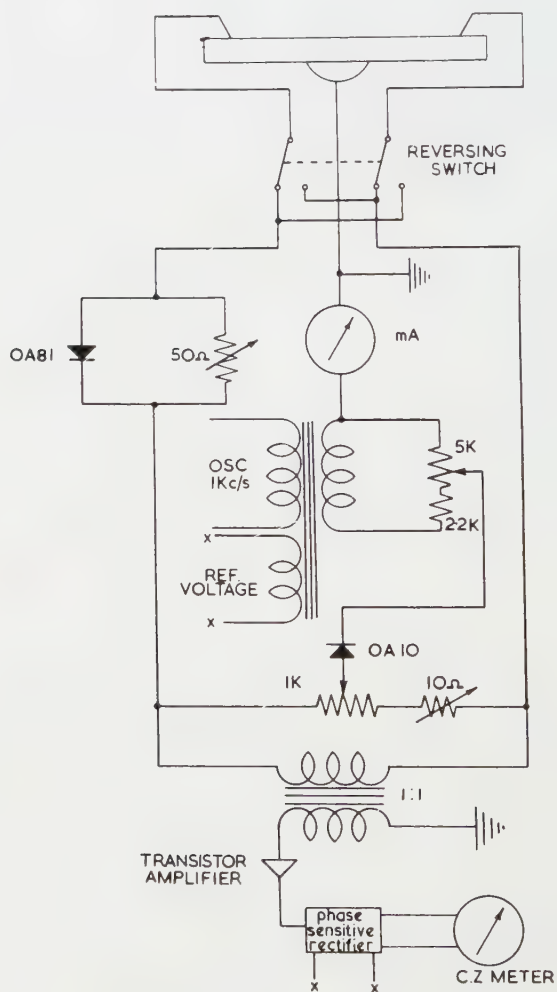


Figure 5.

The effect of varying the lamp voltage between 12 v and 4 v on the stability of the zero was studied. With an image width of 0.002 in. the maximum deviation was less than $20\text{ }\mu\text{in.}$, but the significance of the change in spectral composition of the lamp in conjunction with the chromatic aberrations and defocusing of the lens has not yet been considered.

When a high speed of response combined with high sensitivity is required an a.c. method of amplification of the output signal is desirable. In the d.c. experiments the indium connection was left floating, but by applying an a.c. signal of about 0.5 mA between this point and the balanced point of a potentiometer connected across the ohmic contacts it is possible to modulate the output signal with a half wave sinusoid. The circuit arrangement shown in figure 5 was found to give the maximum signal to noise ratio. The balancing rectifier in one arm served to reduce the harmonic distortion at null to below 0.1 mv, and the rectifier in the emitter lead eliminated residual distortion in the return half cycle. It was found preferable to work the device with a balanced output through a screened microphone transformer. In this way the emitter can be at earth potential and the two pairs of contacts in the five-terminal model connected to two separate transistorized amplifier channels whilst a single oscillator (1000 c/s) feeds the emitter circuit. For visual display the amplifier output was fed into a phase-sensitive rectifier operated by a reference signal from a separate winding on the output transformer of the oscillator.

The minimum detectable displacement will be governed by the electron and photon noise of the detector. This has not yet been measured directly but was found to be not greater than the noise voltage obtaining when the detector was replaced by its equivalent resistive circuit. The long term stability of the detectors made in this way was found to be high. Preliminary tests indicated drifts of the order of a few $\mu\text{in.}/\text{hour}$, but the statistical nature and source of origin of these variations has not yet been investigated.

5. DISCUSSION

Final conclusions on the performance of this type of position-sensitive element under all possible conditions of operation may not be drawn for some time to come, but the tests already described make the device acceptable for use in a range of systems. The main features of the detector are the existence of a stable and very precisely located centre, which is of value in establishing coincidences, and a linear output response which can be used as a quantitative measure of displacement to 1 part in 10^4 over a range of $\pm 0.010\text{ in.}$ It is expected that the susceptibility of the zero stability to background illumination will be still further improved together with the linearity of response when very small light spots are used.

Interest in this type of solid state position-sensitive photo cell will undoubtedly widen as time goes on. A diffuse as opposed to alloy junction is an obvious extension together with the use of other types of semiconductor materials which would extend the spectral range, frequency response, and temperature limits of operation. The geometrical range of operation could be increased by using larger crystals but at the expense of sensitivity. A highly sensitive device but with limited range has recently been described which depends on the change in polarity of the transversal photo-voltage as a light spot crosses a crystal grain boundary [3, 4].

The availability of a range of these new devices in the future could offer a challenge to the ingenuity of both the designer of optical instruments, primarily interested in systems for detecting and evaluating optical radiation, and to the control engineer who often needs an improved form of detecting element for use in the field of servo instrumentation.

ACKNOWLEDGMENTS

The author wishes to thank the Director and Council of B.S.I.R.A. for permission to publish this paper, Mr. I. J. Richmond for help with the electronics, Miss B. J. S. Barnes for her assistance in the fabrication of the detectors, and finally Messrs. Mullard, Ltd., for providing a number of diode elements for experimentation.

On décrit la construction d'un détecteur de lumière, utilisant un corps solide, et dont la tension de sortie est reliée en phase à la position d'un point lumineux sur la surface réceptrice. On envisage les stabilités mécanique, optique et électrique, afin d'essayer de se rapprocher autant que possible de la très grande sensibilité prévue par le calcul. On indique les résultats d'essais décrivant la performance du détecteur de ces points de vue.

Der Aufbau einer Halbleiter-Photozelle wird beschrieben, deren Ausgangsspannung in eine Phasenabhängigkeit von der Lage des Lichtfleckes auf der Empfängerfläche gebracht wird. Die mechanische, optische und elektrische Stabilität wird im Hinblick auf die angestrebte sehr hohe Grenzempfindlichkeit untersucht. Die Prüfergebnisse zeigen die unter diesen Gesichtspunkten erreichte Leistung der Zellen.

REFERENCES

- [1] WALLMARK, J. T., 1957, *Proc. Inst. Radio Engrs, N.Y.*, **45**, 474.
- [2] BIONDI, F. J., 1958, *Transistor Technology*, Vol. 3 (New York : D. van Nostrand Co. Inc.), p. 116.
- [3] MUELLER, R. K., and JACOBSON, R. L., 1959, *J. appl. Phys.*, **30**, 121.
- [4] WEBER, S., 1959, *Electronics*, **32**, 32.

REVIEWS

Die Fernrohre und Entfernungsmesser, KÖNIG A. und H. KÖHLER, 3. völlig neubearbeitete Auflage. Mit 471 Abbildungen, VIII, 475 Seiten. Gr. 8°. 1959. Ladenpreis: Ganzleinen DM (88).

DIE große Beliebtheit, deren sich die Monographie A. Königs "Fernrohre und Entfernungsmesser" erfreut hat, zeigte sich darin daß, die beiden ersten Auflagen schnell vergriffen waren; und das trotz der Schwierigkeit, die das Studium des Buches mit sich brachte. Für die dritte Auflage hat H. Köhler eine neue Darstellung gewählt und den Inhalt um viele Einzelheiten aus dem unerhört reichen Wissen und Nachlaß Königs bereichert. Man muß dem Herausgeber dafür dankbar sein, daß diese nur in Notizen festgehaltenen Erkenntnisse durch ihre Mitteilung bewahrt und einem weiteren Leserkreis zugänglich gemacht werden. So ist das Buch eine Fundgrube wertvollster Bemerkungen aus dem Gebiete der geometrischen Optik geworden. Das gilt vor allem auch für die Tabellen von Objektiven und Okularen mit den dazu gehörenden Hinweisen und Winkeln. Abgesehen von diesen auf König zurückgehenden Einsichten enthält das Buch auch die Prüfmethode und Untersuchungen über die Leistungsfähigkeit von Fernrohren wozu der Bearbeiter wesentliche Beiträge selbst beigesteuert hat. In dem Abschnitt über die Entfernungsmesser sind es die Kapitel der unempfindlichen Bauarten, die ganz besonderes Interesse verdienen, weil sie den Scharfsinn zeigen, der zu eleganten Lösungen in der Konstruktion geführt hat. Das Buch ist jedem, der optische Geräte zu entwerfen hat, sehr zu empfehlen.

GG. FRANKE.

Jenaer Jahrbuch 1959. Wissenschaftliche Veröffentlichungen. Herausgeber: Prof. Dr. PAUL GÖRLICH, Jena. 1. Teil. Mit 173 Bildern, 2 Faksimiles und 20 Tabellen im Text. 264 S. gr. 8°. 1959. Lederin 25.-DM. 2. Teil. Mit 202 Bildern, 16 Tabellen und 4 Schemata im Text. S. 265-512. 24×17 cm. 1960. Lederin 25.-DM.

IM ersten Teil gibt nach einer Würdigung der Pulfrichschen Arbeiten am Stereoauto- graphen K. Gundlach einen Überblick über die verschiedenen bekannt gewordenen Verfahren zur Herstellung von Strichplatten und Teilungen. Man vermißt allerdings die Mitteilung eigener Entwicklungsergebnisse. R. Tiedeken berechnet die Lichtleistung von Projektionssystemen und H. E. Fincke beschäftigt sich mit photographischen Objektiven, bei denen eine sphärische Fläche durch eine bispärische ersetzt ist, d.h. eine Fläche, deren äußere Ringzone einen anderen Krümmungsradius aufweist als der zentrale Teil.

H. Pohlack versucht eine Farbartbestimmung im Farbendreieck für photographische Objektive wenn man sie als Farbfilter ansieht. Es zeigt sich, daß die Zahl der Auswahlkoordinaten für die Festlegung des Farbortes mit 10 zu klein ist und etwa 30 betragen sollte. P. Görlich und seine Mitarbeiter berichten über die Anwendung der Infrarot-Spektralphotometrie in der Mineralogie und Geologie. Im Rahmen einer Theorie über das Polieren von Glas gibt A. Kaller einen Überblick über seine Versuchsergebnisse. Zwei elektronenoptische Arbeiten, eine kristallographische und eine Theorie der Rollfeder über die runden den Band ab.

Der zweite Teil beginnt mit einer Untersuchung von H. Stephani über die fokale und extrafokale mikroskopische Abbildung von eindimensionalen Objekten. Aus einer allgemeinen Abbildungsformel wird die Abbildung insbesondere des Randes von Phasenobjekten hergeleitet und das Entstehen der Beckeschen Streifen bei extrafokaler Einstellung erklärt. Die Formeln erlauben eine Anwendung auf ausgedehnte Phasenobjekte bei der Benutzung des Phasenkontrastverfahrens. W. Naundorf diskutiert die

Anwendung von Wärmeschutzfiltern bei Projektoren. *W. Kämmerer* stellt grundsätzliche Betrachtungen über den Aufbau eines Rechenautomaten an, der eine mathematische Formel unmittelbar zu lesen und zu verarbeiten versteht, ohne daß eine besondere Programmierung erforderlich ist. Die Arbeit von *F. Franke* "Näherungsweise Berechnung von Wurzeln durch Polynomquotienten" sucht die Lösung einer elementaren Aufgabe durch ein neues Rechenverfahren für den Rechenautomaten besonders einfach zu gestalten. Mit der Ermüdung und Temperaturabhängigkeit von Photoelementen beschäftigen sich *E. Helbig* und *H. Klaus* in einer sehr sorgfältigen Untersuchung. Von den vier weiteren Arbeiten sei noch die über das elektrolytische Polieren von Metallen von *R. Zetsche* erwähnt.

GG. FRANKE.

Electro-optical systems using fibre optics†

by N. S. KAPANY

Optics Section, Physics Division,
Armour Research Foundation, Chicago, Illinois

(Received 30 July 1959)

The recently developed field of fibre optics [1] holds considerable promise for applications in various types of electro-optical systems. Conventional means of recording or relaying information presented upon a Lambertian emitter such as the phosphor in a cathode-ray tube or photocathode in a multi-stage image intensifier, etc., suffer from considerable light losses and low resolution. An appropriate assembly of glass fibres is capable of transporting the image with elimination of halo and yields high resolution and photometric gain. Similarly fibre optics offers considerable advantages in scanning photometry, colour television and character-reading systems.

For applications in electron optical systems such as a coupling unit for multistage image intensifiers, it is desired that the fibre optics element be composed of perfectly insulated fibres and also be sealed. To this end a method has been developed for drawing glass-coated glass fibres with a high refractive index glass core and a thin low refractive index glass coating, of the order of 1λ or less thickness. These fibres can be further coated with an absorbing coating for perfect insulation and fused so that first, the low refractive index coating and then the absorbing coating surround the high refractive index cores. Fibres drawn by this method have yielded of the order of 50 per cent light transmission over 7 feet length. The influence of various factors such as the polar emission of different phosphors and thickness of low index coatings on the resolution and photometric efficiency of fibre optics will be discussed.

The influence of diffraction on the light conductivity of fibres of diameter comparable to the wavelength of light is being investigated using microwave analogues. The influence of diffraction on polar emission curves and frequency cut-off dielectric cylinders will be illustrated. A method for drawing insulated 'multiple fibres' consisting of individual fibres down to few wavelengths diameter will be described.

1. STATEMENT OF THE PROBLEM

In recording or relaying information from an electro-optical system in which the image is presented on a Lambertian emitter such as a cathode-ray tube, coupled image intensifier, radar scope, etc., there exist a number of optical problems. Considerable light losses occur due to the low light gathering power of even a high numerical aperture image forming system. Furthermore, the resolution is not only restricted by the electron optics and light diffusion in the phosphor, but also severely affected by the halo that arises due to total reflection at the window.

Several techniques are available to record or relay the information presented on a Lambertian emitter, photography being the most widely used. Figure 1

† This paper was presented at the fifth conference of the International Commission for Optics, Stockholm, 24–30 August 1959.

shows a typical recording set up with a point P at the phosphor imaged as P' at unit magnification with a lens system of say 50–75 per cent light transmission.

The fraction of light reaching the point P' is given by the expression

$$\epsilon_p' = \frac{\int_0^\alpha I(\theta)\{1 - R(\theta)\}\tau(\theta) \sin \theta d\theta}{\int_0^{\pi/2} I(\theta) \sin \theta d\theta} \quad (1)$$

and the fraction of light appearing in the halo is given by

$$\epsilon_H = \frac{\int_{\theta_c}^{\pi/2} I(\theta) \sin \theta d\theta}{\int_0^{\pi/2} I(\theta) \sin \theta d\theta} \quad (2)$$

where $I(\theta)$ is the emitted intensity as a function of angle θ , $R(\theta)$ is the Fresnel reflection coefficient, $\tau(\theta)$ is the transmission coefficient of the lens and $\theta_c = \sin^{-1}(n'/n)$ is the critical angle.

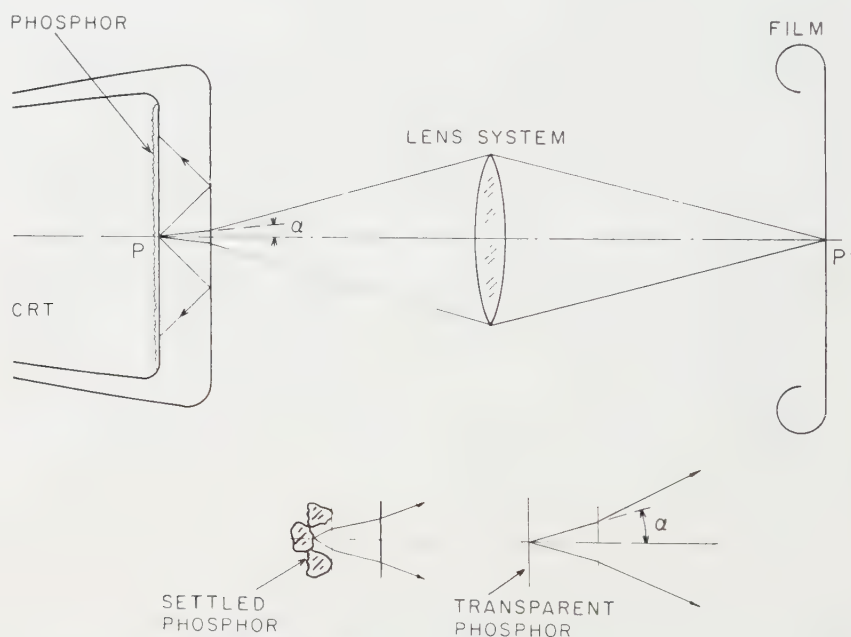


Figure 1. Photometric efficiency of conventional photographic system.

If the refractive index of the glass plate is 1.5, the angle of the extreme ray in glass that would pass through an F/1 lens working at unit magnification (1:2 at each end) is about 9° . Assuming a glassy phosphor emitting as a Lambertian source, approximately 2 per cent of the light energy is contained within the cone passing through the lens. Allowing for the light losses within the lens it can be shown that 1–2 per cent of light emitted at P arrives at P'. Similarly, it can be shown that approximately 56 per cent of the light emitted at P can appear within the halo which gives rise to loss of contrast and resolution. It should also be pointed out that with the recent developments of high-resolution cathode-ray

tubes a severe demand is placed on lens designs because of the requirements of high resolution over a wider field angle as well as high numerical aperture.

Another approach to the problem has consisted of contact printing the image through a thin window of the order of $25\text{--}50\mu$ thick [2]. Considerable gain in exposure is achievable by this approach. However, this system is not only fragile but also suffers from loss of resolution. The intensity distribution in the photographic image of a point by this method can be calculated with reference to figure 2.

$$I(x') = \frac{I_0}{t^2} \int_0^{\phi=2\pi} \int_0^{\infty} F(\theta) \cdot \exp(-r^2/2) \cdot \cos^2 \theta \cdot r \cdot dr d\phi \quad (3)$$

where t is the plate thickness

$$\cos \theta = \frac{t}{(t^2 + x^2 + r^2 - 2rx' \cos \phi)^{1/2}},$$

$F(\theta)$ is the polar emission of the phosphor in the glass plate and $\exp(-r^2/2)$ is the gaussian intensity distribution in the spot on the phosphor.

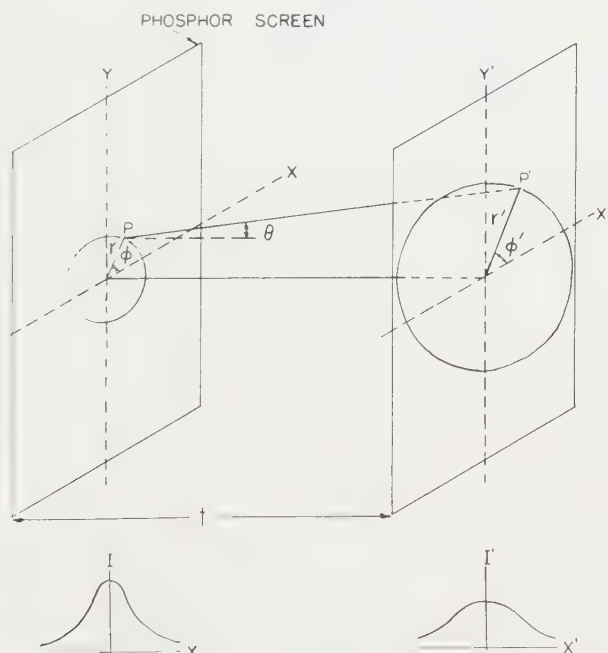


Figure 2. Loss in resolution on contact printing through a glass membrane.

It is clear that the resolution in the (x', y') plane is determined mainly by (a) the thickness of the plate, (b) the spot size and intensity distribution at the (x, y) plane and (c) the emission characteristics of the phosphor. The intensity distribution in the point image can be calculated using equation (3). The spatial frequency response of the received image can be calculated from the Fourier transform of the term $I(x')$. Whereas, under special conditions it is possible to design a system in which the loss of resolution is not serious, in general it is found that the image quality is impaired using this method.

Yet quite another set of problems exist in such electro-optical systems as scanning photometers, colour television and character-reading systems, etc.

A detailed discussion of these problems is not warranted in the present context, but the gains using fibre optics will become evident in the following discussion.

2. INTRODUCTION

The newly developed field of fibre optics [1, 3, 4, 5] holds considerable promise in transmittal of information from a phosphor with high resolution and light gain. Appropriately insulated transparent fibres are capable of isolating an element of an image surface and carrying it to another point. Thus appropriate fibre assemblies are capable of image dissection and image modification. Because of the flux integrating property of the individual fibres, any detail finer than the fibre diameter is not transmitted. The static resolution is therefore limited by the diameter of the component fibres. Insulated fibres of 2μ diameter and smaller have been successfully produced. It has been shown that the resolving power of a fibre assembly can be increased substantially by employing the principle of dynamic scanning [3] and experiments have yielded a gain of 100 per cent in resolving power.

A large number of applications of fibre optics in various electro-optical systems suggest themselves. For example, in cathode-ray tubes it is possible to convey the image from the phosphor to a photographic plate with high light efficiency and elimination of halo using a sealed bundle of insulated fibres. The emitting phosphor would be at the entrance pupil of the fibres while a photographic plate in intimate contact with the exit end of the fibre bundle would receive from 70–90 per cent of the emitted light. A vacuum tight CRT face using fibres has been successfully produced and demonstrated a photometric gain of approximately 50 over photographic system using an F-0.95 lens with 50 per cent light transmission and at unit magnification. With a cathode-ray tube face consisting of a curved bundle of fibres it is possible to present the electron gun with a highly curved surface to focus on, while maintaining an accurately plane front face for photography (figure 3). Similarly by suitably arranging the fibres in the front face of the tube it is possible to either code or decode a signal or change a programmed scan to a linear scan. It is also possible to magnify the image by using a sealed bundle of conical fibres.

Coupled electronic image intensifiers (television type) whose sensitivity approaches the fundamental limits set by photon statistics of the object can be improved considerably by the use of a fibre optics coupling unit. The pick-up tube consisting of a primary photocathode is followed by one or more intensifier stages which acts as a two-dimensional electron current amplifier and a storage target which is scanned by a low velocity scanning beam. In conventional image intensifiers of this type, thin glass plates are used in coupling the two stages. However, as discussed in the previous section, a considerable loss in resolution occurs due to this glass membrane. On the other hand, a sealed bundle of insulated fibres is capable of coupling the two stages without loss of flux or resolution. A two stage image intensifier of this kind is illustrated in figure 4.

The use of a face plate of an aligned array of multicoloured fibres has been an evident but prohibitively uneconomical application in colour television. With the newly developed 'multiple fibres' [5] it now seems to fall in the realm of economic practicability. Multiple fibres in the form of a sheet consisting of

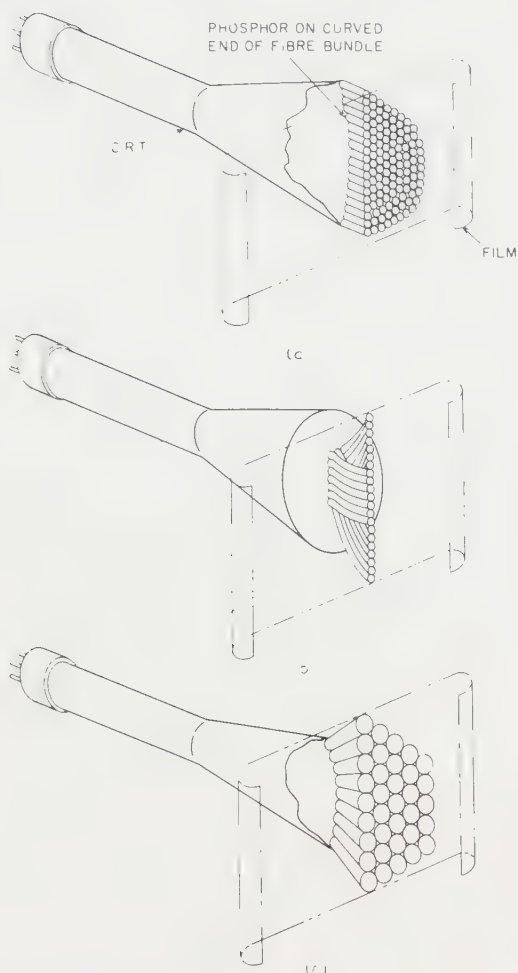


Figure 3. Various fibre optical configurations for cathode-ray tubes.

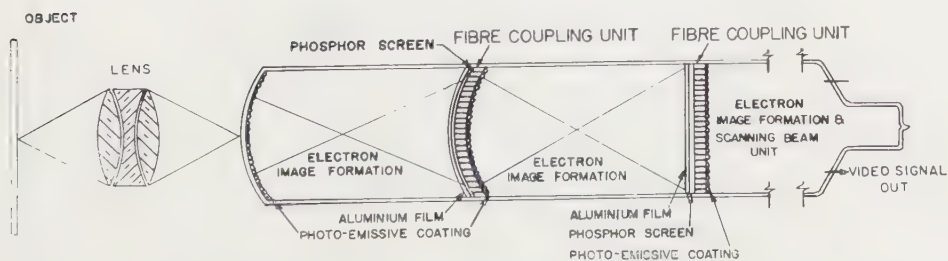


Figure 4. Multistage image intensifier using fibre optics coupling.

alternate fibres of different filter glasses are drawn by a method to be discussed later in this paper. For colour television, the diameter of individual fibres can be much larger than most other systems.

For scanning photometry and character-reading systems, single fibres or an array of fibres down to a few microns in diameter are used to transmit flux from elemental areas to photodetectors.

Furthermore, an assembly of plastic scintillating fibres or a bundle of scintillating liquid-filled thin-walled tubes can be used for tracking high-energy particles [6] when used in conjunction with multistage image intensifiers. A detailed analysis of these techniques along with experimental work is now in progress. A large number of other applications of fibre optics in electro-optical systems are obvious. Considerations of the basic performance of fibre optical systems under various conditions will throw light on the gains offered by fibre optics.

3. OPTICAL CONSIDERATIONS

When fibres are used in an image conveying system, it is necessary to form a close-packed bundle in order to obtain maximum efficiency and resolution. In doing this, contact is established between adjacent fibres and with uninsulated fibres light leakage occurs. The point spread function due to light leakage between neighbouring fibres has been calculated [5] using the theory of frustrated total reflection and the static and dynamic spatial frequency response derived. For systems in which the fibre bundle is illuminated by an optical system of small numerical aperture, it is sufficient to coat each fibre with a medium (in particular, glass) of low refractive index compared to that of the fibre core itself. Figure 5 (a) shows a typical coated fibre in air and it can easily be shown that the maximum numerical aperture for an optical system illuminating such a fibre in order that no light leakage occurs from the fibre wall is given by:

$$\text{fibre } N.A. = n_0 \sin \theta = (n_1^2 - n_2^2)^{1/2}$$

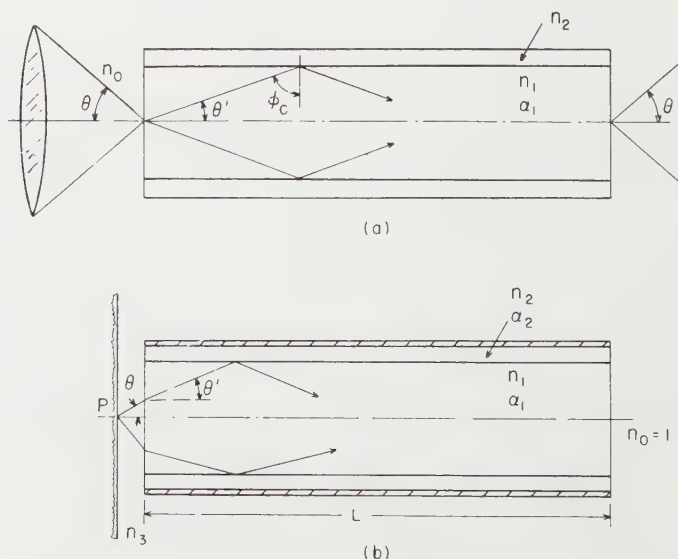


Figure 5. Illustrating optical performance of coated fibres. (a) for low N.A. lens system; (b) For a Lambertian source.

where n_0 , n_1 and n_2 are refractive indices of the surrounding medium, fibre core and coating respectively and θ the semi-angle of the entrant cone of light. It should be noticed that a coated fibre with core index of 1.8 and coating index of 1.5 has a numerical aperture of 1.

Consider a straight isolated dielectric cylinder of length L and diameter D with an axial light cone of flux distribution $F(\theta)$ focused on its entrance end (figure 5(a)). In passing the entrance end of the cylinder a fraction $R(\theta)$ of energy is lost by air-glass reflection and can be calculated by the well-known Fresnel equations. It can be shown that the energy emerging from the cylinder is given by:

$$\tau = \frac{2\pi}{K} \int_0^{\theta'} F(\theta) [1 - R(\theta)]^2 [1 - \bar{A}(I')]^\eta \exp(-\alpha_1 L \sec I') \sin I' dI' \quad (4)$$

where $\bar{A}(I)$ is the absorption at the fibre surface, η is the number of reflections, α_1 is the coefficient of glass absorption, and K is the normalization factor.

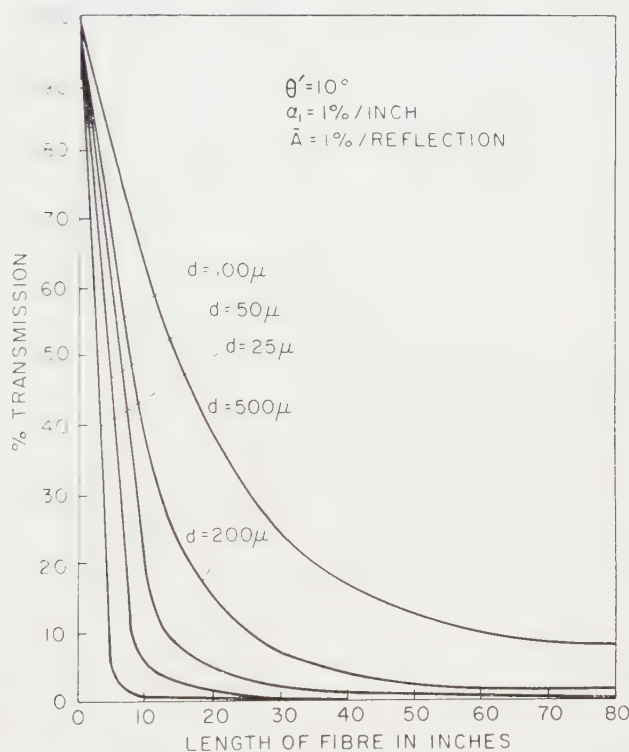


Figure 6. Percentage transmission as a function of fibre length.

Due to the large number of reflections in a long fibre the surface absorption coefficient $\bar{A}(I')$ plays a very significant role in the transmission of the fibre. In order to illustrate the influence of surface absorption on the light transmission of the fibre, τ was numerically integrated on an IBM 650 computer for a number of cases. The incident flux was assumed to be uniform and Fresnel reflections at the two ends were ignored. α_1 the coefficient of glass absorption was chosen to be one per cent per inch and the surface absorption $\bar{A}(I')$ was set at one per cent per reflection. Figure 6 shows the transmission of various diameter fibres as a

function of their axial length when the half angle of the incident light cone is 10 degrees. When $\bar{A}(I')$ is set at zero the light transmission for a given fibre length as a function of θ remains very nearly constant. This points to the critical necessity of keeping the fibre surface clean.

The newly developed method [5] of drawing glass-coated glass fibres and multiple fibres ensure a fire-polished embedded interface in between the high refractive index glass core and the low refractive index coating. Using a method to be discussed later in this paper, coated fibres have been drawn and examined in lengths up to 150 feet and the appreciable transmission in these cases has indicated that the surface absorption is completely negligible. For example, the measured light transmission for a 0.25 N.A. entrance light cone in a 7 feet long glass-coated glass fibre is found to be approximately 20 per cent for the visible spectrum and nearly 50 per cent in the yellow-green region. The fibre core consisted of Jena S.F.1. Flint glass ($N_d = 1.71$) with measured transmission of approximately 99.5 per cent per inch in the yellow-green region for the bulk glass. Remembering that a ray inclined at 10 degrees to the fibre axis suffers 7392 reflections in a 50 μ diameter 7 feet long fibre, an almost perfect interface is indicated by the above-mentioned transmission measurements. It was found that the transmission coefficient was not affected by the numerical aperture of the entrance light cone. Furthermore, the numerical aperture of the emergent light was found to be close to the N.A. of the illuminating cone, even though the fibre itself was coiled several times.

As mentioned earlier, in the case of a fibre with a phosphor at its entrance end the received illumination is essentially Lambertian. In order to gain some idea of the efficiency of bundles composed of fibres similar to those of figure 5(b) simple expressions are derived assuming a Lambertian source in optical contact with the fibre entrance pupil. Under these conditions, the maximum permissible N.A. for an illuminating system as discussed above is at all times exceeded when presently available glasses are used. In order to overcome this leakage of light a second reflecting or absorbing coating is required.

Consider a typical ray emitted at an angle θ to the fibre axis that has a low index film in between the phosphor (figure 5(b)). This ray may be transmitted down the fibre either by total reflections at the (n_1, n_2) interface or by refraction into the coating and reflections back from the outermost interface. The transmission of light cone which is transmitted through the fibre core is then given by:

$$\tau_1 = 2\pi \int_0^{\theta_{\max}} (I_0 \cos \theta) \{1 - R_{3,1}(\theta)\} \exp(-\alpha_1 L \sec \theta) \{1 - R_{1,0}(\theta)\} \sin \theta d\theta \quad (5)$$

where θ is the angle of emission of ray to the fibres axis, $R_{3,1}(\theta)$ and $R_{1,0}(\theta)$ are the Fresnel reflection losses at the subscript interfaces, and α_1 is the coefficient of absorption of the medium n_1 . Expressions (4) and (5) are based on meridional ray consideration and as can be shown by skew ray analysis they give only the lower limit to the fibre transmission efficiency.

For values of θ greater than θ_{\max} the ray of light enters the fibre sheath and is progressively weakened by the metal or absorbing glass insulating coating. The transmission τ_1 for such a fibre has been computed for certain coated fibres, with a front coating of low index using equation (5). The expressions are appropriately modified to account for the different properties of settled and newly developed transparent phosphors. Whereas a transparent phosphor can be

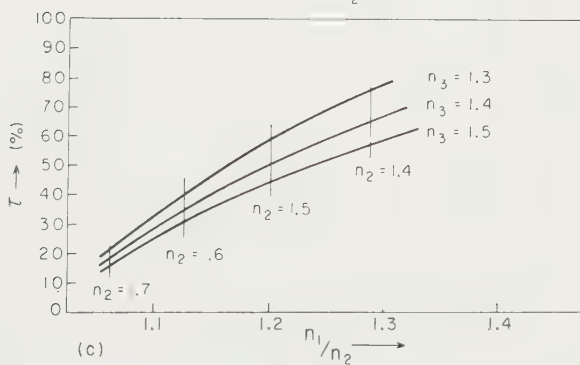
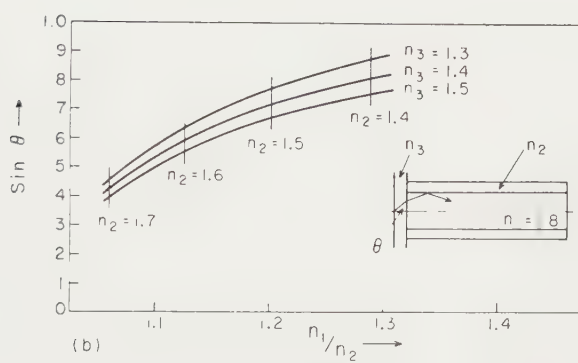
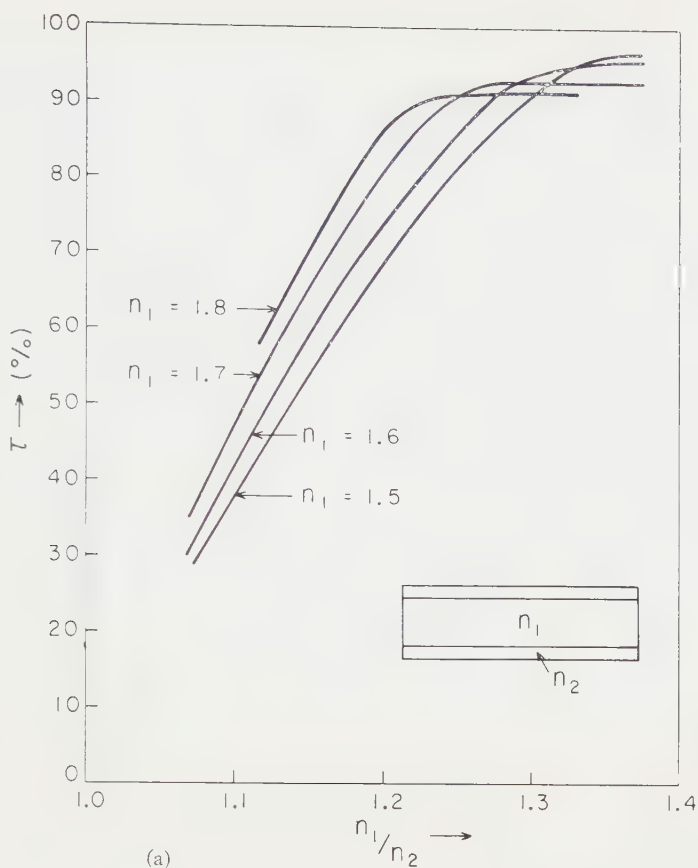


Figure 7. Illustrating the efficiency of coated fibres. (a) Efficiency of coated fibres using settled phosphor; (b) and (c) efficiency of coated fibres using transparent phosphor.

considered to be in optical contact with the substrate, a settled phosphor has only a small portion of the phosphor in optical contact with the substrate. Therefore, while all phosphors emit in a basically Lambertian fashion a settled phosphor has its polar light emission diagram modified by this.

Figure 7(a) shows the fraction of light accepted by fibres of different core index when a settled phosphor is used. The curves in figure 7 are valid for short fibre assemblies since the term L in equation (5) is taken to be 1 in. and α_1 is 1 per cent per inch. τ is plotted as a function of n_1/n_2 and it is seen that when either n_1 or n_1/n_2 increase the transmission increases. Figure 7(c) shows the efficiency using transparent phosphors as a function of n_1/n_2 and n_3 . Here again it is seen that as n_1 and n_1/n_2 increase or as n_3 decreases τ increases. The value of the low index coating n_3 at the entrance end of the fibre is evident for the case of phosphor in optical contact with its substrate. It should be noted that 0.98 N.A. is obtained (core index = 1.76 and coating index = 1.46) compared to 0.25 N.A. possible with present day copying lenses of comparable resolution.

From these general considerations it is evident that for fibres illuminated by a low numerical aperture source a single low refractive index coating around the fibre is sufficient. On the other hand when a Lambertian source is used it is desirable to have a second insulating coating. The low index film at the fibre entrance end also enhances the performance. Certain methods used for fabricating such fibres and the performance of certain systems will now follow.

4. EXPERIMENTAL

In order to protect the total reflecting interface in the fibres and for optical insulation a method of drawing nominal infinite lengths of high refractive index glass fibres with a thin coating of low refractive index glass has been developed [5]. This method consists of inserting a high refractive index glass rod in a tubing of compatible low index glass and drawing this assembly into a coated fibre through a hollow cylindrical furnace. For drawing long lengths of glass-coated fibres, both the refractive index and the thermal properties of the parent rod and tube need some consideration. It is required that the tube and the rod be of compatible glasses with similar coefficient of thermal expansion and softening point.

Figure 8 diagrammatically illustrates the coated fibre drawing machine. The rod-tube assembly is fed in the hollow cylindrical furnace at a constant rate. The furnace has a preferred temperature gradient so that the hottest point lies close to its midpoint. The optimum temperature conditions are found to vary from material to material. When the lower point of the rod-tube unit reaches the hottest point in the furnace, fusion of the two materials takes place and, simultaneously it tapers into a thinner fibre due to gravity, as shown in the insert of figure 8. The thin end of the fibre is affixed to a cylindrical drum which is capable of rotation and translation. Long lengths of single coated fibres are drawn down to 10μ overall diameter and 1λ coating thickness with ± 3 per cent variation in diameter. The fibre diameter is governed by the size of rod and tube, the rate of feed, the furnace temperature and the speed of the winding drum. In general, it is found that the ratio of the parent rod to tube wall thickness is maintained in the fibre.

A second coating of metal or an absorbing glass can simultaneously be deposited on the fibre. If the second coating is preferred to be glass then the

rod-tube assembly is further inserted in another tube of the required material. The fibre with two glass coatings is thus drawn by the method outlined above. On the other hand, if a second metal coating is desired then use is made of the metalizing unit illustrated in figure 8. A metal such as aluminium or indium is constantly fed into an electrically heated boat with a V-groove on the side in an inert atmosphere. As it is being drawn the fibre is passed through the molten metal and thus a continuous and uniform metal coating is deposited around the fibre.

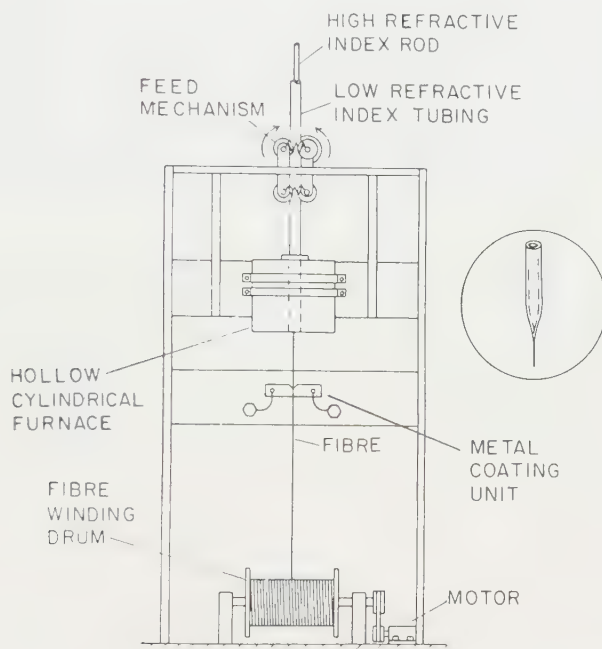


Figure 8. Insulated fibre drawing machine.

Microinterferometric and photometric studies have indicated a high degree of surface uniformity and excellent interface condition in these fibres. Because of the cross-sectional area occupied by the first glass coating it is desired that its thickness be kept at a minimum. The depth of light penetration into the second medium on total reflection is dependant on the angle and plane of polarization of the incident beam and the minimum thickness of the intermediate coating can be calculated [5] using the frustrated total reflection equations derived for plane parallel interfaces. In general, the coating thickness is required to be of the order of 1λ or less. Because of the actual penetration of energy into the first dielectric coating at every reflection, it is evident that the coefficient of absorption of the coating should be low.

The above method of drawing single insulated fibres is used for drawing fibres down to 25μ or even 10μ diameters. However, below 25μ the fibres are extremely fragile and do not lend themselves to the mechanical manipulation that is necessary for fabricating fibre optical systems. A new type of fibre consisting of a large number of fibres of high index in a matrix of low refractive index has been developed. These fibres are termed 'multiple fibres', and

they have the mechanical strength of large fibres, with the resolution yield of much smaller fibres.

Figure 9 shows the methods for drawing multiple fibres. A large number of high index rods are placed in low index tubes and bundled together. This bundle is further placed in a larger tube of compatible glass. The entire assembly is drawn into a fibre on the machine illustrated in figure 8, much in the same manner as a single coated fibre is drawn. As illustrated in figure 9, it is also possible to draw sheets of multiple fibres: however, special devices are needed for this purpose. Multiple fibres in sheet form can be drawn from an array of rods of different filter glasses for the purpose of colour television. Multiple fibres of 50μ overall diameter consisting of as many as 275 fibres down to 2μ diameter have been successively drawn. The spacing between the individual fibres is of the order of the wavelength of light and the transmission and image quality is high. It should be mentioned that an aligned assembly of 5μ fibres is capable of yielding static resolution of 100 lines/mm and dynamic resolution of 200 lines/mm.

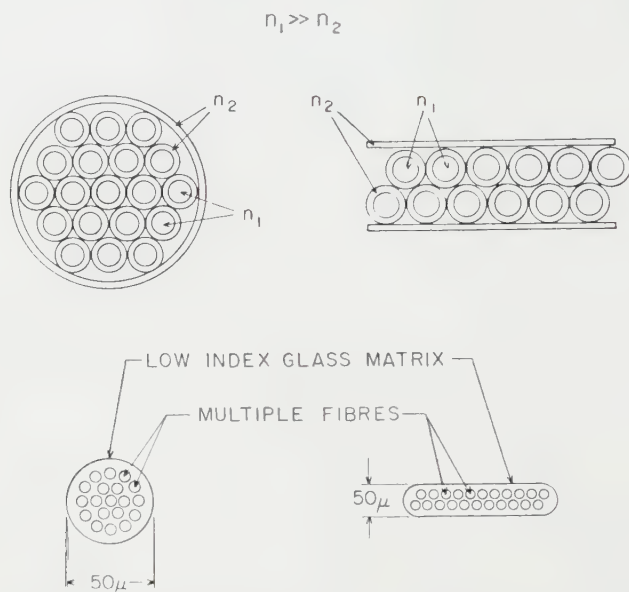


Figure 9. Illustrating method of drawing multiple fibres.

A number of methods are available for precisely aligning an assembly of fibres. Some of these methods have been discussed in previous publications [1]. In order to make the fibre bundles mechanically sound, and in certain cases vacuum tight, it is desirable to fuse the fibres together by a simple heat process. In the case of a fibre whose coating has a lower softening point than the core this process results in an essentially homogeneous matrix of low index glass in which the fibre cores are embedded, while maintaining their circular cross section. In the converse case the fibres deform to produce polygonal cross sections, which while satisfactory for short lengths, is deemed undesirable for long curved fibres. Depending on the different applications, various techniques, such as the two coatings method, a sandwich construction, continuous layer windings on the fibre drawing machine, etc., are available.

Fused bundles of fibres consisting of fibre cores of index 1.90 and coating of index 1.50, with a phosphor deposited at the entrance end of the fibres, have been successfully sealed into the face of cathode-ray tubes by the techniques described above. The efficiency of contact printing through the fibre face plate was measured as compared to the efficiency of a F-1 lens working at unit magnification (1:2 at each end). A line scan on the phosphor in the clear area of the cathode-ray tube face was imaged by the lens system on a photographic plate and the number of electron beam sweeps required to produce a given density on the emulsion were recorded. Then the photographic plate was placed in intimate contact with the exit pupil of the fibres and the number of beam sweeps required to produce the same density on the film were recorded. The photographic plates were developed to a gamma of nearly unity and the density was checked on a microdensitometer. This data showed that the contact printing through a fibre face plate yielded a gain of 50 times over the F-1 copying lens used. These results are in accord with the theoretical results illustrated in figure 7, and were also verified by a direct method of determining the flux transmitted by the two methods using a photocell.

5. DIFFRACTION IN DIELECTRIC CYLINDERS

The information density in a given fibre assembly is limited by the fibre diameter and the state of optical insulation between individual fibres. Even for

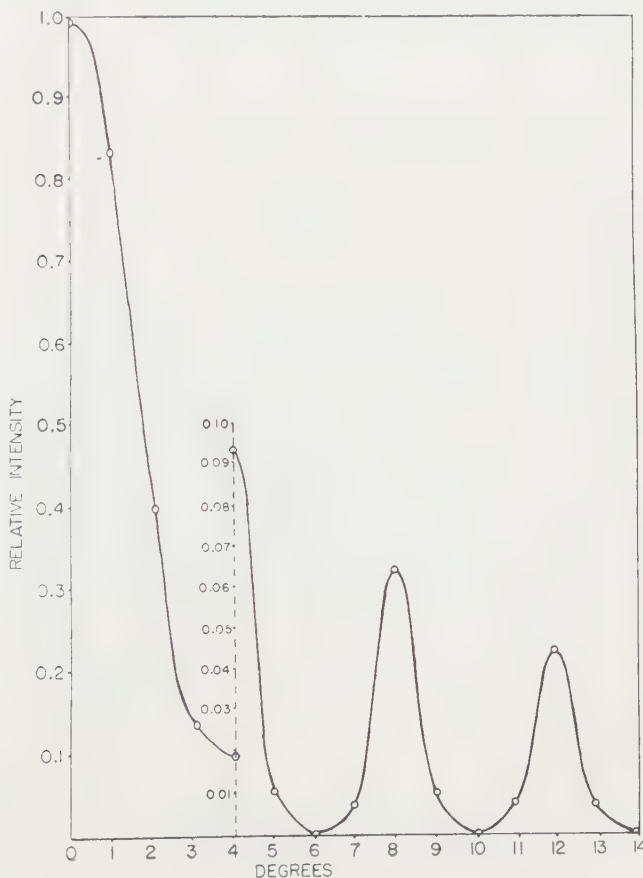


Figure 10. Diffraction pattern of 12λ diameter 25λ long dielectric cylinder.

an optically insulated fibre system it is clear that a fundamental limit to the fibre diameter is set by the diffraction phenomenon. Microwave techniques are readily available for studying the mechanism of wave propagation in an isolated dielectric cylinder and an assembly of image conveying fibres [7]. With the recently developed technique of drawing 'multiple fibres' consisting of component fibres of diameter comparable to the wavelength of light, it has become possible to study these phenomena at optical wavelengths also.

The experimental set up used for investigation of diffraction effects due to dielectric cylinders consisted of a microwave system working at $\lambda = 1.25$ cm. Polystyrene cylinders 25λ long were placed with coherent plane-polarized plane waves incident at their entrance end. Polystyrene was preferred because its refractive index at the microwave frequency is very close to its refractive index in the visible region. Power absorbing walls were placed at appropriate positions in order to mask off stray radiation and the entire equipment was placed in a room covered with absorbing walls. In order to check the set up, Fraunhofer diffraction patterns were measured for various diameter apertures and the results agreed favourably with those expected from the well known formula:

$$A(\theta) = (1 + \cos \theta) \frac{J_1[2\pi(a/\lambda) \sin \theta]}{[2\pi(a/\lambda) \sin \theta]} \quad (6)$$

where a is the radius of circular aperture, θ the angular subtense of the diffracted wave, and $A(\theta)$ the amplitude of the diffracted wave.

Diffraction patterns of dielectric cylinders of diameters λ , 2λ , 4λ , 5λ , and 12λ and 25λ long were studied in some detail with the above-mentioned experimental set up. Figure 10 shows the measured diffraction pattern of a 12λ diameter 25λ long cylinder. The secondary maxima appearing in the curve are in agreement with the general theory.

The similarity of diffraction by a dielectric cylinder to diffraction by two apertures of the same diameter, spaced apart by a distance equal to the optical length of the cylinder, was investigated. Figure 11 shows the diffraction pattern by a 5λ diameter cylinder and 5λ diameter double aperture system. As is seen from the curves the diffraction pattern for the two cases is similar. This would, in general, be expected from elementary consideration for cylinders down to a few wavelengths in diameter. Below these diameters the similarity would obviously break down.

Existing theory only predicts the polar radiation patterns for large values of cylinder length and diameter. It is well known that side lobe amplitudes are functions of these parameters, for example, as the diameter goes down the side lobe intensity increases and the main lobe intensity decreases so that more and more energy is contained in the side lobes. A lower limit is set to the size of a dielectric cylinder below which the energy is conducted along the cylinder wall. This limit is evidently set by the wavelength, the length and diameter of cylinder, the refractive index of the cylinder and the angle of incidence and plane of polarization of the incident wave.

A detailed theoretical and experimental analysis of the diffraction by cylinders at optical frequencies has been undertaken. Multiple fibres consisting of fibres down to 1μ diameter and smaller have been successfully drawn and their radiation patterns as well as boundary wave penetration are being investigated at optical frequencies.

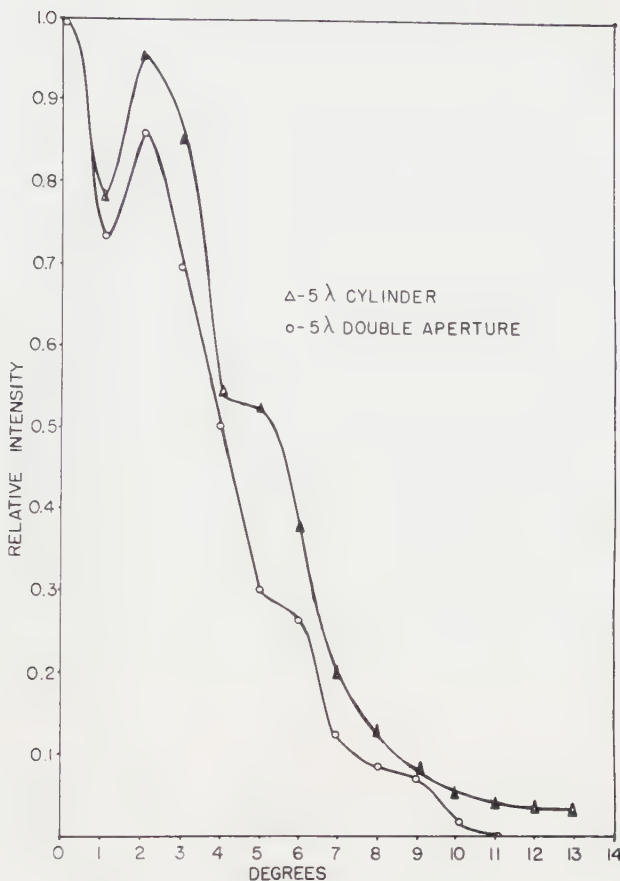


Figure 11. Comparison of diffraction by a cylinder and a double aperture system.

6. CONCLUSIONS

A number of applications of fibre optics in electro-optical systems are evident. The new technique of drawing glass-coated glass fibres has eliminated light losses due to surface absorption. Therefore, the transmission of fibres is limited only by the coefficient of absorption of glass and for smaller diameters by the diffraction effects. With the use of high optical quality glass it is possible to obtain acceptable light transmission for fibres 10–100 feet in length. Multiple fibres down to 2μ diameter have been drawn and a resolution of 100–200 lines per mm is obtained using multiple fibres. Vacuum-tight bundles of fibres have been constructed for cathode-ray tubes and a photometric gain of approximately 50 is achieved over a F-0.95 lens system working at unit magnification. Diffraction by fibres of diameters few times the wavelength of light is being studied. With the high light transmission of fibres over long lengths as well as high resolutions available it is evident that fibre optics will find uses in many high precision optical systems.

ACKNOWLEDGMENTS

The author is indebted to Mr. D. F. Capellaro, Mr. W. A. Oberheim, Mr. A. Brushenko and Mr. F. X. Miller for their most valuable assistance in this investigation.

Le champ, récemment développé, de l'optique des fibres, contient beaucoup de promesses en ce qui concerne les applications à divers types de systèmes électro-optiques. Les moyens conventionnels d'enregistrer ou de transmettre l'information présentée sur un émetteur lambertien tel que le phosphore dans tube à rayons cathodiques ou la photocathode dans un renforceur d'image à plusieurs étages, etc., souffrent de pertes de lumière considérables et d'une faible résolution. Un ensemble convenable de fibres de verre peut transporter l'image avec élimination du halo et fournit une grande résolution ainsi qu'un gain photométrique.

Pour les applications dans les systèmes d'optique électronique tels qu'une unité de couplage pour des renforceurs d'images à plusieurs étages, il est nécessaire que l'élément en fibres de verre soit formé de fibres parfaitement isolées et qu'il soit aussi scellé. Pour cela, on a mis au point une méthode pour tirer des fibres de verre recouvertes d'une couche de verre; le noyau étant formé de verre de haut indice de réfraction et la couche extérieure étant formée d'un verre de faible indice de réfraction, l'épaisseur totale de la fibre étant de $1\ \mu$ ou moins. Ces fibres sont ensuite recouvertes d'une couche absorbante pour obtenir une parfaite isolation et fondues, de sorte que la couche de bas indice entoure d'abord le noyau de haut indice, suivie par la couche absorbante. Les fibres tirées par cette méthode ont fourni un facteur de transmission de l'ordre de 20 pour cent sur une longueur de 7 pieds. On discute l'influence des divers facteurs tels que l'émission polaire des différents phosphores et l'épaisseur des couches de faible indice sur la résolution et l'efficacité photométrique de l'optique à fibres.

L'influence de la diffraction sur la conduction de la lumière par des fibres de diamètre comparable à la longueur d'onde de la lumière est étudiée à l'aide de systèmes semblables en micro-ondes. On indique l'influence de la diffraction sur les courbes d'émission polaire et la fréquence de coupure des cylindres diélectriques. On décrit une méthode pour tirer des 'fibres multiples' isolées formées de fibres individuelles ayant des diamètres d'à peine quelques longueurs d'onde.

Das neuerdings erschlossene Gebiet der Faseroptik verspricht eine bedeutende Anwendungsmöglichkeit bei den verschiedenartigen elektro-optischen Aufgaben. Die üblichen Mittel für die Aufzeichnung oder Weitergabe von Bildern, die auf einem Lambertstrahler entworfen werden, wie z.B. auf dem Phosphor einer Kathodenstrahlröhre oder auf der Photokathode in einem mehrstufigen Bildverstärker, leiden unter beträchtlichen Lichtverlusten und geringer Auflösung. Ein geeignetes Bündel von Glasfasern überträgt das Bild ohne Schleier und gewährt hohe Auflösung und photometrische Vorteile. In gleicher Weise bietet die Faseroptik Vorteile in der Abtastphotometrie, beim Farbfernsehen und bei Anordnungen zur Ablesung von Zeichen.

Bei der Anwendung für elektronenoptische Systeme wie z.B. als Verbindungseinheit für mehrstufige Bildverstärker ist es wünschenswert, daß die optische Fasereinheit aus vollkommen gegeneinander isolierten und fest miteinander verbundenen Einzelfasern zusammengesetzt ist. Hierzu wird nach einem besonders ausgearbeiteten Verfahren eine Glasfaser gezogen, die aus einer Seele von Glas mit hohem Brechwert und einer Glashaut aus einem Glas mit niedrigem Brechwert besteht, deren Dicke $1\ \mu$ oder weniger beträgt. Diese Fasern sind außerdem mit einem absorbierenden Material bedeckt, um eine vollkommene Isolierung zu erreichen, und sind so miteinander verschmolzen, daß die Seele mit hohem Brechwert zunächst von Glas mit niedrigem Brechwert und dann von der absorbierenden Haut umhüllt ist. Fasern, die nach dieser Methode gezogen worden sind, übertragen etwa 20 Prozent des Lichtes über 2 m Länge. Der Einfluß verschiedenartiger Faktoren wie z.B. die polare Emission verschiedener Phosphore und die Dicke der umgebenden Schicht mit niedrigem Brechungsindex auf die Auflösung und die photometrische Wirksamkeit der Faseroptik wird diskutiert.

Der Einfluß der Beugung auf die Lichtübertragung der Fasern von einem Durchmesser, der mit der Lichtwellenlänge vergleichbar ist, wird mit Hilfe von Analogien aus dem Mikrowellengebiet untersucht. Der Einfluß der Beugung auf die Kurven der polaren Emission und die Frequenzbegrenzung von dielektrischen Zylindern wird erläutert. Schließlich wird eine Methode beschrieben, um isolierte Mehrfach-Fasern herzustellen, die aus Einzelfasern bestehen, bis zu wenigen Wellenlängen im Durchmesser.

REFERENCES

- [1] KAPANY, N. S., 1958, *Concepts of Classical Optics* (San Francisco: John Strong, W. H. Freeman and Co.).
- [2] OLDEN, R. G., 1957, *R.C.A. Rev.*, **18**, 3.
- [3] KAPANY, N. S., EYER, J. A., and KEIM, R. E., 1957, *J. opt. Soc. Amer.*, **47**, 5.
- [4] KAPANY, N. S., and CAPELLARO, D. F., 1959, Proceedings of the Dayton Symposium on Cathode Ray Tube Recording, Dayton, Ohio, January.
- [5] KAPANY, N. S., 1959, *J. opt. Soc. Amer.*, **49**, 779.
- [6] REIFFEL, L., and KAPANY, N. S., *Rev. sci. Instrum.* (in the press).
- [7] KAPANY, N. S., and OBERHEIM, W. A., 1958, *J. opt. Soc. Amer.*, **48**, 870.

A study of Troxler's Effect

by F. J. J. CLARKE

Technical Optics Section, Imperial College, London†

(Received 23 September 1959)

The paper describes an adaptometer which has been built to investigate local adaptation in the extra-foveal retina (Troxler's Effect). The instrument provides extra-foveal stimuli of subtense up to 12° using Illuminant A, and observations involve the continuous adjustment of the luminance of a foveal comparison field to maintain equality of subjective brightness. The time course of local adaptation can be automatically recorded, and has been measured for test stimuli at a fixed level of initial subjective brightness with variation of area and eccentricity. Subsidiary experiments have been performed with a grating field, with pre-adaptation and with reversed contrast. Troxler's Effect as an inductive process of neutralization of boundaries of contrast explains the results better than the hypothesis that local adaptation is an 'area' effect.

1. INTRODUCTION

When a steady light stimulus on a dark ground is viewed in extra-foveal vision under conditions of voluntary fixation of a suitable target, it is observed that the subjective brightness becomes noticeably reduced after a few seconds, and in some cases the object may 'fade out' and disappear altogether. This fading or local adaptation is termed Troxler's Effect after its original discoverer [1], and is one of the greatest obstacles to satisfactory observation in peripheral vision. The effect seems to involve three aspects of perception, namely colour quality, brightness and acuity. To generalize it may be said that when a complex light stimulus on a dark ground is viewed in extra-foveal vision under fixation, the subjective image immediately begins to desaturate and lose detail, while after an initial delay (of order 1 to 5 sec) the overall brightness decreases rapidly. The effect becomes less marked with reduction of eccentricity, and normally only occurs residually in central vision. In spite of the magnitude of the effects that can be produced, and of the passage of a century and a half, Troxler's Effect has been inadequately investigated and largely overlooked—the literature seems to contain relatively few references to it [1–19]. A closely related phenomenon is the decrease of critical fusion frequency in extra-foveal vision which develops with continuous fixation [20–24].

It has long been known that even under steady fixation certain movements of the eyes remain. These are the involuntary eye movements, and their presence must limit the degree of immobilization of the retinal image and hence influence the extent to which Troxler's Effect is manifest. Experiments with a stabilized retinal image, where the retinal image is completely immobilized irrespective of involuntary eye movements, show [25–31] that the perception of boundaries and gradients of luminance in the field of view is sufficiently impaired after a few seconds for the subjective field to become totally uniform. The effects are more

† Now at the National Physical Laboratory, Teddington, Middlesex

dramatic than can be achieved in voluntary fixation (for example, bold patterns rapidly fade out in central vision), but appear to of the same general type. This prompted the suggestion [18] that the experiments on Troxler's Effect and those on the stabilized retinal image were concerned with different aspects of the same physiological process. The phenomena associated with a *ganzfeld* [32-34] also seem to be manifestations of the same process.

Measurements in an earlier study [18] have shown that the same kinetics of local adaptation operate for any wavelength of monochromatic stimulus. This being so, it is no longer necessary to use monochromatic lights in investigating those aspects of the effect which are concerned with the light sense as opposed to the colour sense, and hence a convenient white light can be used (Illuminant A). The equipment used earlier [18] was inconvenient since it had to be assembled and adjusted at the beginning of each observing session and dismantled afterwards. A most serious limitation was that the largest size of stimulus available was only 40×80 min of arc. It was decided therefore to build an independent instrument of sufficient versatility to cope with as wide a range of experiments on local adaptation as possible. To avoid the introduction of too many experimental parameters, it was decided to continue using the upper meridian of the field of view, so that all work could be related and compared.

In order to perform valid experiments in peripheral vision the following conditions must be met: (a) exit-pupils must be employed [18] for both test and comparison beams, (b) these must be smaller than the smallest natural pupil size normally obtained (allowing for oblique projection), and (c) these must be at the natural pupil or very close to it. Since a large field size was desirable, it was not possible to compromise on point (c) as is often done in small field work, so that projected pupils became necessary. This in turn meant that two accurately aligned optical systems were required, the necessary condition being that at all times their principal axes must intersect and that their exit-pupils must be coincident.

A large aperture system was required for the peripheral stimulus, while a system giving a patch of up to 2° subtense was sufficient for the foveal comparison system. With steeply inclined axes the use of an eye lens for each system was impracticable, so that a viewing distance of at least half a metre was needed to avoid eye strain through excessive accommodation. This meant that the components of the peripheral system had to be large and, because of the large numerical aperture, free of gross aberrations.

2. THE EXTRA-FOVEAL ADAPTOMETER

The instrument consists basically of a large-aperture moveable system and a small-aperture fixed system, these being shown in figure 1. Both systems employ Maxwellian view with projected exit-pupils of 2 mm diameter in the centre of the natural pupil.

The foveal system is dioptric and quite orthodox. Light from a tungsten ribbon lamp S_2 is focused by L_1 , L_2 to form an image of the ribbon at P_2 , which is a pupil approximately 0.7 mm diameter in a diaphragm. In contact with this is a selected piece of Chance ON 20 heat absorbing glass, H_2 . Optically, even a selected piece is of poor quality and this is the only position to locate such a component without introducing serious aberrations. The pupil P_2 is imaged by

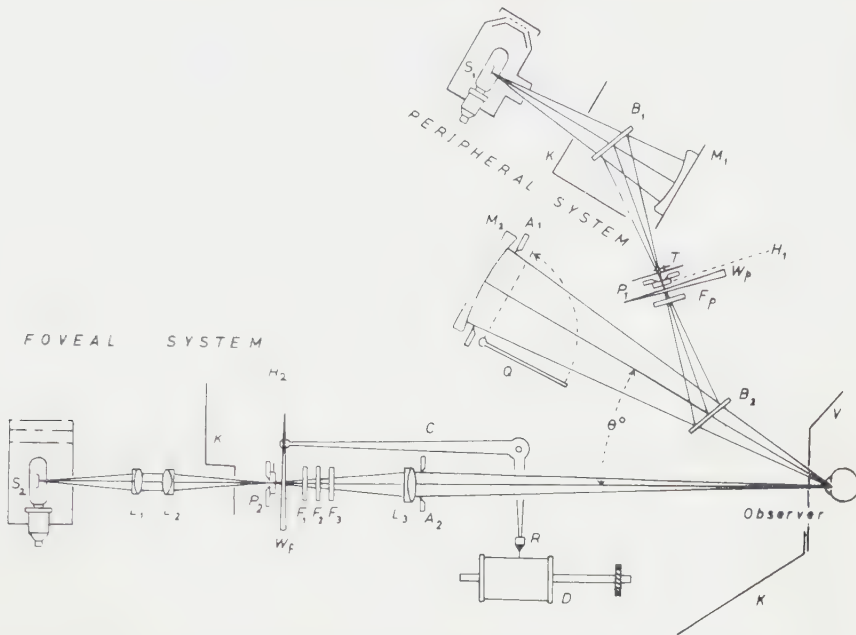


Figure 1. Main optical systems of the extra-foveal adaptometer, in elevation (see text for explanation). The peripheral system is shown with a 12° uniform field set to an eccentricity θ of 30° .

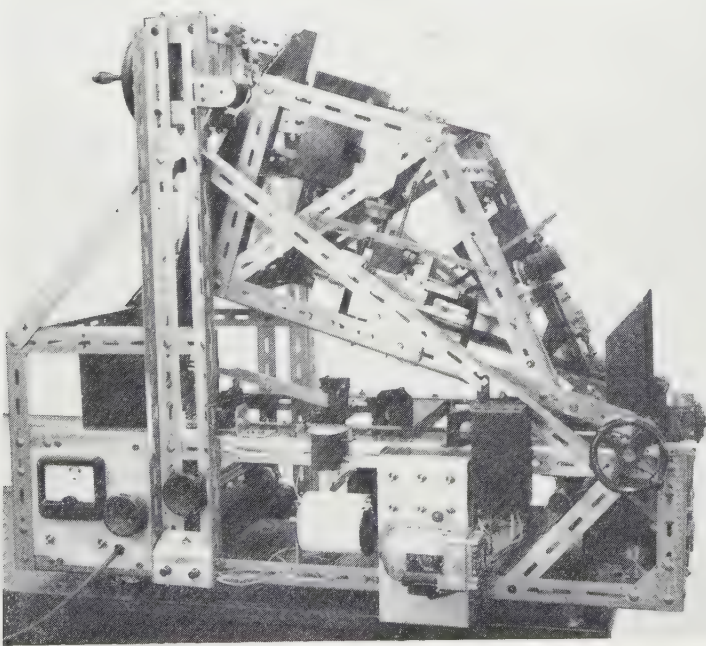


Figure 2. A general view of the extra-foveal adaptometer showing the construction and layout.

achromat L_3 at the observer's natural pupil with a magnification of about 3, the observer seeing L_3 uniformly illuminated. The field aperture A_2 is placed close to L_3 and this carries a glass plate with the fixation cross etched on.

The field size is controlled by changing the aperture A_2 , the sizes normally used being 1° and 2° of subtense. The luminance of the foveal field is controlled in coarse steps by introducing up to three neutral filters F_1 , F_2 and F_3 , while a continuous control is provided by the neutral photometric wedge W_f , this last having a density range of 0 to 4. Since the filters and wedge are close to the focused image of the ribbon, they would be damaged by overheating were it not for the infra-red absorbing filter H_2 .

The foveal wedge movement is actuated by the hand-wheel seen at the near corner in figure 2, the movements being automatically recorded. To the wedge W_f is attached a bell-crank C, which actuates a recording pen R, figure 1. The recording drum D can be instantly removed and replaced in the correct position, the drive being provided by a constant speed electric motor (see figure 2) through a worm and pinion. The drum D and motor are electrically isolated from the chassis, and the pen R is connected to an electric buzzer. Every time the pen rises over the paper-clamp on the drum a buzz is heard lasting a second. The cessation of this noise occurs when the pen commences another trace, and this is the signal for the observer to open a shutter in recording experiments.

The peripheral system is catoptric and more unusual. Light from a separate ribbon lamp S_1 is focused by a concave mirror back onto itself. An inclined beam-splitter B_1 reflects part of the returned light so as to form an image of the ribbon at P_1 at unit magnification. P_1 is a 2 mm pupil in a diaphragm and a heat filter H_1 is placed in contact as described for the foveal system. The light transmitted by P_1 is partly reflected by beam-splitter B_2 to the large mirror M_2 , and this images the pupil P_1 at unit magnification at the observer's natural pupil. The observer thus sees M_2 uniformly filled with light by appropriately positioning his eye.

The peripheral system is, in principle, aberration-free. Assuming perfectly spherical mirrors and truly flat beam-splitters, the image of a small pupil on axis has no Seidel aberrations present. Chromatic aberration is zero because the system is catoptric. Thus perfect imagery should result. In practice the beam-splitters introduce astigmatism due to their finite thickness and obliquity. The glass used, borosilicate crown, has the lowest dispersion and refractive index of the stable optical glasses, and calculation showed the chromatic aberration and astigmatism introduced to be negligible for the purpose required, even at the full field aperture of 12° . Ghost images were suppressed by 'blooming' one surface of B_1 and B_2 and semi-aluminizing the other.

The field aperture A_1 can be varied by inserting a suitable plate from a set of graduated apertures made for the purpose, these normally being circular. A second field aperture plate Q is available, and this can be swung across in front of A_1 so that experiments requiring a rapid change of field format can be performed. The luminance is normally controlled by means of a neutral wedge W_p and a neutral filter F_p ; for certain experiments, neutral filters can be rapidly inserted by mounting them in Q. A shutter T can be operated either by the observer or by an assistant. The peripheral system forms a moveable but rigid body. As described earlier, the exit-pupils of the two systems must be coincident at all

times. In order to have a system that remains in adjustment whatever the eccentricity, the peripheral system must be constrained to move so that its exit-pupil remains fixed in space. This means that, with movements in the vertical meridian of the field of view, the peripheral system must rotate about a horizontal axis passing through the exit-pupils, and hence through the observer's natural pupil.

The method of construction can be seen readily from figure 2. The peripheral system is housed in a moveable framework with a three-point suspension consisting of two massive phosphor-bronze conical bearings (the nearer of which is obscured by the foveal wedge handle in figure 2, their common axis passing through the position of the exit-pupils) and of a sprocket engaging in a large pinion-sector bolted to the moveable frame. This is elevated by rotating the sprocket by means of the large hand-wheel shown at the top of figure 2, via a worm-and-pinion drive.

In spite of the provision of light shields K (figure 1), a certain amount of stray light was inevitably reflected from the framework. Since no viewing tube or metal exit-pupil is used, some form of moveable screen close to the eyes is required. This is shown as V in figure 1, and can be seen in figure 2. To cope with eccentricities of 0° to 50° a vertical slot is provided; for a particular eccentricity the unwanted portions can be masked off with tape. Certain other features of the instrument are not relevant to this study, but will be described elsewhere. A more complete description, however, is available [35].

3. POSITIONING THE OBSERVER

The natural pupil must be located accurately in three dimensions. The longitudinal adjustment is just as important as the two transverse adjustments since eccentricities of up to 50° are envisaged. An auxiliary optical system, shown in figure 3, is employed for this purpose.

A kinematic mount carrying a semi-aluminized beam-splitter and compensating plate could be placed in position for the duration of these adjustments. A periscope, formed by the beam-splitter, two right-angle prisms and a modified short-focus telescope, allowed an assistant to view the natural pupil of the observer. These components were adjusted so that the centre of a specially made graticule was conjugate with the common position of the centres of the projected exit-pupils of the main optical systems, figure 3.

An observer is readily positioned as follows. A good dental impression is coupled onto a bracket mounted on slides working in three dimensions. The observer can position himself roughly by eliminating obvious vignetting. A powerful lamp is then switched on obliquely to illuminate the iris adequately without causing too much discomfort. Two such lamps I, F are available since the instrument is ambi-ocular; whichever eye is used, the temporal lamp is employed to avoid a nasal shadow. The assistant uses the graticule in the telescope to lock the accommodation, and moves the observer's head longitudinally until the magnified iris is seen in sharp focus, the standard deviation of this setting being about 0.3 mm. The final lateral adjustment is readily carried out by symmetry with respect to the graticule. The final longitudinal adjustment is made by the assistant traversing his eye across the large exit-pupil of the telescope, and adjusting until no parallax is obtained between the graticule and natural

pupil of the observer, the standard deviation of this setting being about 0.1 mm. It must be born in mind that the realization of such fine positioning depends on the cooperation of the observer, who can use the pressure receptors in the teeth as a guide to whether he is holding his head in the correct position.

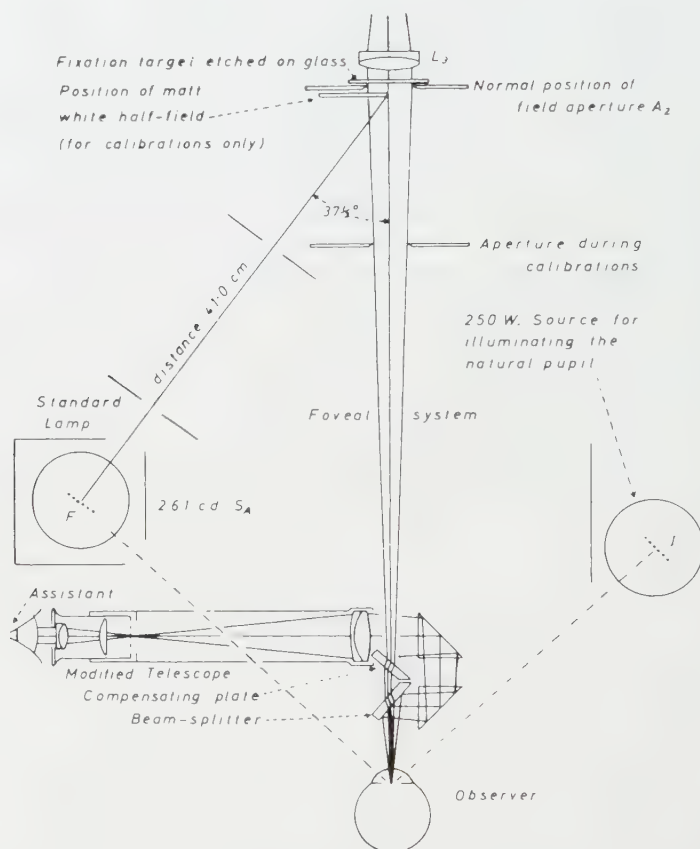


Figure 3. Auxiliary systems for positioning the observer and for photometric calibration.

4. PHOTOMETRIC CALIBRATIONS

The extra-foveal adaptometer has a photometer system built in, figure 3, so that the luminance can readily be measured. One of the 250 w lamps for illuminating the iris can be replaced with a photometric standard lamp F. This illuminates a matt white-coated surface placed to obscure half the foveal field, at a known distance and angle. Since the luminance factor for this sample and angle had previously been measured on the spectrophotometer of Wright [36], its luminance could be calculated directly. It was necessary that both the foveal field and the diffusing half-field could be viewed through a common exit-pupil in order to make a valid luminance calibration. This was achieved by providing a second kinematic mount, which was positioned so that a 1.0 mm metal pupil was concentric with the foveal beam and as close to the eye as possible.

The correct working voltage of sources S_1 and S_2 was found by making the closest match for colour to Illuminant A, a complete match not being possible owing to the non-neutrality of the 'neutral' filters and wedges. The foveal and peripheral wedges W_f and W_p were calibrated *in situ* by the normal visual method, using a graduated set of sectors.

5. EXPERIMENTAL CONDITIONS

In the earlier study [18] some important results were established, certain of which are recapitulated here. For a $40' \times 80'$ field, local adaptation is independent of wavelength or of luminance in respect of the kinetics of the process. There is, however, a continuous functional relation between the shape of fading characteristic and the eccentricity, i.e. there is a characteristic transition in the fading curve as the stimulated area passes from the fovea to the periphery. There is a range of observer characteristics, one extreme showing relatively small effects occurring fairly slowly while the other extreme shows such great facility in obtaining rapid fade-outs that this can be achieved at the fovea on occasion. The author's characteristics were found to lie somewhere near the centre of this range, a fortunate occurrence since it means that results obtained by this observer are of the type most typical of the population as a whole. The results described in this paper refer exclusively to this observer.

The extra-foveal adaptometer was housed in a separate light-tight room with matt-black walls, equipped with an extractor fan for ventilation and a warning light. The various settings, readings and adjustments made before and after an observation were performed in the 10 min recovery periods of dark adaptation between observations, the observer keeping his observing eye shut and looking with the other eye.

The foveal comparison patch was set to give a retinal illumination of 8000 trolands, this being very close to that of the $530\text{ m}\mu$ level H used in the earlier study. This enabled direct comparisons to be made between the data, since both in this and the previous study the luminance of the peripheral stimulus was adjusted until the subjective brightness matched that of the constant foveal patch.

The experimental technique was very similar to that described earlier. The test patch was presented in $\frac{1}{2}$ sec flashes to a dark adapted periphery, every 5 sec or so, and its brightness was adjusted to match that of the 8000 troland foveal patch as seen by the light adapted fovea. After 7 min in the dark, the fovea was light adapted for 3 min and a second such match was made. Likewise, a third match was made. As before, the peripheral wedge was set to the mean of three such matches.

After 7 min dark adaptation, the recording drum was started and 3 min foveal adaptation ensued. On hearing the buzz the observer operated the shutter, exposing the test stimulus permanently just as the buzz ceased. The observer moved the foveal wedge as required to maintain equality of brightness between the fading peripheral patch and the foveal patch. Five traces or so were recorded in a session.

There were five differences from the experimental conditions described earlier. Firstly, the fields were circular, as shown in figure 4(a). Secondly, the colour quality of test and comparison patch always appeared to be the same. (In the earlier study the colour appearance of the test patch depended on the

eccentricity, the level and the time of exposure.) The subjective judgement of equality of brightness was thus easier using white light. A third difference was that the controls were far easier to manipulate. A fourth, that the starting signal was clearer and less ambiguous. The fifth difference was that a greater range of density was available in the foveal wedge

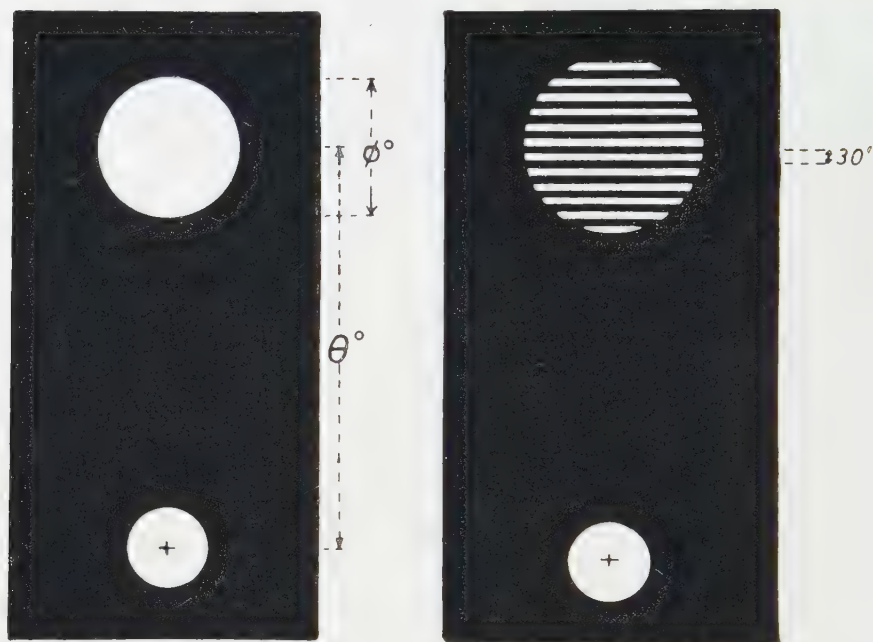


Figure 4. (a) Field of view used for most of the observations, (b) field of view for a grating experiment.

6. VARIATION OF FIELD SIZE

The eccentricity selected was 20° for the full range of field sizes, since this was typical of the near periphery and could be expected to exhibit a full range of any variations that might be caused by changing the field size. The values of ϕ (the angular subtense of the peripheral stimulus) were 0.25° , 0.50° , 1.0° , 2.0° , 4.0° , 6.0° , 8.0° and 12.0° . The results are shown in figures 5 to 12.

It will be seen that a continuous variation of fading curve was obtained when the field size was varied. In order to show whether this variation of fade-out was typical of the whole retina or merely a property of the location selected, confirmatory experiments were carried out in the para-central region at 5° of eccentricity and also in the far periphery at 40° of eccentricity.

At 5° the field sizes used were 0.25° , 1.0° and 4.0° subtense, the last-mentioned being the largest size that would not come so close to the foveal patch as to render the experiment meaningless. The results are shown in figures 14, 15 and 16 respectively. At 40° the field sizes used were 0.50° , 2.0° and 12.0° , the results appearing in figures 17, 18 and 19 respectively.

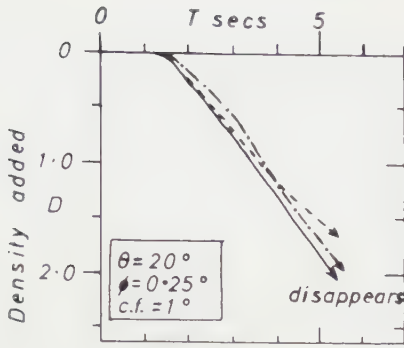


Figure 5

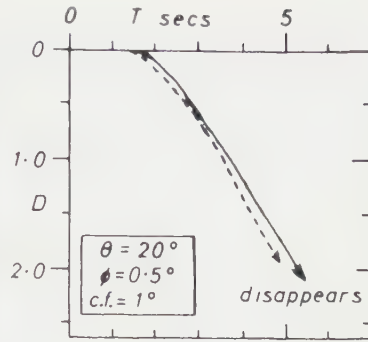


Figure 6

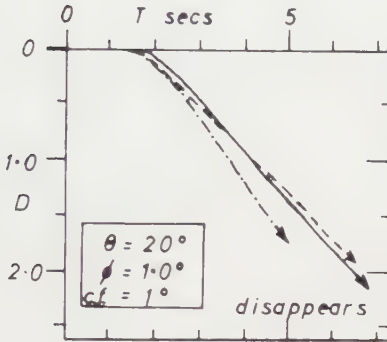


Figure 7

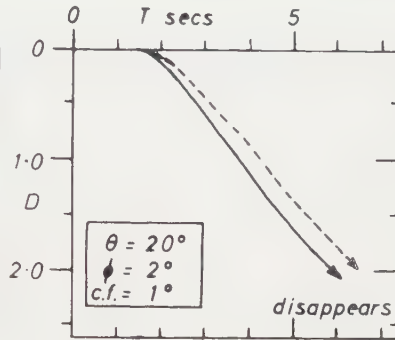


Figure 8

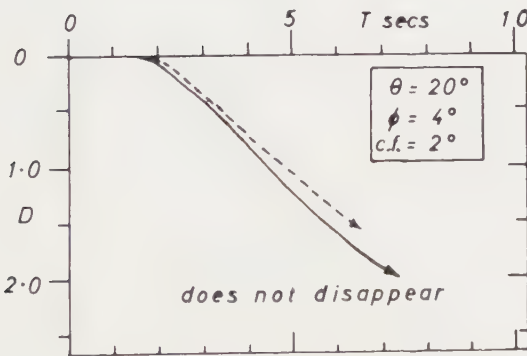


Figure 9

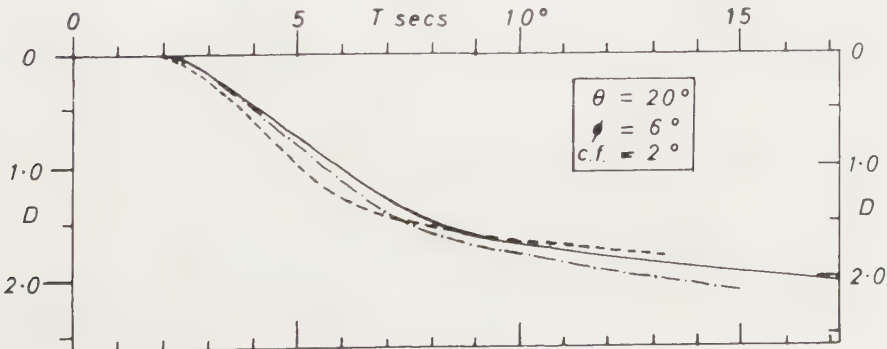


Figure 10

Figures 5-19. Mean fading data for various values of angular subtense ϕ and of eccentricity θ shown in the panels on each figure. Ordinates show the density D inserted in the foveal comparison beam to maintain equality of brightness; abscissae show the time of exposure of the test patch, T sec.

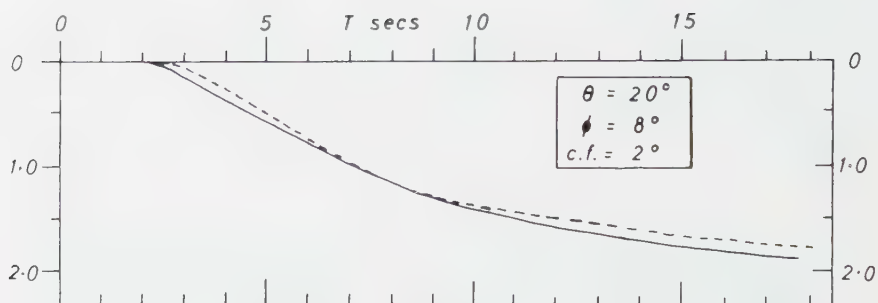


Figure 11

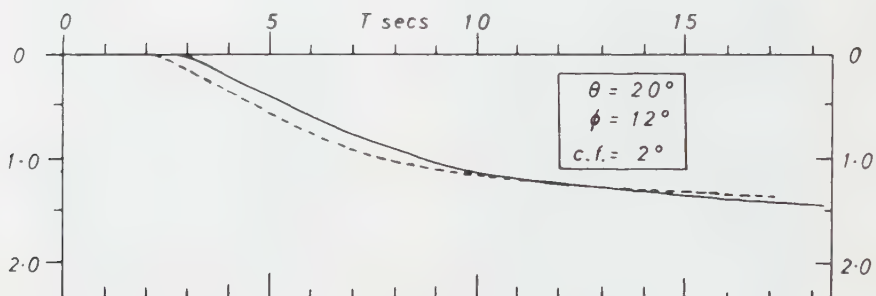


Figure 12

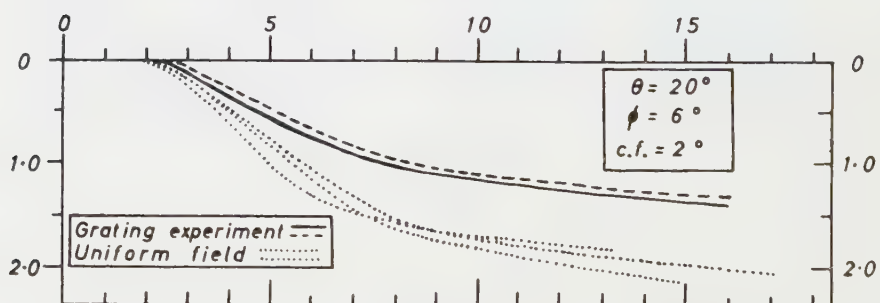


Figure 13

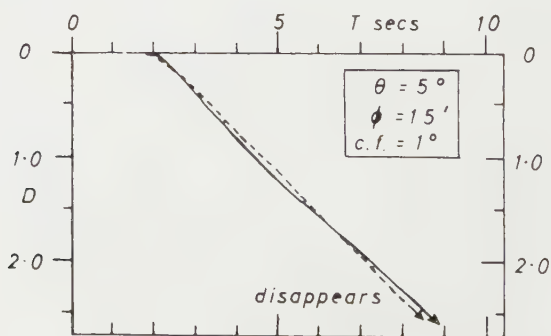


Figure 14

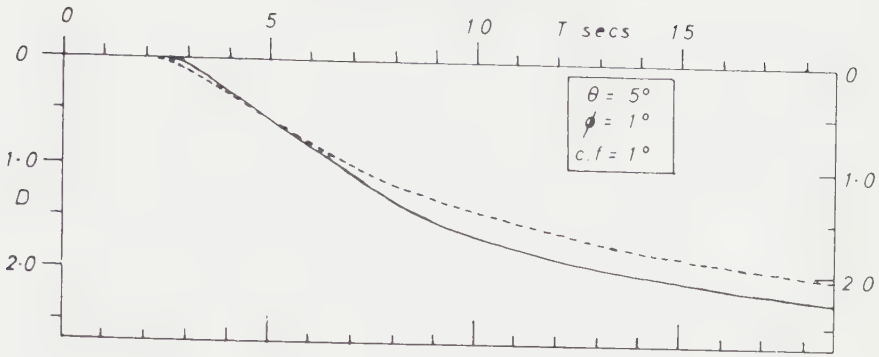


Figure 15

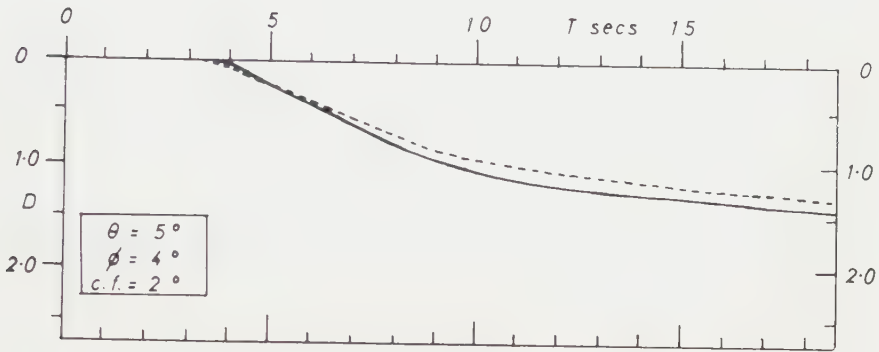


Figure 16

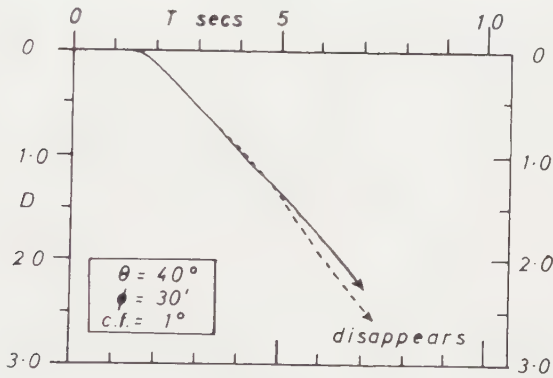


Figure 17

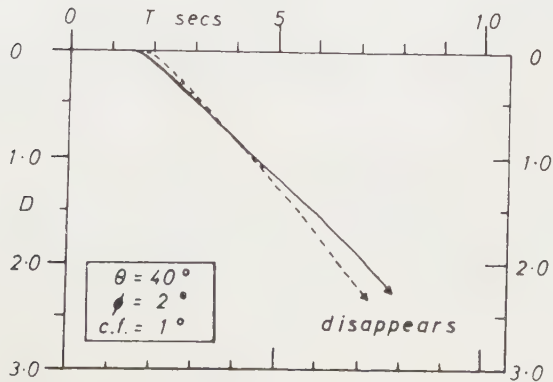


Figure 18

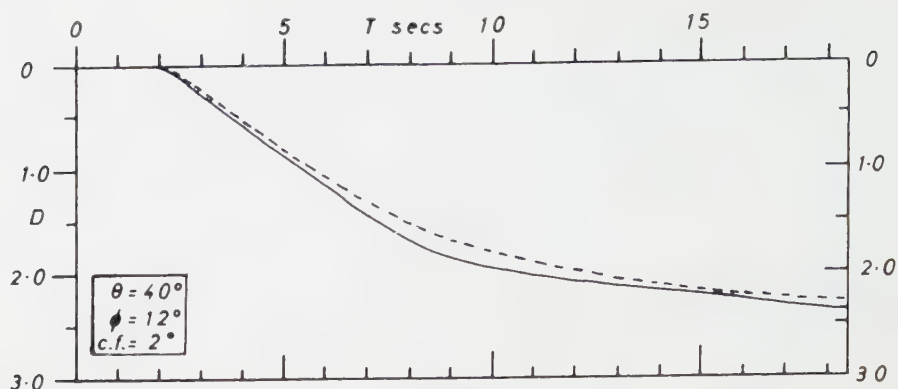


Figure 19

For fields that appeared subjectively small the foveal patch was made 1° in subtense. With fields that appeared subjectively large, the foveal patch was made 2° in subtense. The purpose of this was to reduce the difficulty of comparing the brightnesses of fields of unequal subjective size.

In figures 5 to 19 the ordinates give the density D added to the foveal comparison beam, while the abscissae represent the time T in seconds. A panel is given for each condition showing the eccentricity θ , the field subtense ϕ and the subtense of the comparison field C.F.

At 20° eccentricity the field sizes up to 2° faded and disappeared, the 4° field faded to a very dim level (but could not be followed right down because of the fixation cross becoming indistinct), figure 9, while larger fields faded merely to lower levels. The critical field size ϕ_c (the largest field that would just disappear at that angle) was therefore about 3° . A transient after-image consisting of a 'black hole' was always seen on cutting off a faded field, a phenomenon also reported by Holth [6] and by Pirenne *et al.* [19]. This was observed in the earlier study [18], but was not reported since it was not thought of as an after-image but rather as a manifestation of an off-effect, or indeed of the *eigengrau* phenomenon.

7. THE LIGHT-ADAPTED STATE

A large pre-adapting illuminated panel was adjusted in luminance until its brightness (seen with the natural pupil in a suitably positioned mirror) matched that of the foveal field of 8000 trolands. The panel thus gave a retinal illumination of close to 8000 trolands, and was approximately Source A in quality. The results for two sessions are shown in figure 20, the experiment being done with $\theta = 20^\circ$ and $\phi = 2^\circ$. Clearly, pre-adapting to a general level produces no significant effect on the kinetics.

8. SUMMARY OF RESULTS

1. There is always a latent period T_d , for all field sizes.
2. (a) The latent period T_d varies slowly and continuously with field size ϕ .
(b) The larger the stimulus the larger is T_d .

3. The delay time T_d is always followed by a phase of rapid adaptation.
4. The rate of rapid adaptation tends to increase with reduction of field size ϕ .
5. Fields of up to a certain subtense ϕ_c vanish completely, this depending on the eccentricity.
6. For large fields (ϕ greater than ϕ_c) the extent of the rapid fading decreases with increase of field size ϕ .
7. For large fields (ϕ greater than ϕ_c) there is always a slow phase of adaptation following the rapid adaptation.
8. The critical field size ϕ_c increases with increase of eccentricity ϕ .
9. Surrounding the test patch is a diffuse cloud or halo, most noticeable with small fields and at large eccentricities.
10. The diffuse cloud fades slowly during and after the rapid adaptation, only vanishing completely for small fields at large eccentricities.
11. The kinetics of fading appear to be independent of the state of pre-adaptation.

Figure 21 shows the variation of T_d with field size ϕ while figure 22 shows the variation of critical field size ϕ_c with eccentricity θ , a tentative diagram deduced from interpolated estimates of ϕ_c .

9. INTERPRETATION

It will immediately be seen that the data shown here are in accord with those reported earlier [18] as regards kinetics. There is a gradual transition of fading characteristic seen in these observations where the subtense of the stimulus has been the only variable. This transition appears to be characteristic of any retinal location. The transition of fading curve shape with eccentricity (at constant field size and for any brightness level), reported earlier [18], appears to be of exactly the same type. Thus it might be deduced that there is equivalence between variations of eccentricity and of test patch subtense. There is a physiological basis for such a hypothesis, described below.

The earlier study concluded with the suggestion that the observations described there (on Troxler's Effect) and those described by Ditchburn and co-workers might be dealing with the same phenomenon. This was suggested as being due to a 'stabilized' effect being possible in peripheral vision, owing to the small residual eye-movements in steady fixation not being sufficient to break the effect. This invokes the known poor acuity and coarse structure of sensory units, that are generally ascribed to the diffuse ramifications and convergence of neural pathways in the peripheral retina. The explanation of the change of fading kinetics with eccentricity [18] could be that as eccentricity is reduced, the number of sensory units increases for a constant area of stimulation and their size is reduced so that the residual (involuntary) eye-movements in steady fixation become more significant. The postulated equivalence between changes of field size and of eccentricity now seems easy to understand—increase of eccentricity or decrease of area both involve reducing the number of sensory units in the area stimulated.

Looking a little closer into the mechanisms operating in these experiments of voluntary fixation, we see that the argument outlined above conceals two distinct alternatives. Firstly, it is possible that Troxler's Effect is an 'area' effect, being caused by massed groups of primary receptors giving a 'constant light' signal for extended periods; at a later stage of the visual pathway such signals could become attenuated by some adaptive process such as habituation [37] or even neural accommodation. The argument is in fact largely couched in this language, the number of sensory units being the operative factor. Secondly, it is possible that Troxler's Effect is a 'boundary' effect, i.e. the effect is caused by the boundaries of the test image remaining stationary and becoming neutralized by some inductive process of adaptation. The operative factor is then two-fold: the size of the sensory units relative to the stimulus size and the boundary length relative to the stimulus area.

Superficially, the stabilized image experiments appear to favour the boundary hypothesis. However, the experiments reported so far do not appear to have been designed so as to permit complete elucidation of the problem. As so far reported, the author's work appears to support either hypothesis equally.

10. A GRATING EXPERIMENT

Recently Dr. W. A. H. Rushton made the valuable suggestion that the relative proportions of boundary and area stimulated could be greatly varied by using a grating stimulus and that this might help solve the problem.

The author accordingly made use of the replacement field aperture Q (figure 1) by introducing a coarse grating of period 30 minutes of arc in front of a circular field of 6° subtense set to eccentricity 20° . The field of view is shown in figure 4 (b). The parameters θ, ϕ were chosen so that comparison could be made with the fading curve of figure 10, in which there was scope for showing increase or decrease of fading effect. A 30' grating was used because this could readily be resolved at $\theta = 20^\circ$. (Wertheim, [38], gives 10' as the acuity limit at 20° .)

The use of a grating finer than the size of sensory units operative for Troxler's Effect would obviously give little chance of showing a difference from the uniform field of equal θ, ϕ . The smallest units conceivable are the primary receptors themselves; the largest type likely to be operative are those postulated by Oliver and Aguilar [39, 40] as mediating visual acuity. However, in view of the large size of receptive field for a cat's ganglion cell found by Kuffler [41], the author decided to use a grating of interval 30', which could readily be resolved and which would certainly 'break up' the uniform pattern of stimulated sensory units.

It was desirable to keep the total luminous flux constant as compared with the normal experiment with $\theta = 20^\circ$ and $\phi = 6^\circ$ —then the average luminance would be the same, so that the *amount* of local adaptation could be compared, see [18], result 7. Since the transparent and opaque strips of the grating were equally wide, the net transmission was 50 per cent, so that the luminance setting needed to be increased by 0.30 log units. The grating plate had four air-to-glass surfaces, each representing a reflection loss of 4 per cent. Thus the luminance setting needed a further increase of 0.06 log units, making a total increase of 0.36 log units. The correctness of these adjustments is shown by the fact that the new setting of W_p gave a satisfying overall match against the 8000 troland foveal patch.

The results for this experiment are shown in figure 13, for two sessions. It will be seen that the type of fading curve is similar, but the amount and speed of

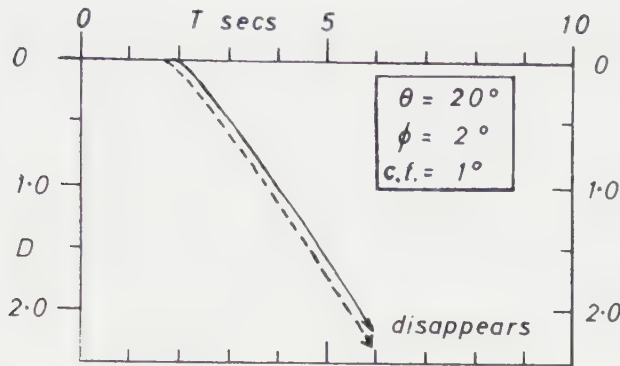


Figure 20. Fading kinetics with pre-adaptation to a large uniform field of retinal illumination 8000 trolands.

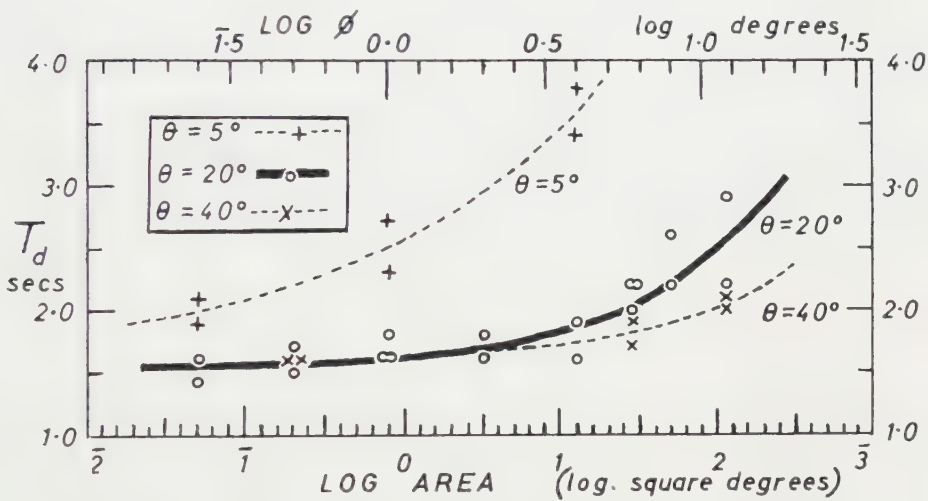


Figure 21. Variation of delay time T_d with area and subtense of stimulus.

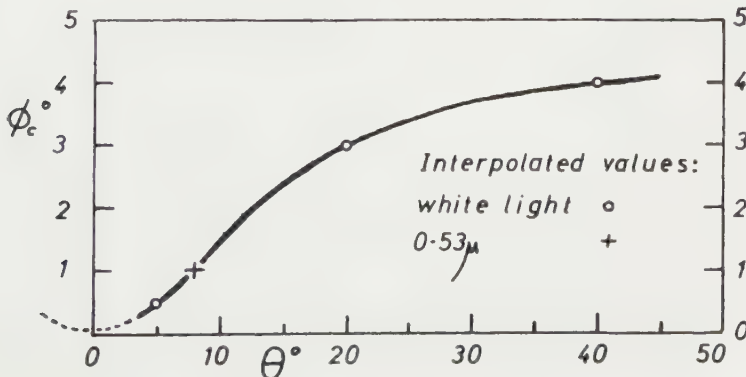


Figure 22. Variation of critical stimulus subtense ϕ_c with eccentricity θ . The value for monochromatic light of wavelength 0.53μ was obtained from the earlier study [18].

local adaptation has been markedly reduced compared with that of the corresponding uniform field, figure 10. The curves actually resemble those found with larger fields still, figures 11 and 12. Initially the grating was easily seen, but rapidly blurred out at about the same time that the brightness began to fall, $T=2$ to 3 sec. From then the experiment was subjectively as for a uniform field. At breaks of fixation, the grating appeared, resolved again momentarily, and the brightness increased.

It is interesting that it was difficult to get a marked 'black hole' after-image. Although such an effect was weakly obtained, no grating structure was ever seen in after-image.

11. EXPERIMENTS WITH DARK OBJECTS ON A LARGE WHITE FIELD

The adaptation panel, adjusted to 8000 trolands retinal illumination, was viewed at close range as before, so that it covered most of the visual field. Dark circular objects were attached to the opal glass surface, and fixation was attempted on a small blemish. It was found that the dark objects brightened after a few seconds and faded out. If the eccentricity were small or if the object were large, it did not completely disappear, but otherwise it vanished after some seconds.

Such a field could be provided in the extra-foveal adaptometer (although the white surround would be limited to 12° subtense), but quantitative experiments were not practicable, owing to the difficulty of providing a foveal comparison field of the same type whose 'darkness' relative to a surround could be controlled and recorded.

12. DISCUSSION

A examination of the results presented in this paper shows that they are self-consistent and that they support the results reported earlier. A significant result is that general pre-adaptation to a moderately high level of illumination (8000 trolands) produced no significant change of fading kinetics, figures 8 and 20. This supports the contention that the fading process is characteristic of rod and cone actuated units indifferently. The tentative diagram shown in figure 22 has a dotted foveal portion that is inferred—it is, however, soundly based, since earlier studies [7, 9, 12, 14, 15, 16] show that very small fields of a few minutes of arc can normally be made to disappear in the central fovea and that there is radial symmetry near the fovea.

The experiments with dark objects on a uniform white ground show exactly the same characteristics as the corresponding cases with white stimuli on a dark ground. This fact militates against Troxler's Effect being an 'area' effect, since it is difficult to see why the unstimulated units of the (dark) retinal image should 'adapt out', since it is the surrounding units that are being stimulated and could show adaptation. The 'boundary' model explains this easily, since the reduction of eye-movements by fixation prevents the alternate stimulation and unstimulation of the sensory units on the optical boundary of the image. Thus the space pattern information relayed to the cortex, largely by on- and off-receptors one supposes, is drastically reduced. This proposition is in good accord with the well-known 'filling-in' property in perception psychology.

The grating experiment tells more strongly still against the 'area' model. If we break up the uniform area of a large test field into narrow strips coarser than the sensory mosaic, we should expect the resultant field to show the characteristics typical of these smaller components on the area hypothesis, i.e. a more marked Troxler's Effect. On the boundary hypothesis, the enormous increase of boundary length obtained with the grating when the same region is stimulated should mean that the residual eye-movements become more effective in preventing boundary neutralization, so that less fading should be found. The results shown in figure 13 show clearly that there is less fading with a grating, *ceteris paribus*. Since an increase of luminance causes an increase in the total amount of fading (where total disappearance does not occur), the effect of doubling the luminance of the bright strips to keep the total flux constant would cause an *increase* in the amount of fading rather than a decrease. The feebleness of the negative after-image produced when the grating was cut off, after subjective fading, provides yet further evidence that the local adaptation effect is inhibited by increasing the boundary length without increasing the area.

ACKNOWLEDGMENTS

The author is indebted to Professor W. D. Wright and to his colleagues of the Technical Optics Section for their keen interest and constant encouragement in this work. Thanks are due to the *Medical Research Council* for the award of a Research Scholarship and to the *Beit Trustees* for the subsequent award of a Research Fellowship.

On décrit un adaptomètre construit pour étudier l'adaptation locale en vision extra-fovéale dans des conditions d'observation continue et de fixation soutenue (effet Troxler). L'instrument fournit des stimuli extra-fovéaux jusqu'à une ouverture de 12° en employant la plage lumineuse A; les observations nécessitent l'ajustement continu de la luminance d'une plage de comparaison fovéale pour maintenir l'égalité de brillance subjective. L'évolution avec le temps de l'adaptation locale peut s'enregistrer automatiquement. Elle a été mesurée pour un stimulus-test de brillance initiale fixée et dont on a fait varier l'aire et l'excentrement. Des expériences auxiliaires ont été faites avec un champ modulé, une préadaptation et un contraste renversé. L'effet Troxler considéré comme un processus inductif de la neutralisation des bords du contraste explique mieux les faits que l'hypothèse selon laquelle l'adaptation locale est un effet de surface.

Die Arbeit behandelt ein Adaptometer für die Untersuchung der Lokal-Adaptation in der extra-fovealen Netzhaut bei konstanter Fixierung (Troxler-Effekt). Das Instrument gibt extrafoveale Reize von 0 bis zu 12° mit Normlichtart A. Die Messung geschieht durch kontinuierliche Angleichung der Leuchtdicht eines fovealen Vergleichfeldes, um gleiche subjektive Helligkeit zu erreichen. Der zeitliche Verlauf der Lokaladaptation kann automatisch aufgezeichnet werden und wurde für Testreize von konstanter subjektiver Anfangshelligkeit bei veränderlicher Fläche und Exzentrizität gemessen. Außerdem wurden Versuche mit einem Gitterfeld, mit Voradaptation und mit Umkehrkontrast durchgeführt. Der Troxler-Effekt als Induktivprozeß der Neutralisierung an der Kontrastgrenze erklärt die Resultate besser als die Annahme, die Lokaladaptation sei ein 'Flächen-Effekt'.

REFERENCES

- [1] TROXLER, D., 1804, *Ophthalm. Bibliothek*, II, edited by v. Himly and Schmidt (Jena), p. 1.
- [2] PURKINJE, J., 1823, *Reobachten und Versuche zur Physiologie der Sinne*, I (Prague), p. 76.
- [3] BREWSTER, SIR DAVID, 1833, *Letters on Natural Magic addressed to Sir Walter Scott, Bart.* (London: Murray), p. 13.
- [4] AUBERT, H., 1865, *Physiologie der Netzhaut* (Breslau).
- [5] v. HELMHOLTZ, H., 1867, *Hambd. der Physiol. Opt.*, 1st edition (Leipzig), p. 364.
- [6] HOLTH, S., 1896, "Det normale Synsorgans indirekte Stirreblindhed og dens Betydning under Synsfeltundersøgelse", *Norsk. Mag. for Laegevidenskaben*, Kristiania (Tillaegshefte).
- [7] HENSEN, V., 1897, *Virchows Arch.*, **39**, 475.
- [8] DUNLAP, K., 1921, *Amer. J. Physiol.*, **55**, 201.
- [9] HOFMANN, F. B., 1925, *v. Graefe u. Saemisch Handb.*, III, 2nd edition, ch. 13, p. 67.
- [10] DUKE ELDER, SIR W. S., 1938, *Textbook of Ophthalmology*, I, p. 909 or 1932, p. 897.
- [11] DUKE ELDER, SIR W. S., 1938, *Ibid.*, I, p. 915 or 1932, p. 903.
- [12] CLEMMESON, V., 1945, *Acta physiol. scand.*, **9**, 127.
- [13] EBBECKE, U., 1947, *Pflüg. Arch. ges. Physiol.*, **249**, 87.
- [14] CIBIS, P., 1948, *v. Graefes Arch. Ophthal.*, **148**, 1.
- [15] CIBIS, P., 1948, *Ibid.*, **148**, 216.
- [16] CIBIS, P., and MÜLLER, H., 1948, *Ibid.*, **148**, 468.
- [17] BAY, E., 1953, *Brain*, **76**, 515.
- [18] CLARKE, F. J. J., 1957, *Opt. Acta*, **4**, 69.
- [19] PIRENNE, M. H., MARRIOTT, F. H. C., and O'DOHERTY, E. F., 1957, *M.R.C. Spec. Rep. Vision*, No. 294, p. 56.
- [20] IVES, H., 1912, *Phil. Mag.*, **124**, 352.
- [21] LYTHGOE, R., and TANSLEY, K., 1929, *M.R.C. Spec. Rep. Vision*, No. 134.
- [22] GRANIT, R., and v. AMMON, W., 1930, *Amer. J. Physiol.*, **95**, 229.
- [23] LE GRAND, Y., and GEBLEWICZ, E., 1937, *C. R. Acad. Sci., Paris*, **205**, 297.
- [24] BROWN, H. C., 1945, *Arch. Psychol.*, N.Y., No. 298.
- [25] DITCHBURN, R. W., and GINSBORG, B. L., 1952, *Nature, Lond.*, **170**, 36.
- [26] RATLIFF, F., 1952, *J. exp. Psychol.*, **43**, 163.
- [27] DITCHBURN, R. W., and FENDER, D. H., 1955, *Opt. Acta*, **2**, 128.
- [28] DITCHBURN, R. W., and PRITCHARD, R. M., 1956, *Nature, Lond.*, **177**, 434.
- [29] RIGGS, L. A., RATLIFF, F., CORNSWEET, J. C., and CORNSWEET, T. N., 1953, *J. opt. Soc. Amer.*, **43**, 495.
- [30] DITCHBURN, R. W., 1955, *Opt. Acta*, **1**, 171.
- [31] DITCHBURN, R. W., 1956, *Research*, **9**, 466.
- [32] METZGER, W., 1929, *Psychol. Forsch.*, **13**, 6.
- [33] HELSON, H., and JUDD, D. B., 1932, *J. exp. Psychol.*, **15**, 380.
- [34] HOCHBERG, J. E., TRIEBEL, W., and SEAMAN, G., 1951, *J. exp. Psychol.*, **41**, 153.
- [35] CLARKE, F. J. J., 1959, *Ph.D. Thesis*, London.
- [36] WRIGHT, W. D., 1954, *Opt. Acta*, **1**, 102.
- [37] JASPER, H. H., 1957, *Reticular Formation of the Brain*, Paper 15 (Toronto: Little, Brown & Co.), p. 320.
- [38] WERTHEIM, T., 1894, *Z. Psychol. Physiol. Sinnesorg.*, **7**, 172.
- [39] OLIVA, J., and AGUILAR, M., 1956, *Opt. Acta*, **3**, 36.
- [40] OLIVA, J., and AGUILAR, M., 1957, *Opt. Acta*, **4**, 145.
- [41] KUFFLER, S. W., 1953, *J. Neurophysiol.*, **16**, 37.

Allvar Gullstrand†

by MAX HERZBERGER

Research Laboratories, Eastman Kodak Company, Rochester, New York, U.S.A.

It is a high honour to be asked to speak in Stockholm about the work of Allvar Gullstrand. If I had to name the scientists who have contributed most to optical science, Allvar Gullstrand would be next in importance to Newton, Huygens and Hamilton.

Allvar Gullstrand was not a specialist in geometrical optics, nor was he a mathematician. He was an ophthalmologist, an eye physician, occupying the chair of ophthalmology at the University of Uppsala. He was awarded the Nobel prize in 1911 in medicine, being, aside from our respected friend, Fritz Zernike, the only scientist in optics to achieve this honour.

His contributions to ophthalmology are very great. Using the measurements of varying refractive index within the human eye by Mathiessen, he gave a mathematical model of the human eye as a well-defined optical system with continuously varying refractive index. He also gave a mathematical model of the process of accommodation. His 'great ophthalmoscope', using aspheric lenses, is a powerful tool for the exact measurement and correction of the errors of the human eye. The ophthalmologists consider him to be the man who, next to Helmholtz, contributed more than anyone else to a mathematical understanding of the human eye as an optical system.

The eye is an optical instrument which combines a fairly small aperture with a large field. This is in distinction from the optical instruments of Gullstrand's time, in which a medium-sized aperture was combined with a medium-sized field. To understand such a system and its aberrations, it is necessary to go beyond first-order optics. The third-order aberrations studied by Seidel gave, at least qualitatively, a fairly good picture of the defects of such systems. A model of the Seidel type, however, is not satisfactory for a 'wide-angle objective', such as the human eye, where the image formation of the principal rays and the bundles surrounding them are of greater importance than that of the rays in the neighbourhood of the axis. The principal rays themselves project the object, point by point, into an image plane. This optical projection and its simple laws were considered by Gullstrand as the equivalent to Gaussian optics. From these he started to investigate the *neighbourhood* of a principal ray first for homogeneous media and then for inhomogeneous media, defining the image errors up to the fourth order. He was not unaware of the difficulties which arise if one wants to describe the caustic surface in the case where astigmatism is corrected for the principal rays, in which case the caustic surface has a singularity. In the course of investigating the singularities of the caustic surfaces, he made an important contribution to pure mathematics, which had been sadly negligent in the study of the singularities of surfaces. One of his papers is a purely mathematical essay dealing with the study of these umbilical points. Moreover, he calculated the invariant up to the fourth order

† This paper was read at the Fifth Conference of the International Commission for Optics in Stockholm, August 1959.

connected with the geometric of the bundle and gave formulae for tracing these data through an optical system, just as we are accustomed to trace astigmatism along a single ray.

While making these investigations, he discovered a number of widespread misconceptions about optical image formation, and, being a fighter, he devoted many of his later papers to an attempt to destroy these misconceptions. One of his papers is even entitled "Tatsachen und Fiktionen in der Lehre von der optischen Abbildung". This crusading effort, however, was much less successful than could be desired. Maybe the fact that he did not belong to the right 'union' (he won his fame as an ophthalmologist and not as a worker in geometrical optics) had something to do with it. Though von Rohr and Boegehold have drawn attention to the basic contributions he has made, and though I have raised my small voice in presenting his ideas, the misconceptions which he fought are still part and parcel of all optical textbooks but one, and they are still taught to all students of optics.

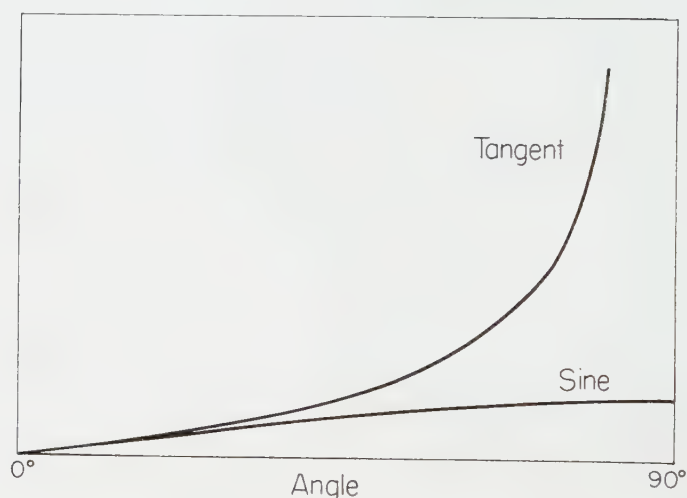


Figure 1. Graph showing the disparity between the sine and the tangent of an angle.

Let us briefly mention three of them:

(1) *Collinear image formation.* The mathematicians have developed a very beautiful theory—the theory of collinear image formation. There exists a mathematical image formation such that all the lines coming from a point in one space (object space) unite at a point in image space. Such a system would image every object sharply and without distortion. There is only one thing wrong with its application to optics, namely, that such an image formation is, in general, optically impossible. Only the image in a plane mirror is a collineation, or, more generally, the image formation in a telescope can be a collineation if, and only if, the magnification is equal to the ratio of refractive indices in the object and image spaces. It is, however, possible to image a *single plane* (or a *surface*) sharply with a desired magnification, but one of the necessary conditions for this is, as you know, that the axis rays fulfil the sine condition, whereas collineation would require a proportionality between the

tangents. The disparity between these two functions is shown by figure 1. Notwithstanding these facts, the thought that *collinear* image formation is the *ideal* image formation is still firmly embedded in optical pedagogy.

(2) *The Sturm conoid.* The appearance of astigmatism is known to every optical designer. The image rays can be described as being tangential to the caustic surface at two points; to *one* caustic surface and not to two, because only if the caustic has symmetry can it be split into two parts (sagittal and meridional). Unfortunately, Christian Sturm in 1838 published a paper in which he gave a picture that again conquered the writers of textbooks and the minds of optical scientists. Making a series of cross sections normal to the principal ray of a bundle of small aperture, as shown in figure 2 A, he found them

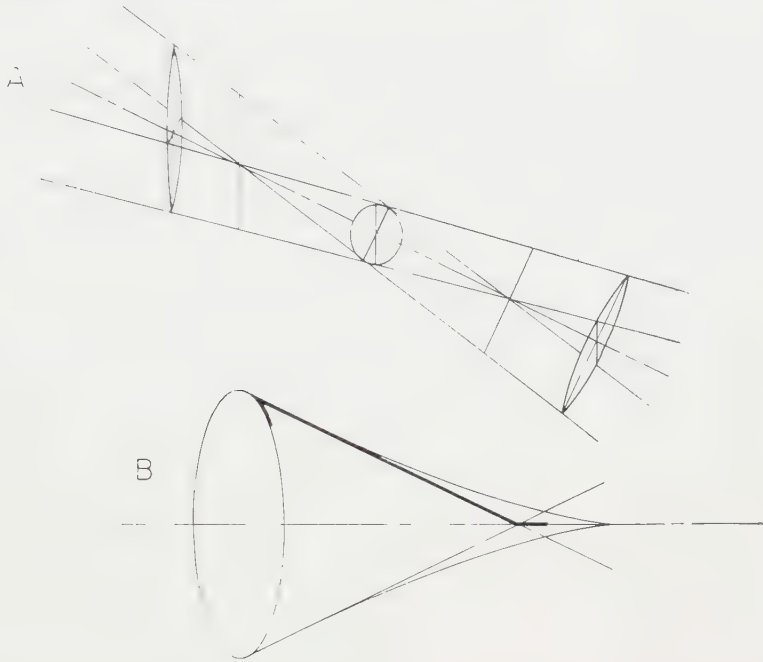


Figure 2. A, the Sturm conoid, showing the two orthogonal line foci and the intervening circle of least confusion. B, the true caustic, showing the two line foci, one a straight line coincident with the axis and the other an arc of the caustic.

to look like ellipses. These ellipses have axes which are proportional to the distance from the foci to the image plane considered, and the ellipses degenerate to a line element in the plane through each focus. Thus, he concluded that a general picture of an astigmatic bundle can be visualized by a model in which threads connect the points of these two lines, which are perpendicular to each other and to the principal ray.

Again Gullstrand proved and tried to convince us that such a picture is incorrect if more than a first-order approximation is desired—that the rays connecting two such straight lines cannot be the image of rays coming from an object point. The law of Malus requires that the rays from an object point normal to a (set of) wave surface(s) form a 'normal system', and the lines of the Sturm conoid do nothing of the kind. Again his admonition has not

been heeded. Most of us still believe that the Sturm conoid gives a correct approximation to an astigmatic bundle, in spite of the fact that the picture in figure 2 B, known to us all, should teach us better. In the drawing you see a principal ray which forms part of a bundle with spherical aberration. It is obvious that the neighbouring rays go through two line elements. One of them forms part of the circle around the axis formed by the point of the caustic that is tangential to the ray, but the other is formed by the sagittal caustic. This latter is part of the axis and by no means at a right angle to the principal ray. This—and not the Sturm conoid—is a typical picture for the image formation in the neighbourhood of a principal ray.

(3) *Asymmetry*. Gullstrand showed that asymmetry (or coma) for an off-axis point has *two* coefficients, not *one* as the Seidel theory predicts, and he investigated correctly the third-order errors in a general bundle (three in number) to which I have given the name 'Gullstrand errors' in my recent book.

It is impossible to enumerate all of Gullstrand's contributions to optics, so I only mention his suggestion which led to the design of telescopic spectacles for people whose crystalline lenses have been removed (aphakic spectacles), and his contribution to the theory of vision, in emphasizing that the eye when viewing a scene is not fixed but moves about a centre of rotation. I also mention the extensive paper in which Gullstrand discussed ray tracing through aspheric lenses and the manufacture of such lenses—one more sign of how much he was ahead of his time.

This group may be interested in another of his papers [1], where he discusses in great detail the relationship between contrast and resolving power, stating clearly that a single number cannot suffice to describe the quality of an optical image, a statement which should be kept in mind in the discussions of this Congress.

To conclude, let us think about the serious fact that, in spite of his fame, his important work has not sufficiently penetrated the contemporary literature. Does our specialization go so far that contributors from neighbouring sciences find no echo in ours? Or is Max Planck right, who in an autobiographical sketch, said:

Es gehört mit zu den schmerzlichsten Erfahrungen meines wissenschaftlichen Lebens, dass es mir nur selten, ja, ich möchte sagen niemals gelungen ist, eine neue Behauptung, für deren Richtigkeit ich einen vollkommen zwingenden, aber nur theoretischen Beweis erbringen konnte, zur allgemeinen Anerkennung zu bringen. . . . Dabei hatte ich Gelegenheit, eine, wie ich glaube, bemerkenswerte Tatsache festzustellen. Eine neue wissenschaftliche Wahrheit pflegt sich nicht in der Weise durchzusetzen, dass ihre Gegner überzeugt werden und sich als belehrt erklären, sondern vielmehr dadurch, dass die Gegner allmählich aussterben und dass die heranwachsende Generation von vornherein mit der Wahrheit vertraut gemacht ist.

What can we do? There is one course open to us. Gullstrand's chief work is published in the *Kungl. Svensk Academy Handlingar*, which, unfortunately, is not available everywhere in the world. It would give a great impetus to the progress of our own science if the work of Allvar Gullstrand were published in book form. Some editing might have to be done, since his results can be

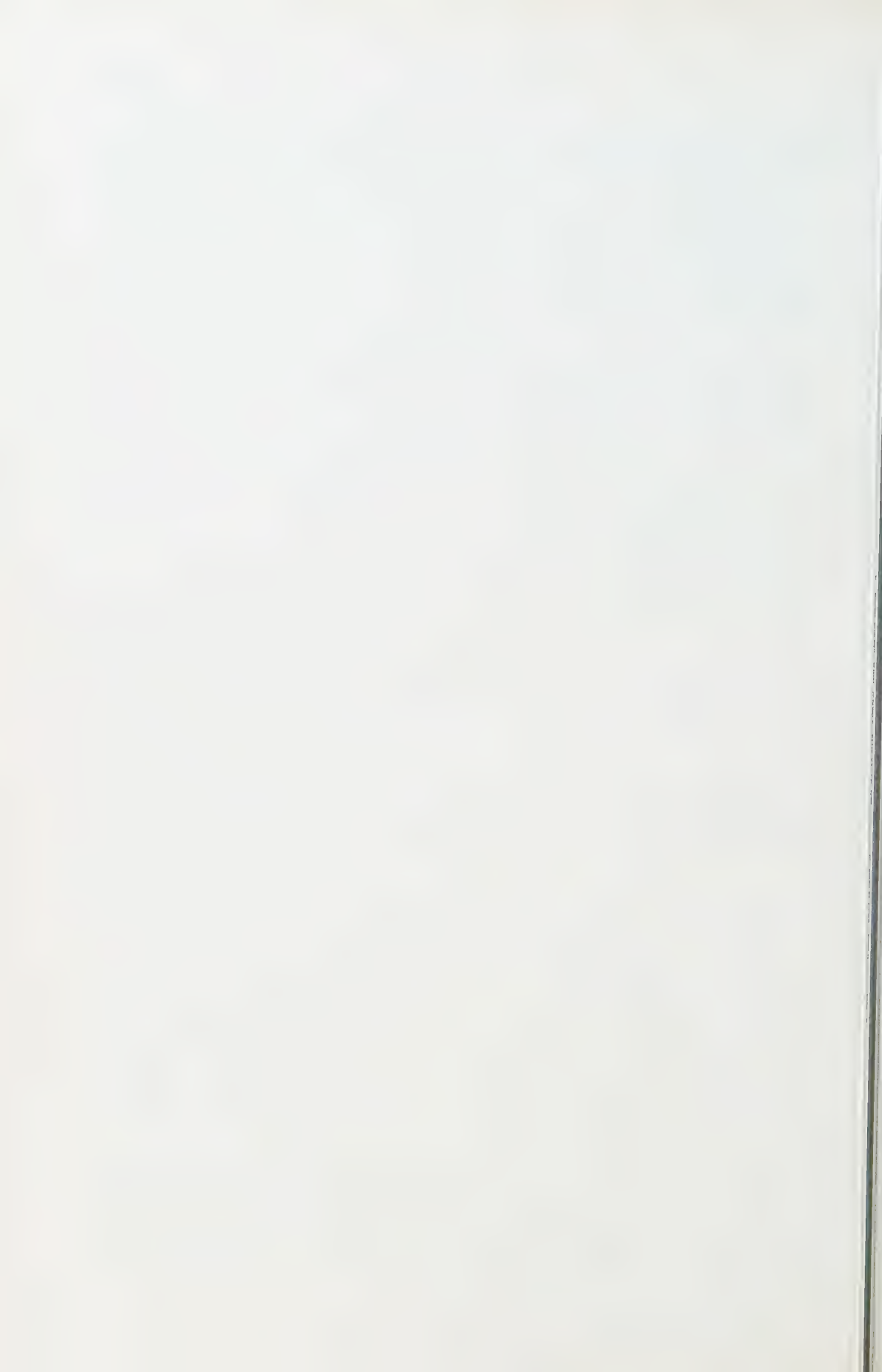
derived in a less laborious way. But they are *his* results, and a knowledge of them would benefit all of us.

In considering the work of this great scientist, let us remember Lessings's words:

Wer wird nicht einen Klopstock loben,
Doch wird ihn jeder lesen? Nein!
Wir wollen weniger erhoben,
Und fleissiger gelesen sein.

REFERENCE

- [1] GULLSTRAND, A., 1926, *Naturwissenschaften*, **14**, 653.



Restitution des images aberrantes par le filtrage des fréquences spatiales

par JUMPEI TSUJIUCHI

Institut d'Optique, Paris

(Received 23 November 1959)

On étudie la restitution de l'image abimée par l'aberration de l'objectif à l'aide de la méthode du filtrage des fréquences spatiales en faisant une expérience sur l'image donnée par un objectif dont la transmission de fréquence spatiale est une courbe de Gauss d'une dimension.

1. INTRODUCTION

La méthode du filtrage des images optiques nous donne la possibilité d'améliorer la qualité des images. Ce problème a été étudié par Maréchal, Croce et Dietzel, et un filtre pour l'augmentation du contraste [1, 2, 3] et un filtre pour la restitution du dédoublement [2] ont été préparés. Le même sujet a été considéré par O'Neill qui a réalisé un filtre pour l'élimination du bruit d'optique [4].

Comme on l'a vu dans l'article de Croce [1], la restitution de l'image aberrante peut être faite par cette méthode. Alors nous avons étudié dans ce travail la possibilité de la restitution des images abimées par l'aberration de l'objectif. Et nous avons vérifié cet effet en faisant une expérience à l'aide d'un filtre d'amplitude.

2. THÉORIE GÉNÉRALE

Dans un système optique montré dans la figure 1, on considère un système de coordonnées rectangulaires (x, y) dans le plan de la pupille L (u_1, v_1) dans le plan objet I et (u_2, v_2) dans le plan image I' . Les origines de chaque coordonnée se situent sur l'axe optique, et les axes u_1, u_2 et x sont parallèles.

Les coordonnées (x, y) sont choisies de telle façon que celle de l'ouverture maximum de la pupille devient 1, c'est-à-dire

$$x = X/L, \quad y = Y/L, \quad (1)$$

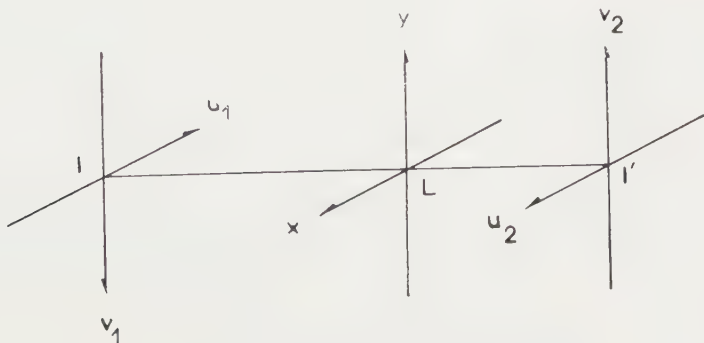


Figure 1. Coordonnées du système optique.

où (X, Y) sont les coordonnées géométriques dans le plan de la pupille et L est l'ouverture maximum de l'objectif. (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont symétriques par rapport au point L , centre de la pupille, et l'on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} u_1 &= k\alpha_1 U_1/m_{12}, & u_2 &= k\alpha_2 U_2, & \alpha_1 &= L/A, \\ v_1 &= k\alpha_1 V_1/m_{12}, & v_2 &= k\alpha_2 V_2, & \alpha_2 &= L/B, \end{aligned} \quad (2)$$

où (U_1, V_1) et (U_2, V_2) sont les coordonnées géométriques dans chaque plan, $k = 2\pi/\lambda$, m_{12} le grossissement du système, A la distance entre L et I' .

Nous allons considérer la formation de l'image d'un objet dont la répartition d'éclairement est donnée par $g(u_1, v_1)$: Cette fonction peut s'écrire, à un facteur constant près,

$$g(u_1, v_1) = \iint_{-\infty}^{\infty} G(x, y) \exp [i(u_1 x + v_1 y)] dx dy, \quad (3)$$

où $G(x, y)$ est une fonction qui exprime l'objet en fonction de la fréquence spatiale. Si la répartition d'intensité dans l'image d'un point formée par ce système est $h(u_2, v_2)$ et si l'isoplanétisme est valable dans tout le champ, l'image de $g(u_1, v_1)$ obtenue en éclairage incohérent devient

$$g'(u_2, v_2) = g(u_1, v_1) \star h(u_2, v_2), \quad (4)$$

et on peut l'écrire, par le théorème de Parseval,

$$G'(x, y) = G(x, y)H(x, y), \quad (5)$$

où $G'(x, y)$, $G(x, y)$ et $H(x, y)$ sont les transformées de Fourier de $g'(u_2, v_2)$, $g(u_1, v_1)$ et $h(u_2, v_2)$ respectivement.

On prend une couche sensible dont $g'(u_2, v_2)$ est enregistré. En général, afin d'obtenir la valeur 'gamma' constante, il est désirable que le contraste de l'objet soit assez faible. On peut réaliser cette condition en passant de $g(u_1, v_1)$ à $g(u_1, v_1) + a_0$, où a_0 est une constante qui est beaucoup plus grande que la fluctuation de $g(u_1, v_1)$, qui donne l'image sauf le bord du champ ;

$$g(u_1, v_1) \star h(u_2, v_2) + a_0.$$

On a donc la répartition de densité dans le cliché développé :

$$d(u_2, v_2) = \log_{10} [g'(u_2, v_2) + a]^\gamma, \quad (6)$$

où a est une constante due à a_0 et à 'gamma' pour la région où la lamination est comprise entre zéro et a_0 .

Quand on met ce cliché dans le faisceau lumineux, on obtient la répartition d'amplitude qui traverse ce cliché :

$$t(u_2, v_2) = [g'(u_2, v_2) + a]^{-\gamma/2}. \quad (7)$$

Puisqu'il est possible de considérer que a est beaucoup plus grand que la fluctuation de $g'(u_2, v_2)$ à cause de la condition donnée préalablement, (4) et (7) donnent approximativement, à un facteur constant près,

$$t(u_2, v_2) = 1 - \gamma/2a [g(u_1, v_1) \star h(u_2, v_2)]. \quad (8)$$

Considérons maintenant le reconstituteur développé par Maréchal et Croce [1, 2]. Dans la figure 2, S est une source ponctuelle, O_1 un collimateur qui forme l'image de S dans le plan S' . Dans ce cas, on met dans le plan de O_1 les coordonnées (u_3, v_3) , dans le plan S' (x', y') , qui sont définies par

$$\begin{aligned} u_3 &= k\alpha_3 U_3, & x' &= X'/L', & \gamma_3 &= L'/A', \\ v_3 &= k\alpha_3 V_3, & y' &= Y'/L', \end{aligned} \quad (9)$$

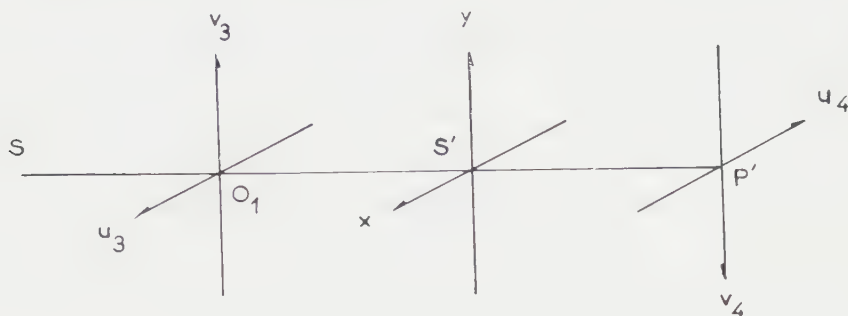


Figure 2. Coordonnées du restituteur.

où (U_3, V_3) sont les coordonnées géométriques dans le plan O_1 , (X', Y') celles dans le plan S' , A la distance entre O_1 et S' , L' l'ouverture maximum du plan S' .

Or, on met le cliché obtenu avant dans le plan O_1 , les coordonnées (U_2, V_2) coïncident avec (U_3, V_3) , on a donc

$$\frac{U_2}{V_2} = \frac{U_3}{V_3} \quad \frac{u_2}{u_3} = \frac{v_2}{v_3} = \frac{\alpha}{\alpha'}, \quad \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{\alpha_3}{\alpha_2}. \quad (10)$$

La répartition d'amplitude dans le plan O_1 devient $t(u_3, v_3)$ et le spectre obtenu dans le plan S' a la répartition d'amplitude donnée, à un facteur constant près, par

$$\begin{aligned} T(x', y') &= \iint_{-\infty}^{+\infty} t(u_3, v_3) \exp[-i(u_3 x' + v_3 y')] du_3 dv_3 \\ &= \iint_{\Sigma} \exp[-i(u_3 x' + v_3 y')] du_3 dv_3 - \frac{\gamma}{2a} \\ &\quad \iint_{-\infty}^{+\infty} g(u_1, v_1) \star h(u_3, v_3) \exp[-i(u_3 x' + v_3 y')] du_3 dv_3, \end{aligned} \quad (11)$$

où Σ signifie la région intérieure du cliché mis en place dans le plan O_1 . L'intégrale donne facilement

$$T(x', y') = A(x', y') - \frac{\gamma}{2a} G(x', y') \cdot H(x', y') \quad (12)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} G(x', y') &= \iint_{-\infty}^{+\infty} g(u_3, v_3) \exp[-i(u_3 x' + v_3 y')] du_3 dv_3 \bigg/ \iint_{-\infty}^{+\infty} g(u_3, v_3) du_3 dv_3, \\ H(x', y') &= \iint_{-\infty}^{+\infty} h(u_3, v_3) \exp[-i(u_3 x' + v_3 y')] du_3 dv_3 \bigg/ \iint_{-\infty}^{+\infty} h(u_3, v_3) du_3 dv_3. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Par exemple, si le cliché est rectangulaire et si la largeur de chacun de ses côtés est $2u_0$ et $2v_0$, $A(x, y)$ devient

$$A(x', y') = \frac{\sin u_0 x'}{u_0 x'} \frac{\sin v_0 y'}{v_0 y'}. \quad (14)$$

Dans ces conditions, si l'on place un filtre d'amplitude dont la répartition de transmission d'amplitude est $F(x', y')$, le spectre obtenu à travers ce filtre est

$$T(x', y')F(x', y') = A(x', y')F(x', y') - \frac{\gamma}{2a} G(x', y')H(x', y')F(x', y'). \quad (15)$$

En mettant un objectif stigmatique derrière ce filtre, on obtient l'image du cliché dans le plan P' qui a les coordonnées (u_4, v_4) définies par

$$\begin{aligned} u_4 &= k\alpha_4 m_{34} U_4, & \alpha_4 &= L'/B', \\ v_4 &= k\alpha_4 m_{34} V_4, \end{aligned} \quad (16)$$

où (U_4, V_4) sont les coordonnées géométriques dans le plan P' , m_{34} le grossissement du restituteur et B' la distance entre S' et P' .

Or, on suppose que

$$H(x', y') > 0, \quad (17)$$

autrement dit, l'objectif en question (L dans la figure 1) ne cause ni annulation ni renversement du contraste dans l'image de la mire sinusoïdale pour la fréquence spatiale contribuant à la formation de l'image à restituer.

Dans ces conditions, si l'on choisit un filtre d'amplitude :

$$F(x', y') = \frac{1}{b} \frac{1}{H(x', y')}, \quad (18)$$

on déduit de (12)

$$T(x', y')F(x', y') = \frac{1}{b} \left(\frac{A(x', y')}{H(x', y')} - \frac{\gamma}{2a} G(x', y') \right),$$

où b est une constante due à la densité maximum du filtre. Puisque la largeur du cliché est suffisamment plus grande que la région de la distribution effective de $h(u_3, v_3)$ la région de la distribution de $A(x', y')$ est beaucoup plus étroite que celle de $H(x', y')$, donc $A(x', y')$, n'est pratiquement pas modifié par $H(x', y')$ sauf le bord du cliché :

$$T(x', y')F(x', y') = \frac{1}{b} [A(x', y') - \frac{\gamma}{2a} G(x', y')]. \quad (19)$$

A partir de là, on peut calculer la répartition d'amplitude de l'image dans le plan P' à l'aide de la transformation de Fourier :

$$\begin{aligned} t'(u_4, v_4) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} T(x', y')F(x', y') \exp[i(u_4 x' + v_4 y')] dx' dy' \\ &= c^{te} [1 - \frac{\gamma}{2a} g(u_4, v_4)]. \end{aligned} \quad (20)$$

La plaque photographique placée dans le plan P' enregistre la répartition de densité :

$$d'(u_4, v_4) = \gamma \log_{10} |t'(u_4, v_4)|^2, \quad (21)$$

et la répartition de la lumière obtenue en mettant cette plaque dans le faisceau lumineux est d'après (20) et (21)

$$\begin{aligned} g''(u_4, v_4) &= c^{te} [1 - (\gamma/2a)g(u_4, v_4)]^{-2\gamma'} \\ &= c^{te} [a + \gamma\gamma'g(u_4, v_4)] \end{aligned} \quad (22)$$

où γ' est le 'gamma' de cette plaque. Donc, si, l'on choisit $\gamma\gamma' = 1$, on peut obtenir une image dont la répartition d'intensités est exactement la même, au grossissement près, que dans l'objet original.

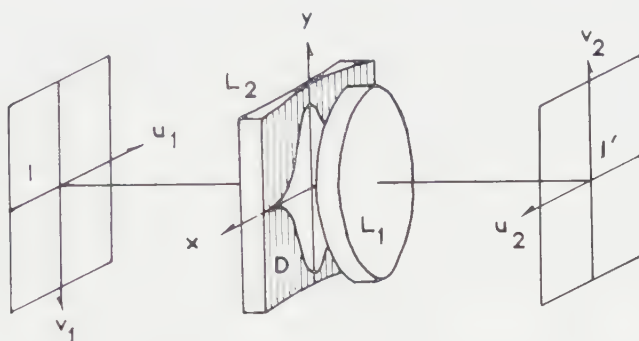


Figure 3. Système optique pour la préparation du cliché.

3. PRÉPARATION DU CLICHÉ

Dans notre expérience, nous avons choisi comme $H(x, y)$ une courbe de Gauss à une dimension, qui satisfait la condition (17). La transformée de Fourier $h(u_2, v_2)$ est aussi une courbe de Gauss et cette image est obtenue à l'aide de la méthode représentée dans la figure 3.

Un système optique muni d'un objectif L_1 , d'une lentille cylindrique L_2 et d'un diaphragme D forme l'image d'un texte I sur la couche sensible I' en prenant les coordonnées (u_1, v_1) dans le plan I , (x, y) dans le plan D et (u_2, v_2) dans le plan I' de la même façon que la figure 1. Le diaphragme D est limité par deux courbes de Gauss;

$$y = \pm \exp(-\pi x^2), \quad (23)$$

et la lentille cylindrique L_2 est placée de façon que sa génératrice soit parallèle à l'axe des y .



Figure 4. Imagerie géométrique du système de figure 3.

Si la puissance de la lentille cylindrique est grande, on peut traiter ce problème dans l'approximation de l'optique géométrique. On a donc montré l'imagerie géométrique dans la figure 4. Le plan I_1' est le plan de l'image formée par L_1 seul, et I_2' est le plan déplacé par L_2 . Une lentille cylindrique concave est utilisée dans notre système, alors I_2' se déplace en arrière de I_1' . Si l'on utilise un point lumineux comme objet, on obtient une image étendue le long de l'axe u_2 et sa

répartition d'intensité dans cette direction est proportionnelle, dans l'approximation de l'optique géométrique, à l'ouverture de D dans la direction de l'axe y au point X correspondant, c'est-à-dire que si l'on prend un point U_2 (en coordonnées géométriques) qui correspond à un point X dans le plan de la pupille, l'intensité de l'image $h(U_2)$ est proportionnelle à l'ouverture Y de la pupille. Donc, en désignant par B la distance entre L et I_1' et par δ celle comprise entre I_1' et I_2' , les équations suivantes sont valables ;

$$\left. \begin{aligned} h(U_2) &= cY \\ X &= U_2(B + \delta)/\delta, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

où c est une constante. Alors, d'après (1), (2), (23) et (24), on a finalement

$$h(u_2, v_2) = c' \exp \left[-\pi \left(\frac{B + \delta}{K\alpha_2 \delta L} \right)^2 u_2^2 \right],$$

où L est la valeur de Y lorsque $X = 0$ et c' une constante. En posant $-f_2$ la longueur focale de L_2 , on a

$$h(u_2, v_2) = c' \exp \left[-\pi \left(\frac{f_2}{KL^2} \right)^2 u_2^2 \right]. \quad (25)$$

Nous avons utilisé un objectif photographique $f_1 = 191$ mm (1:7,5) avec une lentille cylindrique achromatique par laquelle la longueur focale du système composé est de 218 mm, c'est-à-dire $f_2 = 1540$ mm.

Comme diaphragme, nous avons préparé une feuille de pellicule sur laquelle l'image de la courbe (23) est enregistrée, et nous avons découpé l'ouverture le long de cette image : la longueur de L mesurée comme ouverture effective de L_1 est 6,5 mm.

L'objet est un texte avec des caractères de diverses dimensions. Comme on l'a vu au chapitre 2, le contraste de l'objet doit être assez faible. Nous avons donc reproduit le texte original sur un papier photographique de très faible contraste et préparé deux textes de nouveau : la différence de densité sur chacun est 0,3 et 0,5 respectivement.

La couche sensible pour préparer le cliché de restitution doit être choisie dans les conditions suivantes :

1. sa granularité est assez faible,
2. sa couche sensible et son support sont les plus homogènes possibles,
- 3.† son 'gamma' n'est pas très grand.

Comme couche sensible qui satisfait pratiquement aux conditions cidessus, nous avons utilisé 'film positif' de Kodak. La figure 5 donne la courbe sensitométrique de cette pellicule avec le révélateur D76d (21°C, 4 min). Dans ces conditions, si la densité maximum est 1 et la fluctuation de densité du texte est 0,3, γ est 1 environ.

Nous avons ainsi obtenu le cliché, et nous l'avons immergé dans du phtalate de buthyle ($n = 1,49$) entre deux plaques de verre bien polies, afin d'éviter le déphasage de la surface d'onde à son passage à travers le cliché. Le déphasage du cliché immergé a été contrôlé à l'aide du microscope interférentiel [5], et on ne peut observer aucun déphasage mesurable.

† La nécessité de cette condition apparaîtra au chapitre 6,

4. RESTITUTEUR

Lors de la réalisation du restituteur, nous avons installé un très grand restituteur pour l'utiliser dans la région de basses fréquences spatiales afin de faciliter et de préciser la préparation du filtre d'amplitude et, en même temps, éviter l'influence de la transmission des fréquences spatiales dues à la couche sensible utilisée comme cliché.

Dans la figure 6, la source lumineuse S_0 (une lampe à mercure) éclaire la fente S placée parallèlement à l'axe y' avec un condenseur C et un filtre monochromatique E (5461 Å), et l'image de S est formée par un objectif O_1 dans le plan du filtre F . En arrière de O_1 on place le cliché P dont il a été question dans le chapitre 3. On obtient le spectre de ce qui est enregistré dans P sur le plan F . La distance entre O_1 et S est à peu près 10 m, et celle entre P et F est 7,26 m. On place un filtre d'amplitude dans le plan F et un objectif O_2 derrière F , qui forment une image restituée de P sur la plaque photographique P' avec le grossissement 1 environ.

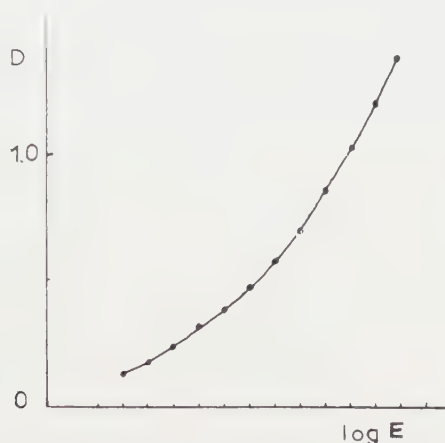


Figure 5. Courbe sensitométrique du 'film positif' de Kodak (D76d, 21°C, 4 min): l'unité de l'abscisse est 0,1.

Considérons un cliché pris par le système dont $h(u_2, v_2)$ est donné par (25). D'après (10) et (25) en prenant les coordonnées comme dans figure 2

$$h(u_3, v_3) = c' \exp \left[-\pi \left(\frac{f_2 \alpha_2}{KL^2 \alpha_3} \right)^2 u_3^2 \right],$$

on a donc

$$H(x', y') = \exp \left[-\frac{1}{4\pi} \left(\frac{KL^2 \alpha_3}{f_2 \alpha_2} \right)^2 x'^2 \right] \quad (26)$$

et

$$F(x', y') = \frac{1}{b} \exp \left[\frac{1}{4\pi} \left(\frac{KL^2 \alpha_3}{f_2 \alpha_2} \right)^2 x'^2 \right].$$

Cette équation peut s'exprimer en coordonnées géométriques (X' , Y') par (2) et (9). On obtient finalement

$$F(X', Y') = \frac{1}{b} \exp \left[\frac{1}{4\pi} \left(\frac{KL^2 B}{f_2 A'} \right)^2 X'^2 \right]. \quad (27)$$

5. PRÉPARATION DU FILTRE D'AMPLITUDE

5.1. Dispositif et procédé

L'équation (27) montre que la répartition de transmission d'amplitude du filtre est la réciproque d'une courbe de Gauss. Il est donc possible de le préparer par le procédé photographique à l'aide d'un dispositif ressemblant à celui utilisé pour la préparation du cliché (figure 7).

On a formé l'image d'une longue fente I sur la plaque photographique I' à l'aide du système optique constitué par un objectif L_1 , un diaphragme D et une lentille cylindrique L_3 dont la génératrice est parallèle à I . Dans ce dispositif,

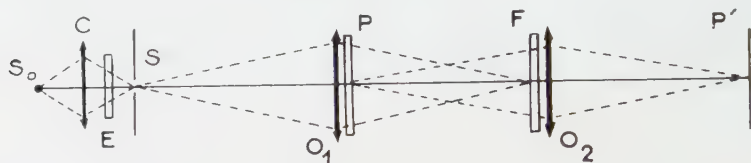


Figure 6. Système optique du restituteur.

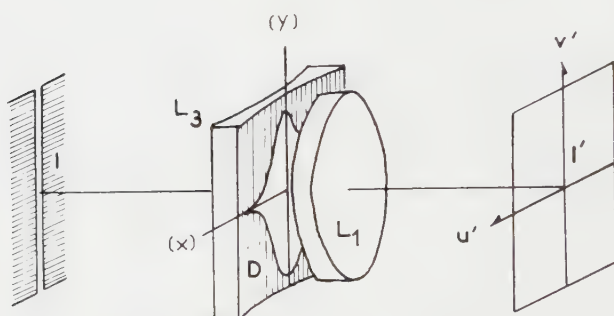


Figure 7. Système optique pour la préparation du filtre.

nous avons utilisé le même objectif L_1 et le même diaphragme D que pour la préparation du cliché, et l'ordonnée de (23) est prise parallèle à I . Soit $-f_3$ la longueur focale de la lentille cylindrique concave utilisée dans ce cas. On a alors la répartition des intensités dans le plan I' en prenant (u', v') de la même manière que (u_2, v_2) de la figure 1.

$$h'(u', v') = c' \exp \left[-\pi \left(\frac{f_3}{KL^2} \right)^2 u'^2 \right].$$

En considérant (1) et (2), on a, en coordonnées géométriques (U', V') ,

$$h'(U', V') = c' \exp \left[-\pi \left(\frac{f_3}{LB''} \right)^2 U'^2 \right] \quad (28)$$

où B'' est la distance entre I' et D .

Si une plaque photographique ayant γ'' enregistre cette image, sa répartition de densités est

$$D(U', V') = \gamma'' \log_{10} [h'(U', V')]$$

donc la transmission d'amplitudes due à cette plaque est donnée, d'après (28), par

$$F(U', V') = 1/[h'(U', V')]^{\gamma''/2} \\ = \left(\frac{1}{c'}\right)^{\gamma''/2} \exp \left[\pi \frac{\gamma''}{2} \left(\frac{f_3}{LB''} \right)^2 U'^2 \right].$$

Puisque ce filtre est placé comme filtre d'amplitude dans le plan (X', Y') on change les coordonnées comme suit :

$$F(X', Y') = \frac{1}{b} \exp \left[\pi \frac{\gamma''}{2} \left(\frac{f_3}{LB''} \right)^2 X'^2 \right] \text{ avec } b = (c')^{\gamma''/2}. \quad (29)$$

On a donc d'après (27) et (29)

$$f_3 = \frac{1}{\sqrt{(2\gamma'')}} \frac{KL^2BB''}{\pi f_2 A'}. \quad (30)$$

Nous allons calculer f_3 . Les données numériques dans (30) sont les suivantes :

(i) Sur la couche sensible, il est très difficile d'obtenir la linéarité de l'enregistrement pour toute la région de la fluctuation d'éclairement de l'image sans que la fluctuation soit assez petite. Nous avons utilisé comme couche sensible une plaque spécialement préparée dans ce but : une émulsion 'gaslight' de Guilleminot déposée sur une plaque de verre bien polie. Le résultat des mesures sensitométriques est indiqué dans la figure 8. On obtient alors $\gamma'' = 3$ pour la région $D = 1,5 \sim 0,4$.

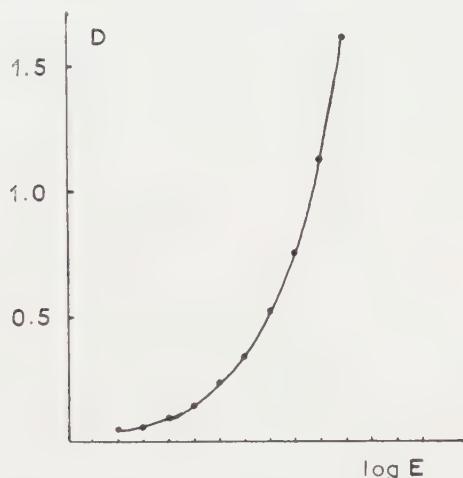


Figure 8. Courbe sensitométrique de l'émulsion 'gaslight' de Guilleminot (D76d, 21°C, 5 min): l'unité de l'abscisse est 0,1.

(ii) B : Quand nous avons préparé le cliché, nous avons préféré avoir $A = 700$ mm, c'est-à-dire $B = 262$ mm.

(iii) B'' : La distance entre la fente et le système est 3320 mm, on a donc $B'' = 202$ mm.

(iv) Divers: Comme on l'a vu dans ce qui précède, $k = 2\pi/\lambda$, $\lambda = 0,00055$ mm, $L = 6,5$ mm, $f_2 = 1540$ mm et $A' = 7260$ mm.

A partir de ces données, on peut calculer la longueur focale f_3 de la lentille cylindrique qu'on doit placer devant l'objectif; on obtient d'après (31)

$$f_3 = \frac{1}{\sqrt{(2.3)}} \frac{2\pi \cdot (6,5)^2 \cdot 262 \cdot 202}{\pi \cdot 0,00055 \cdot 1540 \cdot 7260} = 297 \text{ mm.}$$

Parmi les lentilles cylindriques que nous possédions, nous avons choisi une lentille dont la longueur focale était—336 mm comme la plus proche de f_3 calculé.

La largeur de la fente est à peu près 3mm, et celle de l'image géométrique devient 0,18 mm; son influence n'est pas gênante.

La prise de l'image de la fente a été faite en deux opérations: on a enregistré d'abord l'image de (28) donnée par le système montré dans la figure 7, et ensuite l'image d'une distribution uniforme fournie par le système constitué par L_1 , un diaphragme ayant une fente uniforme perpendiculaire à I au lieu de la courbe (23) et une lentille cylindrique ayant une très forte puissance au lieu de L_3 ses génératrices étant parallèles à I . Autrement dit, la distribution uniforme de la deuxième image coupe le pied de la courbe sensitométrique de la plaque. Chaque temps de pose est déterminé de façon que la densité du fond soit environ 0,3 et la différence entre le fond et le maximum environ 1,5.

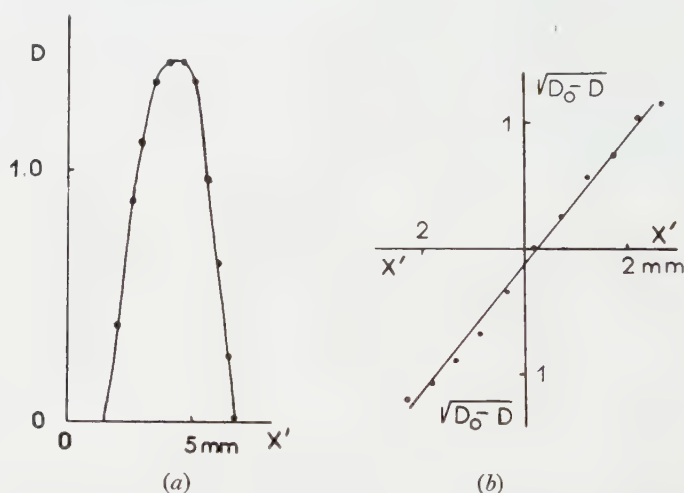


Figure 9. (a) Répartition de la densité du filtre mesurée par le microdensitomètre de Fabry-Buisson. (b) Détermination de Q d'après le résultat de (a).

5.2. Contrôle du filtre

(i) Répartition des densités. On a immergé la couche sensible entre une plaque de verre bien polie et le support de la couche, et mesuré la distribution des densités à l'aide du microdensitomètre de Fabry-Buisson dont l'angle solide du faisceau est très faible, car on doit utiliser ce filtre dans le faisceau parallèle et la densité effective dans ce cas est la densité en lumière parallèle. Le résultat est montré dans la figure 9 (a).

En effet, la transmission d'amplitudes dont on a besoin est donnée par (27); la répartition des densités est donc

$$D(X', Y') = D_0 - Q_0 X'^2 \quad (31)$$

avec

$$Q_0 = \frac{\log_{10} e}{2\pi} \left(\frac{KLB}{f_2 A'} \right)^2, \quad (32)$$

c'est-à-dire que la répartition des densités doit s'exprimer par une parabole (31). A l'aide des données numériques on obtient $Q_0 = 0,208$. Nous avons examiné la figure précise du filtre à l'aide de la figure 9 (b), et nous avons trouvé en mesurant la pente de la droite que la forme du filtre coïncide bien avec une parabole

$$\left. \begin{aligned} D(X', Y') &= D_0 - QX'^2, \\ D_0 &= 1,43, \\ Q &= 0,233. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

La différence entre Q et Q_0 peut être due à la différence entre la longueur focale de la lentille cylindrique utilisée et f_3 calculé, et aussi au procédé de développement de la plaque. Elle semble trop grande pour obtenir une restitution parfaite.

On peut envisager quelques procédés destinés à compenser cette différence. Certes, la réalisation d'une lentille cylindrique dont la longueur focale vaut exactement f_3 calculé sera la meilleure solution, mais la difficulté de sa réalisation nous a fait préférer une autre solution: nous avons essayé de faire coïncider Q_0 avec $Q = 0,233$ en modifiant les grandeurs qui interviennent dans l'équation (32). Parmi celles-ci, B est plus facile à modifier que A' dans notre grand restituteur. Nous avons donc la distance entre le système optique et la couche sensible au moment de la prise du cliché qui donne $Q_0 = 0,233$, d'après (32) et (33),

$$B = \frac{\lambda f_2 A'}{L} \sqrt{\left(\frac{Q}{2\pi \log_{10} e} \right)} = 276 \text{ mm}, \quad (34)$$

cette distance coïncide avec $A = 620$ mm.

(ii) Déphasage. Puisque la variation de densité de ce filtre est beaucoup plus grande que celle du cliché du texte, le microscope interférentiel n'est plus utilisable. Nous avons donc installé un dispositif décrit dans la figure 10.

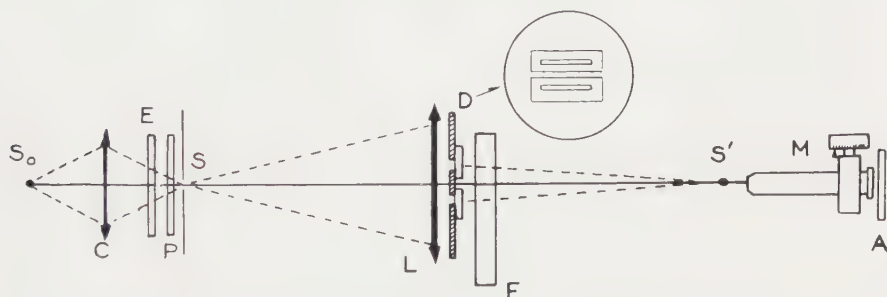


Figure 10. Dispositif pour mesurer le déphasage du filtre.

Le faisceau qui éclaire une fente S au moyen d'un condensateur C et d'un filtre monochromatique E est polarisé par un polaroïd P placé devant S , et un objectif L forme l'image de S en S' . Nous avons installé derrière L un diaphragme D qui a deux fentes, (de largeur $0,2$ mm) parallèles éloignées de $1,5$ mm environ, ces fentes sont parallèles à S , et contre chacune d'elles se trouve une lame demi-onde, les deux lames étant inclinées à 45° l'une par rapport à l'autre. Derrière D nous plaçons le filtre à contrôler: F , en mettant son axe Y' parallèle à la direction des fentes de D . Alors, nous pouvons observer les franges d'Young au voisinage de S' à l'aide d'un microscope M muni d'un analyseur A .

Pour mesurer le déphasage du filtre, nous mettons la partie noire du filtre contre une fente de D et nous observons les franges S' au moyen de M . Dans ce cas il est nécessaire de tourner A pour modifier la luminosité des deux faisceaux interférents. Ensuite nous avons déplacé le filtre dans la direction de l'axe X' et nous avons mesuré le déplacement des franges avec M en tournant A pour obtenir toujours le meilleur contraste des franges. S'il y a un déphasage dû au filtre on peut observer un déplacement des franges qui accompagne le déplacement du filtre. Dans notre dispositif, la distance entre D et S' est de 530 mm, la distance entre les deux fentes est de 1,5 mm, $\lambda = 0,00055$ mm, donc un déphasage de 1λ correspond à un déplacement des franges :

$$\frac{0,00055 \cdot 530}{1,5} = 0,195 \text{ mm.}$$

En utilisant un objectif de microscope de grossissement 2 et un micro-oculaire qui donne une précision de 0,01 mm on peut mesurer le déphasage au moins jusqu'à $1/20\lambda$.

Notre filtre immergé ne produit aucun déphasage mesurable par ce dispositif. Nous en concluons que le filtre obtenu n'exercera, par son déphasage, aucune influence sur l'image restituée.

6. RÉSULTAT DE LA RESTITUTION

Considérons d'abord l'effet, selon le caractère du filtre, de la restitution sur le spectre correspondant à $G(x', y') = 1$, c'est-à-dire sur la transmission des fréquences spatiales de l'objectif original,

Soit

$$D(X', Y') = D_0 - QX'^2$$

la répartition de densité du filtre préparé; on a la transmission d'amplitude :

$$F(x', y') = \begin{cases} \frac{1}{b} \exp(qL'^2 x'^2) & \text{pour } x' < x'_0 \\ = 1 & \text{pour } x' > x'_0 \end{cases} \quad (35)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} b &= 10^{D_0/2}, \\ q &= Q/2 \log_{10} e, \\ x'_0 &= \sqrt{\left(\frac{\log eb}{qL'^2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{D_0}{QL'^2}\right)}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Le spectre donné dans le plan du filtre est exprimé, dans ce cas, par

$$H(x', y') = \exp(-q_0 L'^2 x'^2) \quad (37)$$

avec

$$q_0 = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{KL^2}{f_2 \alpha_2 A'} \right)^2 = Q_0/2 \log_{10} e. \quad (38)$$

Donc, le spectre restitué devient

$$H_F(x', y') = \begin{cases} \exp[-(q_0 - q)L'^2 x'^2] & \text{pour } x' < x'_0, \\ = b \exp(-q_0 L'^2 x'^2) & \text{pour } x' > x'_0. \end{cases} \quad (39)$$

Comme on le voit dans ces équations, le spectre restitué est modifié considérablement par b et $q_0 - q$. Nous allons étudier l'effet de ces quantités sur l'image restituée.

1. b . D'après (36) et (39), on peut voir que b détermine la région de fréquence spatiale x_0' sur laquelle le filtre d'amplitude agit. En dehors de cette région, le spectre reste tel quel, mais la normalisation de $H(x', y')F(x', y')$ au point $x' = 0$ multiplie par b $H(x', y')$ dans $x' > x_0'$: autrement dit, la restitution est faite non seulement pour $x' < x_0'$ mais encore pour $x' > x_0'$ quoiqu'elle agisse de manière différente dans chacun des domaines. De toute façon, il semble que la restitution est d'autant plus efficace que b est plus grand. On rencontrera plus loin ce fait dans (42) et (43). Au point de vue pratique, une grande valeur de b signifie une grande densité du filtre, et cette grande densité est cause de la difficulté de préparation du filtre et aussi de la difficulté de l'observation visuelle de l'image restituée. Dans notre cas, $D_0 = 1,43$ donc $b = 5,2$.

2. q . La modification du spectre restitué est due à la différence entre q et q_0 . Trois cas sont à considérer en prenant b assez grand.

(i) $q = q_0$. $H_F(x', y')$ a la valeur 1 dans la région $x' < x_0'$, donc la restitution est parfaite dans cette région (figure 1).

(ii) $q < q_0$ (sous-restitution). Pour $x' < x_0'$, $H_F(x', y')$ reste encore une courbe de Gauss tandis que son coefficient devient plus petit que le coefficient initial, la restitution sera donc partiellement réussie (figure 11, 2).

(iii) $q > q_0$ (sur-restitution). Pour $x' < x_0'$, $H_F(x', y')$ n'est plus une courbe de Gauss, et on a un maximum pour la fréquence x_0' , (figure 11, 3). Donc $H_F(x', y')$ devient supérieur à 1 aux environs de x_0' , le spectre est sur-restitué.

Pour connaître le caractère de l'image restituée dans ces trois cas, il est utile de calculer la répartition d'intensité de l'image restituée d'un point du texte original. On peut calculer cette répartition à l'aide de la transformation de Fourier de (39). Afin de faciliter le calcul analytique et de connaître les phénomènes fondamentaux, nous écrirons (39) approximativement:

$$\begin{aligned} H_F(x', y') &= 1 - p \frac{x'^2}{x_0'^2} && \text{pour } |x'| \leq x_0' \\ &= (1 - p) \exp[-2q_0(x' - x_0')L'] && \text{pour } x' \geq x_0' \\ &= (1 - p) \exp[-2q_0(x' + x_0')L'] && \text{pour } x' \leq -x_0', \end{aligned} \quad (40)$$

où p est exprimé par

$$p \doteq \left(\frac{q_0 - q}{q} \right) \log_e b \quad \text{pour } |q_0 - q| \text{ petit.} \quad (41)$$

On a donc, à un facteur constant près, la répartition d'intensité:

$$\begin{aligned} h_F(u_4) &= \left| \int \int_{-\infty}^{+\infty} H_F(x', y') \exp[-i(u_4 x' + v_4 y')] dx' dy' \right|^2 \\ &= \left\{ \frac{\sin x_0' u_4}{x_0' u_4} + \frac{1}{2 \log_e b} \cos x_0' u_4 \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{x_0' u_4}{2 \log_e b} \right)^2} \right] \right. \\ &\quad \left. - p \left[\frac{1}{2 \log_e b} \right] \cos x_0' u_4 \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{x_0' u_4}{2 \log_e b} \right)^2} \right] + 2 \cos x_0' u_4 + \{ (x_0' u_4)^2 - 2 \} \frac{\sin x_0' u_4}{x_0' u_4} \right\}^2, \end{aligned} \quad (42)$$

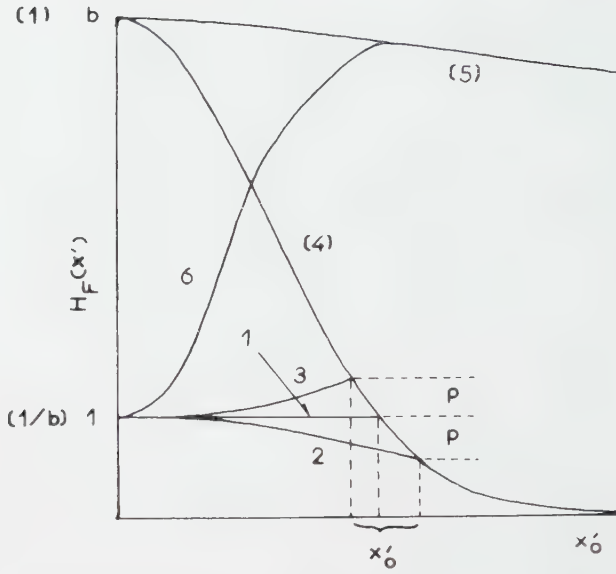


Figure 11. Restitution du spectre. (1) transmission[†] des fréquences spatiales restituées avec $q=q_0$, (2) transmission des fréquences spatiales restituées avec $q < q_0$, (3) transmission des fréquences spatiales restituées avec $q > q_0$, (4) transmission des fréquences spatiales non-restituées, (5) spectre non-filtré d'après le défaut dans le cliché. (6) spectre 5 filtré. Pour les courbes (4) et (5), l'ordonnée est donnée entre parenthèses.

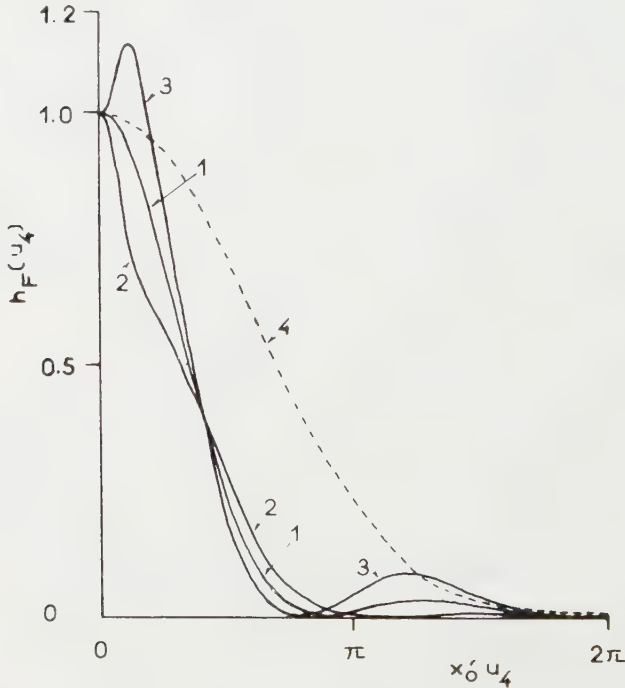


Figure 12. Restitution de l'image d'un point dans le cas où $b=5,2$, $q=0,27$ avec (1) $q_0=0,27$, (2) $q_0=0,32$, (3) $q_0=0,22$, et l'image originale (4) $q_0=0,27$.

Les résultats, pour trois cas correspondant à $q_0 - q = 0$, $q_0 - q = 0,05$, et $q_0 - q = -0,05$ sont représentés sur la figure 12 par trois courbes 1, 2 et 3 respectivement ($b = 5,2$ et $q = 0,27$), et la courbe 4 exprime l'image originale :

$$h(u_4) = \exp \left[- \frac{(x_0' u_4)^2}{4 \log_e b} \right], \quad (43)$$

Il s'en suit que la distribution de (42) devient plus concentrée que (43), à mesure que b devient plus grand : autrement dit, l'effet de restitution est d'autant plus grand que b est plus grand. On peut aussi trouver une structure périodique remarquable dans l'image surrestituée tandis que l'effet de restitution est plus grand que $q = q_0$. Cette structure devient meilleure, comme on peut le voir d'après (42), quand p devient plus petit ($p < 0$), et elle donne naissance à une image parasite autour de l'image, c'est-à-dire une image bordée par les franges causées par cette structure. Au cas où $q_0 - q = 0$, il y a encore une structure périodique faible dont l'influence sur l'image finale n'est pas grande. Au contraire, dans l'image sous-restituée, la structure périodique va disparaître tandis que la restitution devient faible.

3. L' . Une autre condition qui régit l'effet de restitution est L' : dimension réelle du filtre d'amplitude. Lors de la prise du cliché en éclairage incohérent, la limite des fréquences spatiales qui traversent l'objectif est $x = 2$ [6]. D'un autre côté, la formation des images dans le restituteur est faite en éclairage cohérent, donc la limite des fréquences spatiales est $x' = 1$. Par conséquent, pour laisser passer toutes les fréquences spatiales enregistrées dans le cliché, on doit avoir un filtre qui laisse passer les fréquences jusqu'à $x = 2$. Donc, d'après (2), (9) et (10), on a :

$$\frac{L' x'}{A'} = \frac{L x}{B}, \quad (44)$$

en posant $x = 2$ et $x' = 1$, on obtient

$$L' = \frac{2A'}{B} L \div 360 \text{ mm.}$$

Mais la difficulté de réalisation oblige à limiter la dimension. Mais il n'y a pas de besoin d'utiliser cette grande dimension puisque le spectre effectivement restitué est, comme on l'a vu dans ce qui précède, limité dans la région étroite. Dans notre expérience, L' est de 25 mm ce qui est beaucoup plus grand que

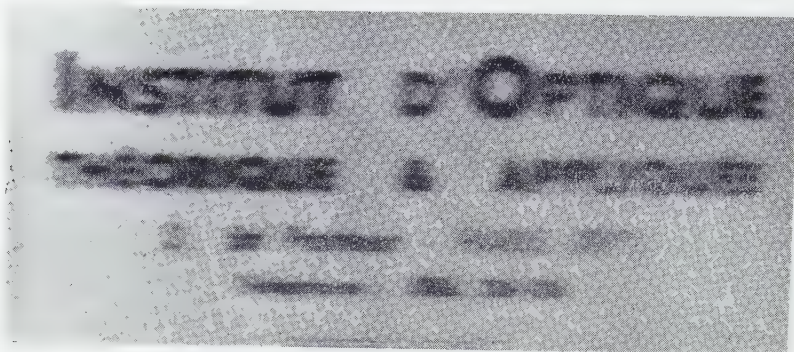
$$L' x_0' = \sqrt{\left(\frac{\log_e b}{q} \right)} \div 2,5 \text{ mm}$$

et le spectre restitué devient au bord du filtre

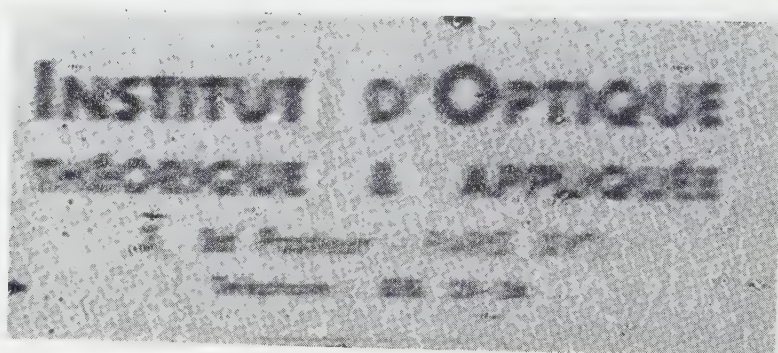
$$H_F(1, y) = b \exp(-q L'^2) \div 1 \times 10^{-73}$$

donc pour $x' > 1$ le spectre ne contribue pas à la formation de l'image restituée. La dimension du cliché est alors suffisante dans notre cas.

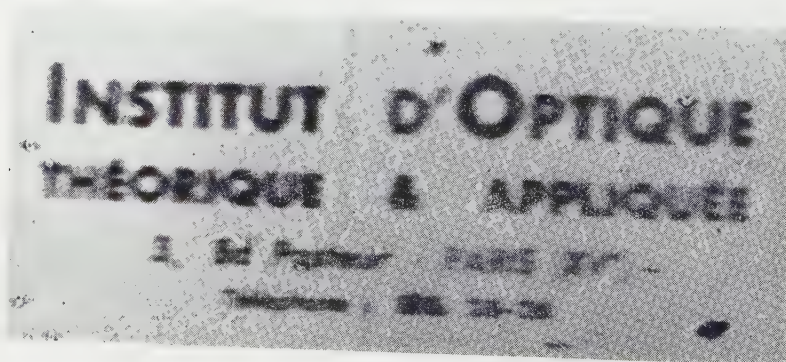
Dans la figure 13, nous avons montré les résultats obtenus par cette méthode. (a) est l'image obtenue sans filtre dans le restituteur, c'est-à-dire l'image originale. Les caractères situés dans la partie gauche correspondent à une image dont la fluctuation de densité par rapport au texte original est de 0,5 ; ceux qui sont situés à droite correspondent à une fluctuation de 0,3. Comme on l'a vu dans ce qui



(a)



(b)



(c)

Figure 13. Résultat de la restitution. (a) image originale ($q_0=0,27$), (b) image restituée ($q_0=0,24$ et $q=0,27$), et (c) image restituée ($q_0=q=0,27$).

précède, deux clichés sont préparés: l'un est pris pour $A = 700$ mm et $q_0 = 0,24$ (d'après (32) et (38)) ce qui est plus petit que $q = 0,27$, valeur mesurée sur le filtre préparé (d'après (33) et (36)), et l'autre est pris pour $A = 600$ mm et son q_0 doit bien coïncider avec $q = 0,27$. (b) est l'image restituée du premier cliché ci-dessus où $q_0 < q$; l'image est bien restituée et son contraste est augmenté, mais on peut reconnaître un bord blanc autour de l'image, c'est une image parasite due à sa sur-restitution. (c) est l'image restituée du deuxième cliché où $q_0 = q$, l'image parasite devient plus faible que dans (b) et l'effet de restitution est remarquable.

Dans ces images, on peut voir que l'effet de restitution est meilleur pour l'objet dont le contraste est le plus faible. Si le contraste de l'objet n'est pas pas faible, la condition exprimée dans (8) n'est plus valable et l'influence du γ du cliché peut agir sur le spectre, par conséquent le filtre préparé d'après la condition (8) ne donne plus de restitution parfaite. Ce phénomène peut se produire dans le cas où on utiliserait une émulsion avec un haut γ . Dans ce cas, l'image a tendance à renforcer la pente douce de sa répartition d'intensité, donc, dans le spectre, q_0 devient plus petit et il peut provoquer la surrestitution en utilisant le filtre d'après (8). En fait, nous avons obtenu une image fortement sur-restituée en utilisant une émulsion de $\gamma \div 4$ dans les mêmes conditions numériques que pour l'autre. C'est pourquoi nous avons choisi 'gamma' faible.

Dans ces images restituées, un petit défaut du cliché ou la granularité devient plus important que dans l'image originale. Ce phénomène peut être expliqué comme suit: un défaut du cliché (une poussière, un petit trou dans la couche sensible, une bulle du liquide d'immersion, le grain d'argent, etc.) n'a aucune influence sur l'aberration de l'objectif au moment de la prise de la photographie. Alors, le spectre causé par ce défaut est celui de l'objectif stigmatique (figure 11, 5) et le spectre restitué devient comme 6 dans la figure 11. Donc, le contraste de l'image de ce défaut augmente [3], et il se peut qu'on ait en même temps une image parasite provoquée par le phénomène de la sur-restitution. Par conséquent, le défaut et la granularité deviennent très importants.

Il y a une autre possibilité d'avoir une image parasite autour de l'image du défaut. C'est l'effet du contraste de phase dû au petit déphasage causé par le défaut ou par la granularité, on ne pourrait quand même pas le trouver en mesurant le déphasage [7]. Une partie de l'augmentation du contraste du défaut ou de la granularité est probablement due à cet effet.

Dans la figure 14, on montre un autre exemple de l'image restituée.

7. CONCLUSION

Nous avons étudié la restitution des images aberrantes par la méthode du filtrage des fréquences spatiales. Dans ce travail, nous avons traité le cas le plus simple d'aberration, c'est-à-dire celui où la transmission des fréquences spatiales du système est une courbe de Gauss à une dimension, et nous avons obtenu une image remarquablement restituée par un filtre d'amplitude préparé par un procédé photographique.

La difficulté de cette méthode est la préparation du cliché en évitant les défauts qui causent l'image parasite; on doit préparer le cliché le plus soigneusement possible. L'autre difficulté est la préparation du filtre d'amplitude. Peut-être, au point de vue pratique, la chose la plus importante est-elle de trouver une méthode pour préparer le filtre correspondant au caractère de l'image donnée.

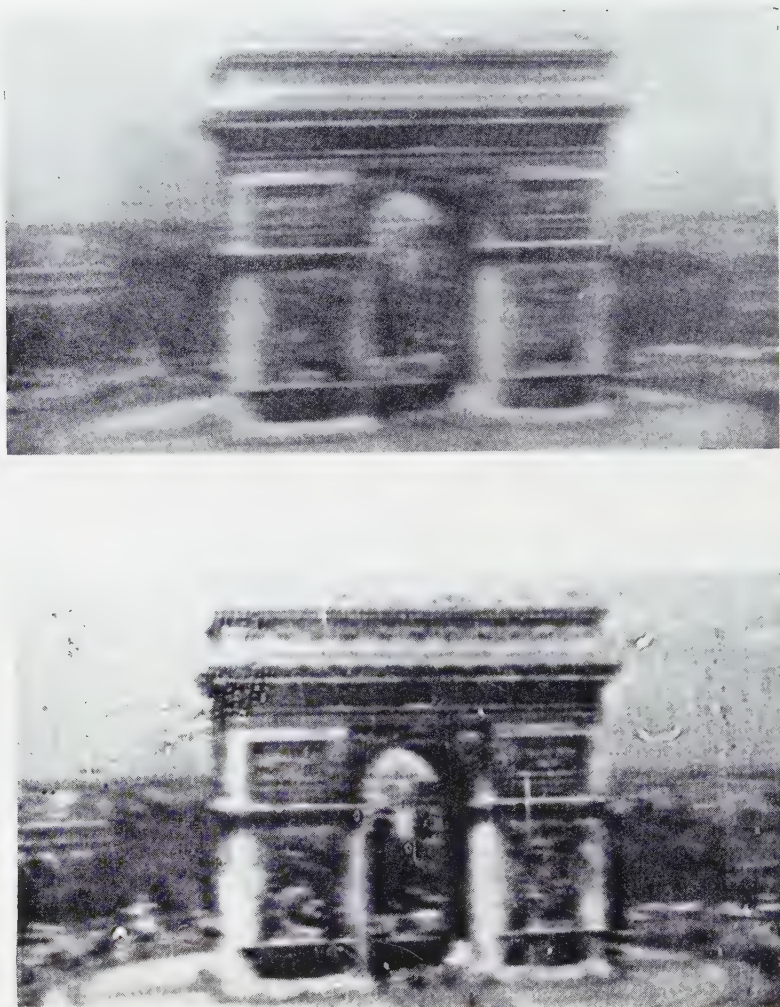


Figure 14. Images originale et restituée.

D'un autre côté, au point de vue théorique, le plus important est qu'aucune information de la distribution de fréquence spatiale ne soit perdue dans l'image à restituer. Pour satisfaire cette condition, la transmission des fréquences spatiales du système donnant l'image à restituer doit rester toujours positive au moins dans la région des fréquences spatiales constituant le détail nécessaire de l'image. On sait que la valeur négative de la transmission des fréquences spatiales peut être restituée par une lame déphasant de $\lambda/2$ [1], tandis qu'il n'y a rien pour la valeur zéro. Si le but de la restitution est d'améliorer la qualité d'un objectif aberrant, un filtre compensant l'aberration [8] sera utile car la transmission des fréquences spatiales avec ce filtre reste toujours positive. Ce problème sera étudié dans le rapport suivant.

Cette étude a été faite sous la direction de Mr. A. Maréchal à l'Institut d'Optique avec l'aide d'une Bourse de Coopération Technique du Gouvernement

Français. J'exprime ma profonde gratitude à Mr. A. Maréchal et au Gouvernement Français.

Je remercie également Mr. le Directeur de l'Institut d'Optique qui m'a autorisé à y faire ce travail, et les chercheurs de l'Institut d'Optique qui m'ont aidé de leurs nombreux conseils.

The improvement of the image damaged by the aberration of the objective is studied by using the method of spatial frequency filtering, and an experiment for the image given by an objective whose response function is a Gaussian curve of one dimension is shown.

Ein durch Aberrationen mangelhaftes Bild läßt sich durch eine Filterung der Ortsfrequenzen verbessern. Als Beispiel wird ein Bild gezeigt, das ursprünglich von einem Objektiv entworfen wurde, dessen Kontrast-Übertragungsfunktion die Form einer einseitigen Gaußkurve hat.

RÉFÉRENCES

- [1] CROCE, P., 1956, Thèse, Paris; *Rev. Opt. (théor. instrum.)*, **35**, 569, 642.
- [2] MARECHAL, A., et CROCE, P., 1953, *C.R. Acad. Sci., Paris*, **237**, 607.
- [3] MARECHAL, A., CROCE, P., et DIETZEL, K., 1958, *Opt. Acta*, **5**, numéro spécial, 256.
- [4] O'NEILL, E. L., 1956, I.R.E. Trans. Prof. Group on Infor. Theory IT-2, 56.
- [5] FRANÇON, M., 1954, *Le Microscope à Contraste de Phase et le Microscope Interférentiel*, ed. C. N. R. S. (Paris), p. 131.
- [6] HOPKINS, H. H., 1953, *Proc. roy. Soc. A*, **217**, 408.
- [7] FRANÇON, M., 1946, *Rev. Opt. (théor. instrum.)*, **25**, 257.
- [8] TSUJIUCHI, J., 1958, *Rev. Opt. (théor. instrum.)*, **37**, 1.

A monochromator for the vacuum ultra-violet

by L. D. ISAACS, W. C. PRICE and R. G. RIDLEY†

Wheatstone Laboratory, King's College, London

(Received 13 November 1959)

The design and construction of a vacuum ultra-violet monochromator suitable for photo-electric spectrophotometry and photo-ionization studies at short wavelengths is described. It incorporates a device for moving the exit slit along the beam to keep the spectrum in focus as the grating is rotated. The tank is divided transversely into two sections for permitting easy adjustment or interchange of gratings without disturbing the driving mechanism. An elaborate system of baffles is used to reduce scattered radiation to a very low value. A variety of attachments fit on to the exit slit for the examination of solid, liquid or gaseous samples and for photoelectric or photo-ionization measurements.

1. INTRODUCTION

The need for quantitative data on oscillator strengths of absorption bands [1] occurring in the vacuum ultra-violet and the growing importance of direct photo-ionization measurements [2, 3] calls for a simple and efficient monochromator for the further study of this region. Such a monochromator should cover the region 500–3000 Å with a resolution of at least 1 Å. Because of the low reflectivities of surfaces at short wavelengths it is desirable that the spectrum be produced and focused by a single surface and thus the use of a concave grating is virtually a necessity. This involves special devices for keeping the spectrum in focus as it is scanned across the exit slit. Another important requirement is that the spectrum produced should be as free as possible from scattered light which is a serious factor in accurate absorption measurement in this region because of the relatively large amount of long wavelength radiation emitted by most light sources.

2. DESIGN CONSIDERATIONS

Several methods have been used for wavelength scanning in concave grating vacuum monochromators. In the first method [4, 5] the grating is mounted on an arm pivoting about the centre of the Rowland circle. While this gives perfect focusing the inclination of the exit beam changes with wavelength. For example, with a 1 m, 15 000 lines/in. grating the exit beam moves through 2° in scanning from 2000–1000 Å. This introduces some difficulty when attachments (e.g. double-beam systems [6]) are placed behind the exit slit. The arrangement also requires considerable mechanical precision to yield the necessary reproducibility of wavelength. A modification of this radius mounting has recently been described by Clarke and Garton [23]. In this the grating is rotated about a fixed axis by the sideways motion of the centre of the Rowland circle to which it is attached by a radius arm. Both the entrance and exit slits which are also attached by radius arms move along lines directed at the grating centre.

† Present address: A.W.R.E., Aldermaston, Berks.

In the second method for wavelength scanning the grating is simultaneously rotated about a vertical line bisecting the slits [7, 8, 9]. Depending on the design, approximate or complete focusing is possible but again considerable mechanical precision is required and interchange of gratings is difficult. The most popular method has been the simple rotation of the grating with no translation [10, 11, 12, 13]. This gives a focusing error due to the rotation of the Rowland circle about a point on its edge.

Johnson [14] and Onaka [15] describe a mounting in which the grating is rotated about a point displaced from its centre which affords certain compensation for the defocusing arising from the departure from the Rowland circle when the rotation is about its centre. Two other instruments employ the movement of exit slit and detectors along the Rowland circle [16, 17]. For absorption work this means that the material would have to be placed in front of the entrance slit which is undesirable particularly from the point of view of photo-decomposition though it does avoid difficulties arising from the fluorescence of the sample. In order to retain the advantage of constant angles of incidence and emergence, scanning by rotation about the centre of the grating was adopted in the present instrument. A very high degree of compensation for departure from the Rowland circle was found to be possible by arranging for the position of the exit slit to be adjusted along the beam. While it is possible to couple this motion to the rotation of the grating we have found that manual settings of the exit slit position are adequate to give good compensation over spectral ranges of several hundred ångströms for each setting and direct coupling has so far proved unnecessary.

The theoretical movement of the exit slit required for refocus is given by Sawyer [18] and is shown in figure 1. With the direct image in focus the exit slit movement at 3000 Å is 0.82 cm.

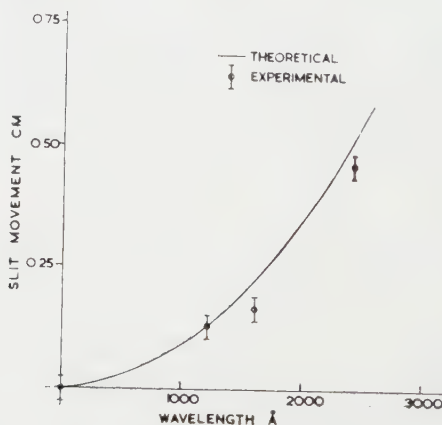


Figure 1. Movement of exit slit required for refocus.

3. OPTICAL LAYOUT

The optical layout of the monochromator is shown in figure 2. The two slit turrets are mounted on a rigid brass end plate E and the grating G is supported at the end of a cantilever system of $1\frac{1}{2}$ in. angle iron screwed to the back of this plate. The slit separation was fixed at 5 in. to keep the volume of the system low and to give adequate space for the source and detector attachments. The various

scatter shields B are positioned in a similar fashion to those in the Baird monochromator [4] except that no allowance is made here to use the instrument for photographic recording. The apertures were designed just to clear the exit beam. The increase in scatter due to wall reflections is important if allowance is made for a considerable wavelength range to be covered photographically.

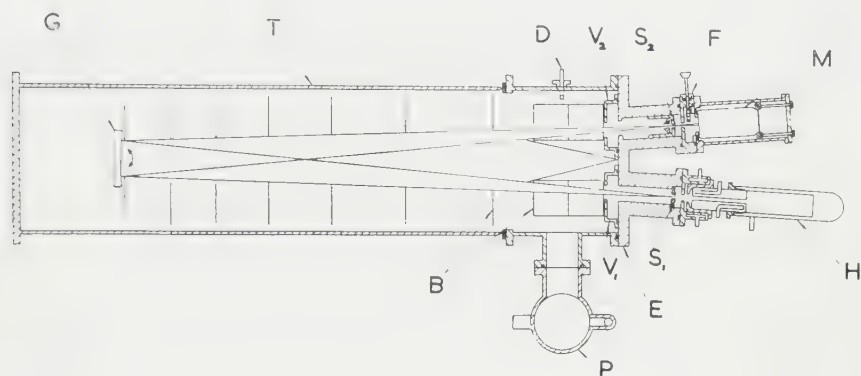


Figure 2. Layout of the monochromator. E, endplate, T, tube; P, pump connection and baffle valve; G, grating; B, scatter shields; V_1V_2 , vacuum taps; S_1S_2 , slits; D, wavelength drive; H, discharge tube; F, filter holder; M, photomultiplier.

The cantilever is surrounded with a 10 in. diameter brass tube ($\frac{1}{8}$ in. wall) T. This is made in two sections. The first, 8 in. long, is bolted semi-permanently to the end plate with an O-ring seal and is used for the pump connection P and the wavelength drive vacuum seal D. The remaining 40 in. of the tube is closed at one end and chamfered at the other to seal with a flat rubber gasket on to a flange on the shorter section. When attention to the grating is required the longer tube may be slid back along rails on the bench. A small wheel is mounted on the end of the cantilever to run along the inside of the tube and maintain the height of the grating centre constant.

4. SLIT TURRETS

The two slit turrets are inclined to point at the grating centre and the O-ring flanges are standardized for use with a variety of source and detector arrangements. The jaws of the entrance slit are cut from razor blades and are preset for width, adjustment being possible down to 0.01 mm. For 1 Å resolution equal slits of 0.05 mm are used. The whole slit assembly may be rotated to bring the slit perpendicular to the line joining the slit centres. The exit slit turret is shown in figure 3. The exit slit mount M is similar to the entrance slit but the mount forms one end of a duralumin tube D which is a sliding fit in the bored-out slit turret. The 45° hardened steel wedge W on the slide is sprung back against the end of the 0.1 in. micrometer head H. Adjustment of the micrometer through the O-ring vacuum seal gives approximately 0.4 in. motion of the slit along the exit beam of the monochromator. The slit width is adjusted and the slit set parallel to the entrance slit, before assembly of the source and detector.

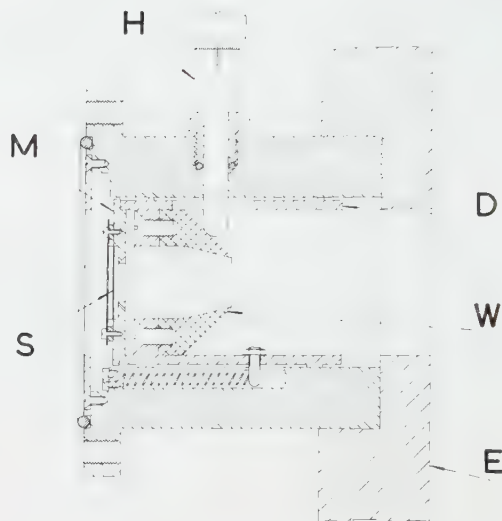


Figure 3. Exit slit turret. E, endplate; D, duralumin slide; W, steel wedge; M, exit slit mount; S, exit slit; H, micrometer.

5. GRATING MOUNT AND DRIVE

The grating is supported vertically on a horizontal rotating table. The table is attached to a shaft carried on two journal ball bearings mounted $1\frac{1}{2}$ in. apart in a casing screwed to the underside of a horizontal plate. The bearings are degreased and lubricated with molybdenum disulphide in silicone grease. The individual grating mounts are machined to set the grating axis along the shaft axis. The bearing plate stands on a second plate with three levelling screws fitting in a hole, groove and flat, giving adjustment of the orientation of the shaft and grating axis. The lower plate slides in slots along the cantilever for adjustment of the grating distance from the slits. Provision is made to rotate the grating mount in the plane of the grating to set the grating lines parallel to the slits. The grating position is finally set up by focusing the central image with the slits set at equal distances from the grating.

The driving arm extends about 80 cm from the bottom of the shaft, via a phosphor-bronze spring clutch, to the drive unit nut on the lead screw which is mounted on the cantilever. For lightness and rigidity the arm was machined from $1\frac{1}{2}$ in. 'T' section duralumin. The connection to the clutch is made with a flat strip of beryllium copper to allow for adjustment of the shaft position. At the lead screw end the arm is supported on a small ball bearing running on a steel flat. The $\frac{3}{4}$ in. steel lead screw is $4\frac{1}{2}$ in. long and has 40 threads per inch. It is supported in two ball bearings and one end with a ball set in it is sprung against a tungsten flat. The phosphor bronze nut is $\frac{3}{4}$ in. long and is stopped from rotating by a 1 in. long arm spring against a guide bar. The end pin on the drive arm is sprung against a pin on the nut, the spring being arranged to extend 25 in. down the length of the cantilever. A polished steel shaft, $\frac{1}{4}$ in. diameter, passes through an O-ring vacuum seal and is coupled to the lead screw and the gearbox drive with

flexible couplings. Drive is provided by a 1 r.p.m. reversible Synclock synchronous motor connected through interchangeable spur gears to the drive shaft. Ratios of 5/1, 3/1, 2/1, 1/1 are provided giving approximately 5–25 Å per minute scanning rate with a 15 000 lines/in. grating. A fast scanning rate of 333 Å per minute is also obtained from a more powerful 10 r.p.m. reversible Parvalux motor which is engaged easily using dog tooth, splined gears. Fast or slow drives are selected by a push rod on the front panel of the gear box. The drive shaft is coupled to a Veeder rev. counter and calibration marks are obtained every 25 Å from a microswitch operated by a cam on the main drive shaft. Two microswitches operated from a worm and wheel prevent over-running at either end of the lead screw.

6. SCATTER SHIELDS

The various shields were cut from $\frac{1}{32}$ in. duralumin sheet. The six plates nearest the slits are mounted in a rigid box together with the V-shaped shield designed to trap the direct image. The box can be removed to give access to the end plate or the lead screw. The six screens down the length of the tube are mounted on 'hoops' threaded on the four cantilever arms. The positions are such that the first and higher order spectra are trapped by multiple reflection between the screens and the wall of the tube. Apart from a $\frac{1}{2}$ in. gap around the outside of each screen the only light path is through the rectangular slot in the centre. The slots were cut to just allow the main beam to pass through. All the screens and the interior of the main tube were sprayed a matt black.

7. VACUUM DESIGN

The spectrometer is pumped with an 03B diffusion pump using silicone oil and a Speedivac 2S50 backing pump. A disc valve over the diffusion pump allows this to be by-passed when required. An isolating tap is situated between each turret and the main tube. An O-ring sealing plate is slid over the light aperture by means of a lever operated through an O-ring seal. Light pressure from a phosphor-bronze spring is sufficient to make the seal which is assisted by the atmosphere. At the intermediate positions of the taps the sealing plates act very effectively as shutters and they are used to protect the grating surface from the discharge when not recording. With hydrogen continuously flowing through the source, the pressure in the main tube is kept at 15μ Hg.

8. SOURCE AND DETECTOR

The source is a hydrogen discharge tube with a water cooled, platinized, quartz capillary 4 mm internal diameter and 10 cm long [5]. The electrodes are aluminium tubes sealed to the quartz cooling jacket with black wax. The pyrex envelope over the cathode is cooled with a small air blower. A needle valve and a drawn out capillary on the inlet system are used to adjust the hydrogen flow rate which is monitored on the vacuum side with a 'Rotameter' flow gauge. The discharge is operated from a d.c. power supply giving 200 mA at 650 volts. Barretters are used to maintain the current constant.

Various other sources, including the high frequency discharge in the rare gases [19, 20] are under investigation at present.

The detectors which have been used are the 13-stage, E.M.I. photomultipliers No. 9502 (Kodial) and No. 6255 (Quartz) which are of the end-on type. To sensitize them for short wavelengths a thin, uniform film of sodium salicylate is produced by the evaporation of a methyl alcohol solution on the window of the multiplier. The tube is mounted end-on to the exit beam and the vacuum seal is made with an O-ring sealing against the window.

The collector current from the photomultiplier passes to earth through a load resistor variable in steps from 1 k Ω to 10 m Ω . The output voltage is taken through a cathode follower to a 10 mv Brown Electronik Recorder. Various units may be attached between the detector housing and the exit slit turret. For the measurement of scattered light a filter holder with three positions is used giving the clear through beam, a thin quartz filter transmitting to 1500 Å or a mica filter transmitting to 3000 Å.

9. PERFORMANCE

If the central image is focused with the lead screw nut at one extreme, the present lead screw gives a maximum wavelength of 2300 Å. As 700 Å is the shortest wavelength normally required, it is possible to use the clutch, after preliminary focusing, to set the wavelength range at 600 Å to 2900 Å. This gives a useful overlap into the quartz ultra-violet.

The calibration of the exit slit focus control is made using the hydrogen emission line spectrum in the first and second order. Repeated scans are taken at 5 Å per minute through two closely spaced lines with the focus control altered in steps of 0.005 in. The most critical setting is found by plotting the intensity of a line, above its adjacent minimum, against the reading of the micrometer. The accuracy of this method is approximately ± 0.01 in. with 1 Å resolution. The experimental points are shown in figure 1, the points lying satisfactorily close to the theoretical curve. With both slits set at 0.054 mm. and a theoretical resolution of 0.91 Å, the measured line half widths were found to be 1.0 Å.

To convert the rev. counter scale into wavelengths a linear approximation is assumed using two chosen wavelength standards and the correction curve is then computed for the other wavelengths. The hydrogen emission line 1215.66 Å in first and second order is ideal for wavelength calibration purposes (figure 4). The deviation from the linear approximation is less than 0.34 Å between the direct image and 2600 Å. There is, therefore, little difficulty in measuring wavelengths to 0.1 Å with the monochromator.

The percentage scattered light was measured for various grating arrangements. As hydrogen is opaque below 850 Å the signal obtained at 700 Å is due to scattered radiation. The scatter at other wavelengths was found by inserting a filter with zero transmission at that wavelength. A correction was made for the transmission of the filter to scatter by inserting the filter in the beam at 700 Å.

Initially a 15 000 lines/in. grating ruled on glass was tried with no surface coating. The values of the percentage scatter are shown for several wavelengths in the table. Considerable improvement was found when this grating was aluminized following the recommendation of Haas *et al.* [21]. The evaporation time was kept as short as possible; approximately 2 sec. The results may be compared with those of Watanabe [3] who used a similar source and similar resolution (1 Å).

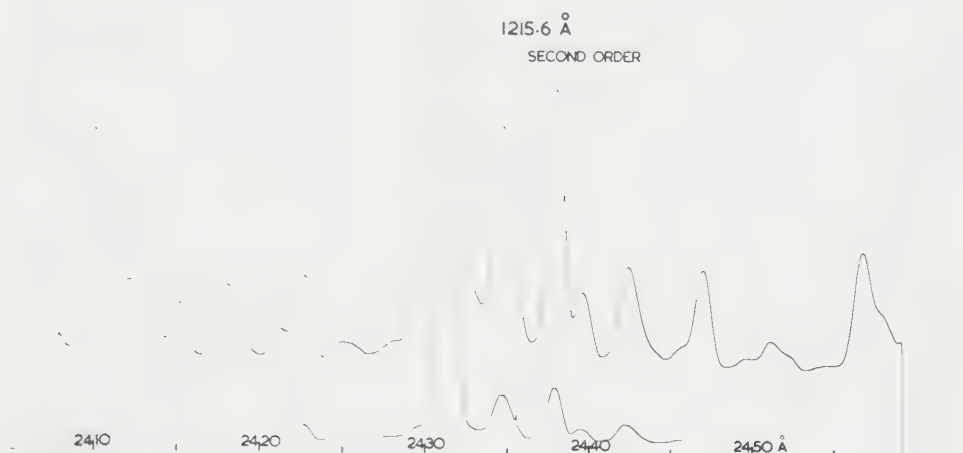


Figure 4. Hydrogen emission spectrum. First-order continuum with second-order line spectrum superimposed.

Wavelength (Å)	Percentage scatter			
	Gratings used with this monochromator			Watanabe measurements [3]
	Cleaned glass	aluminized glass	aluminized replica (Bausch and Lomb)	
1608	0.66	0.013	0.03	—
1444	1.8	0.098	0.16	0.8
1336	2.0	0.28	0.49	1.1
1216	0.16	0.031	0.07	0.2
1151	2.8	0.70	1.3	1.4

Scattered light measurements.

Finally, a Bausch and Lomb 15 000 lines/in. aluminized replica grating, blazed for 1400 Å, was tried. The scatter measurements on this grating are included in the table. As the surface scatter signal from the glass grating was reduced on aluminizing the observed percentage scatter is decreased more than might be expected from the differing reflectivity of glass and aluminium [21, 22]. The slight superiority of the aluminized glass grating over the Bausch and Lomb grating may be due to the evaporation technique or the 'ageing effect'.

The favourable comparison of these measurements with Watanabe's results and those reported elsewhere [5, 8, 12] is a good test of the efficiency of the baffle system. The monochromator has been in active use with the aluminized glass grating for more than two years with no noticeable loss of efficiency. Reports of photo-ionization measurements have been published elsewhere [24].

ACKNOWLEDGMENTS

We wish to thank Mr. P. Heaver for the excellent workmanship shown in the construction of the monochromator and Messrs. S. Guttman and H. Lempke for technical assistance. Our thanks are also due to the Royal Society, the Central Research Fund of the University of London, the Department of Scientific and Industrial Research and the Hydrocarbon Research Group of the Institute of Petroleum for financial support.

On décrit le principe et la construction d'un monochromateur pour l'ultraviolet à vide destiné aux études de spectrophotométrie photoélectrique et de photo-ionisation aux courtes longueurs d'onde. Il comprend un système permettant de déplacer la fente de sortie le long du faisceau afin de conserver la mise au point lorsque le réseau tourne. La cuve est divisée transversalement en deux parties afin de faciliter la mise au point et de permettre l'échange des réseaux sans que cela perturbe le mécanisme d'entraînement. Un système compliqué de chicanes sert à obtenir un très faible taux de lumière parasite. Divers accessoires peuvent être associés à la fente de sortie afin de permettre l'examen d'échantillons solides, liquides ou gazeux ainsi que des mesures photoélectriques ou de photo-ionisation.

Aufbau und Konstruktion eines Ultraviolett-Vakuum-Monochromators werden beschrieben, der für elektrische Spektralphotometrie und für Untersuchungen der Photoionisation bei kurzen Wellenlängen bestimmt ist. Er besitzt eine Einrichtung, um den Austrittsspalt zur Fokussierung längs des Strahles zu verschieben, wenn das Gitter gedreht wird. Das Gehäuse ist quer in zwei Abteilungen geteilt, um das Justieren zu erleichtern oder um das Gitter ohne Störung des Antriebsmechanismus auszuwechseln. Ein ausgeklügeltes Blendensystem dient dazu, die gestreute Strahlung auf einen sehr niedrigen Betrag herunterzudrücken. Eine Anzahl von Zusätzen am Austrittsspalt erlaubt die Untersuchung von festen, flüssigen und gasförmigen Proben und die Messung des Photostroms oder der Photoionisation.

REFERENCES

- [1] INN, E. C. Y., 1955, *Spectrochim. Acta.*, **7**, 65.
- [2] PRICE, W. C., 1959, *Advances in Spectroscopy*, Vol. 1, Ed. H. W. Thompson (New York: Interscience Publishers Inc., p. 56.
- [3] WATANABE, K., 1954, *J. chem. Phys.*, **22**, 1564.
- [4] TOUSEY, R., JOHNSON, F. S., RICHARDSON, J., and TORAN, N., 1951, *J. opt. Soc. Amer.*, **41**, 696.
- [5] JOHNSON, F. S., WATANABE, K., and TOUSEY, R., 1951, *J. opt. Soc. Amer.*, **41**, 702.
- [6] JAMES, J. F., 1959, *J. Sci. Instrum.*, **36**, 188.
- [7] DOWELL, J. H., 1940, *J. sci. Instrum.*, **17**, 208.
- [8] ROBIN, MME. S., 1954, *Rev. Opt. (théor. instrum.)*, **33**, 193.
- [9] DITCHBURN, R. W., 1956, *Opt. Acta*, **3**, 74.
- [10] POWELL, W. M., 1934, *Phys. Rev.*, **45**, 154.
- [11] LITTLE, E. P., 1946, *J. opt. Soc. Amer.*, **36**, 168.
- [12] PARKINSON, W. W., and WILLIAMS, F. E., 1949, *J. opt. Soc. Amer.*, **39**, 705.
- [13] BOLTON, J. H., and WILLIAMS, S. E., 1952, *Nature, Lond.*, **169**, 325.
- [14] JOHNSON, P. D., 1957, *Rev. Sci. Instrum.*, **28**, 833.
- [15] ONAKA, R., 1958, *Sci. of Light*, **7**, 23.
- [16] ROMAND, J., and VODAR, B., 1958, *Rev. sci. Instrum.*, **29**, 732.
- [17] SLUYTERS, TH. J. M., and HAAS, E., 1958, *Rev. sci. Instrum.*, **29**, 597.
- [18] SAWYER, R. A., *Experimental Spectroscopy* (London: Longmans, Hall & Co. Ltd.).
- [19] TANAKE, Y., and ZELIKOFF, M. J., 1954, *J. opt. Soc. Amer.*, **44**, 254.
- [20] WILKINSON, R. G., 1955, *J. opt. Soc. Amer.*, **45**, 1044.
- [21] HAAS, G., HUNTER, W. R., and TOUSEY, R., 1956, *J. opt. Soc. Amer.*, **46**, 1009.
- [22] SABINE, G. B., 1939, *Phys. Rev.*, **55**, 1064.
- [23] CLARKE, F. J. P., and GARTON, W. R. S., 1959, *J. Sci. Instrum.*, **36**, 403.
- [24] PRICE, W. C., BRALSFORD, R., HARRIS, P. V., and RIDLEY, R. G., 1959, *Spectrochim. Acta.*, **14**, 45.

New infra-red detectors for the 1 to 7 micron region†

by D. H. LEE and D. H. ROBERTS

The Plessey Co. Ltd., Caswell, Towcester, Northants, England

(Received 14 August 1959)

Brief theoretical results are given showing the dependence of the sensitivity of solid-state detector utilizing the photoconductive and photoelectromagnetic effects on material parameters. In the light of these results the applicability of two materials, indium arsenide and indium antimonide, is discussed and the construction and performance of detectors made from these materials are described. Some aspects of the practical use of these detectors are discussed with particular reference to the associated circuit elements.

1. INTRODUCTION

In this paper we describe the construction and performance of two solid-state semiconductor radiation detectors. For the convenience of readers unfamiliar with the terminology of semiconductor physics we will first consider briefly the action of radiation upon a semiconductor. In this connection the most important parameter characteristic of the semiconducting material is the energy gap or band of forbidden electron energies. If the incident photon has associated energy greater than the gap value (i.e. $h\nu \geq \Delta\epsilon$ where $\Delta\epsilon$ is the energy gap in electron volts) then it may be absorbed and raise the energy of an electron in the valence band across the gap into the conduction band. The electron and the resulting hole in the valence band can now contribute to the conduction process. In this manner incident radiation of wavelength less than some threshold value can be absorbed and can lower the resistivity of the semiconductor. When the stimulating radiation is extinguished the excess current carriers will decay exponentially with a lifetime τ which is characteristic of the material. The value of τ is very sensitive to the degree of purity and structural perfection of the material and may be altered by, for instance, appropriate heat treatment. In contrast to this the energy gap is relatively insensitive to the state of the material. However in choosing a suitable material for a detector we must always remember that it is the energy gap which sets an upper limit to the wavelength for which the detector will be sensitive. For work at long wavelengths a material with small energy gap is necessary but in general the overall sensitivity of such a material will be less than that with larger $\Delta\epsilon$.

The behaviour of an electron in a crystal under the influence of the lattice can best be described by ascribing to the electron an 'effective' mass. This is defined as the mass the electron appears to have if we consider it to be under the influence only of the external field. In some cases an electron may move in the opposite direction to that expected, that is the effective mass may take negative

† This paper was read at the Fifth Conference of the International Commission for Optics in Stockholm, August 1959.

values. The last parameter of interest is the carrier mobility μ . In a given material the mobility of electrons μ_n in n-type material is in general greater than that of holes μ_p in p-type materials and both these values are highly sensitive to the degree of purity. The mobility is defined as the drift velocity for unit electric field strength and is a function, inter alia, of the effective mass and the predominant scattering mechanism. For materials with lattice scattering predominant $\mu_n \propto M_{\text{eff}}^{-5/2}$. The III-V semiconductors are characterized by their high mobility and low effective mass.

In a photoconductive detector we merely measure the resistance of the semiconductor, which as we have seen will be a function of the radiation falling on it. It is therefore necessary to use in conjunction with the detector a source of power and for current to flow through the semiconductor. This necessarily causes noise to be generated at the contacts. As the final sensitivity of the detector is limited to that radiation which gives a signal discernible above the noise associated with the device it is essential that this noise is kept to a minimum. We return to the problem of contact noise in a later section. We define the equivalent noise input (ENI) as that input power which produces a signal of magnitude equal to the device noise. The total noise from the detector will be the sum of several components but in most cases we can consider one or other of these as being larger than the others and hence effectively limiting the detector sensitivity. The noise components can be enumerated as follows:

Johnson noise—due to random thermal fluctuations in carrier energy.

Shot noise caused by the quantum character of the current.

Flicker noise of unknown origin with a $1/f$ frequency distribution.

In the following section we give expressions for the sensitivity of photoconductors under various limiting noise conditions.

In the case of the photoelectromagnetic detector the need for an external source of power is obviated. The absence of biasing current results in the only noise being Johnson noise. This device depends on the fact that the optically treated electrons and holes diffuse in opposite directions under the action of the magnetic field and a voltage is therefore built up across the detector. We can consider the PEM effect as the Hall effect of the photodiffusion current.

2. CONSIDERATION OF OPTIMUM MATERIAL

In this section we shall present and briefly discuss theoretical expressions for the performance of semiconducting photodetectors under various limiting conditions. The derivation of the majority of these expressions is given elsewhere [1].

Firstly we give a list of the symbols which we shall need in this section.

α = absorption coefficient for radiation.

B = magnetic field strength.

C_n = constants (approximately unity).

$\Delta\epsilon$ = energy gap.

f = frequency (of modulation).

Δf = amplifier bandwidth.

H = energy dissipation per unit area.

\bar{n} = equilibrium electron density.

\bar{Q}_0 = mean signal quantum flux density at surface.

Q_a = ambient quantum flux density at surface.

τ = lifetime of excess carriers.

X = interelectrode distance.

Y, Z = breadth and thickness of specimen.

2.1. Photoconductive detectors

The following expressions have been given [1] for the signal to noise ratio of an intrinsic photoconductor.

If the limiting noise is Johnson noise in the material

$$(S/N)_{JN} = \frac{H^{1/2}(XY)^{1/2}\bar{Q}_0\tau}{(8kT\Delta f)^{1/2}\bar{n}} \frac{1 - \exp(-\alpha Z)}{Z}. \quad (1)$$

If we are shot-noise limited

$$(S/N)_{SN} = \frac{(XY)^{1/2}\bar{Q}_0\tau^{1/2}}{(8C_1e\bar{n}\Delta f)^{1/2}} \frac{1 - \exp(-\alpha Z)}{Z}. \quad (2)$$

In the case where flicker noise limits

$$(S/N)_{FN} = \frac{(XY)^{1/2}\bar{Q}_0\tau}{\sqrt{2}\bar{n}} \left(\frac{f}{E\Delta f} \right) \frac{1 - \exp(-\alpha Z)}{Z}. \quad (3)$$

If photon noise in the signal is the limiting factor

$$(S/N)_{PN} = \frac{1}{2} \left(\frac{H\mu}{\bar{n}e} \right)^{1/4} \left(\frac{Y\bar{Q}_0\tau}{C_2\Delta f} \frac{1 - \exp(-\alpha Z)}{Z} \right)^{1/2}. \quad (4)$$

If we are limited by photon noise in the ambient

$$(S/N)_{PN} = \frac{1}{2} \left[\frac{H\mu}{\bar{n}eZ} \right]^{1/4} \frac{\bar{Q}_0}{\sqrt{Q_a}} \left[\frac{Y\tau[1 - \exp(-\alpha Z)]}{C_2\Delta f} \right]^{1/2}. \quad (5)$$

Finally we consider the maximum response in the case where we are limited by the heat dissipation. Here

$$(V_s)_{\max} = \frac{H_{\max}^{1/2}X\bar{Q}_0\tau}{Z^{3/2}\bar{n}^{3/2}e^{1/2}\mu^{1/2}} [1 - \exp(-\alpha Z)]. \quad (6)$$

We note that in all these limiting cases the signal/noise ratio is inversely dependent on n . For high S/N ratio it is therefore desirable to make use of a material with a low value of n . Now it can be shown [2] that

$$\bar{n} = N_c \exp(-\Delta\epsilon/kT) \quad (7)$$

where N_c the effective density of states in the conduction band is given by

$$N_c = 2(2\pi M_{\text{eff}}kT/h^2)^{3/2}. \quad (8)$$

Hence it can be seen that a low value of the effective mass is a desirable property as if the detector is required to be photosensitive over a certain wavelength range we have automatically put an upper limit on the value of the energy gap of the material we can use.

2.2. Photoelectromagnetic detectors [3]

Moss [4] gives the following expression for the short circuit current in an intrinsic semiconductor:

$$J_{sc} = \bar{Q}_0 B [2kT\tau e\mu_n\mu_p(\mu_n + \mu_p)]^{1/2}. \quad (9)$$

Provided care is taken to eliminate any pick-up or magnetomechanical e.m.f.'s in the device the only source of noise in this case is Johnson noise.

We see from this expression that the response in this case is dependent on the square root of the lifetime and on the three-halves power of the weighted average mobility. This mode of detection is therefore very useful in the case of a material like indium antimonide with low lifetime and high mobility.

2.3. Discussion

An examination of the above equation reveals several characteristics which must be considered in choosing a material to be used as a photodetector. Firstly let us consider the energy gap of the material. If the detector is required to be sensitive to radiation of a certain frequency this naturally provides an upper limit to the energy gap; however, it does not provide any restriction on the lower limit. None the less the smaller the value of $\Delta\epsilon$ the greater will be the value of \bar{n} (if the effective mass is considered constant) and also the value of carrier lifetime will be reduced. Hence it is in general desirable to choose a material which gives a spectral cut-off at a wavelength only slightly greater than the one that is of interest. We have already shown that a low value of the effective mass is desirable.

The carrier lifetime of a low energy gap material will inevitably be short and we see from equations (9) and (1) that in this case it is desirable to use the PEM mode. However, if the average mobility is low then this is not so.

We tabulate the relevant properties of InAs and InSb:

Table 1

Property	InAs	InSb
Energy gap (ev)	0.33	0.17
μ_n ($\text{cm}^2/\text{v sec}$)	31 000	80 000
M_{eff}	$0.64m_e$	$0.015m_e$
τ (μs)	~ 3	< 0.1

It is apparent from these values that these two materials are suitable for the manufacture of photocells. The very low effective mass of InSb enables \bar{n} to be of reasonable magnitude despite the small gap; if $M_{\text{eff}} \sim m_e$ then the material would be almost metallic. It is easier in this case to attain high sensitivity from the PEM mode rather than the photoconductive, though if future materials technology increased the lifetime to the microsecond level the position would change. In the case of indium arsenide the mobility is considerably lower and the carrier lifetime much higher, hence the photoconductive mode is more convenient. The photovoltaic mode has been considered for this material, making a pn junction by the diffusion of zinc into n-type material. However, our information [5] is that to date the best value of ENI obtained (at wavelength of peak response) is similar to that obtained with a photoconductor made of inferior material and of ten times the optimum thickness. As there is no such obvious way of improving the photovoltaic detector the photoconductor does seem to have the greater potential.

3. CONSTRUCTION AND PERFORMANCE OF PHOTOCELLS

3.1. Indium arsenide photoconductor

3.1.1. Construction

The indium arsenide is prepared from specially purified indium and arsenic and is then zone refined. The resulting polycrystalline ingot is cut into slices which are then lapped to a thickness of ~ 0.1 mm, the slices are then diced to give filaments of 3×1 mm. In order that the detector shall not be dissipation-limited it is necessary to provide an efficient heat sink in good thermal contact with the filament. This is done by mounting the material on a block of copper from which it is electrically isolated by a thin layer of oil-impregnated paper. It is also possible to use anodized material for the heat sink. Wire contacts are soldered on to the filament to connect it across a co-axial socket, see figure 1

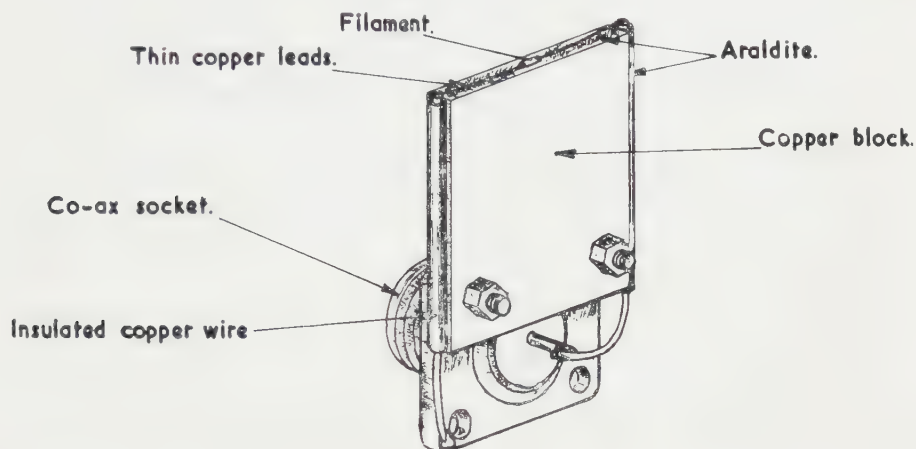


Figure 1

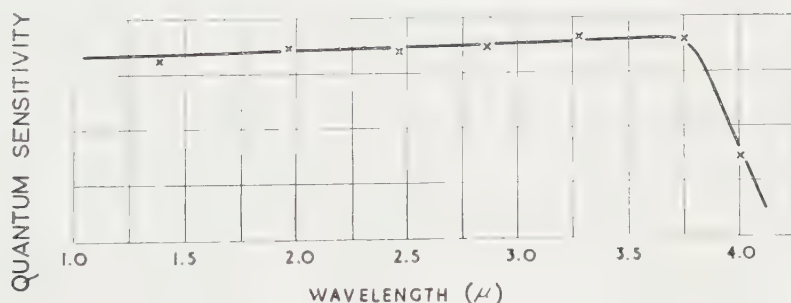


Figure 2

After mounting, the region around the contacts is masked with a hard-setting resin and the specimen may then be etched electrolytically. This etching serves two purposes. It will be seen from equations (1)–(5) that the performance of the cell is inversely proportional to the thickness and hence it is necessary to reduce the thickness as much as possible. The etch also helps to reduce the value of the surface recombination velocity at the upper surface.

3.1.2. Performance

The value of 0.33 eV for the room temperature energy gap leads us to expect the detector to be sensitive out to wavelengths of approximately 4μ . Figure 2

shows the measured quantum sensitivity of a cell operating at room temperature. It is seen that the fall-off in sensitivity occurs at about 3.8μ . Figures 3 and 4 show the performance of the cell as a function of bias voltage. We see from figure 4 that the fall-off in signal due to heat dissipation is important only at bias currents of about 160 mA. However, from figure 3 the signal/noise ratio reaches a maximum at a bias current of 70 mA, for bias above this the increase in noise with current limits us. An investigation of the frequency dependence of this noise indicated that it is flicker noise which predominates at these bias values.

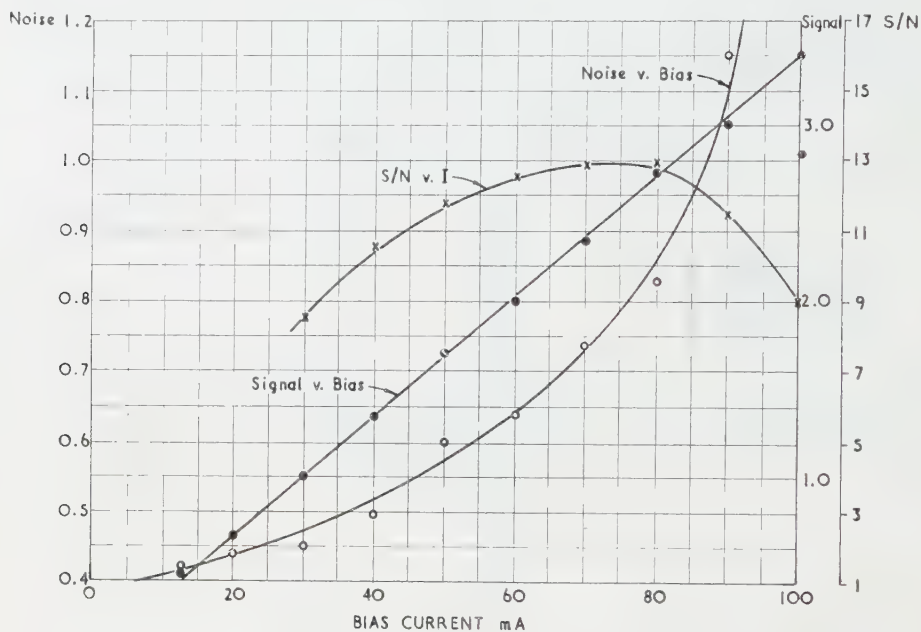


Figure 3

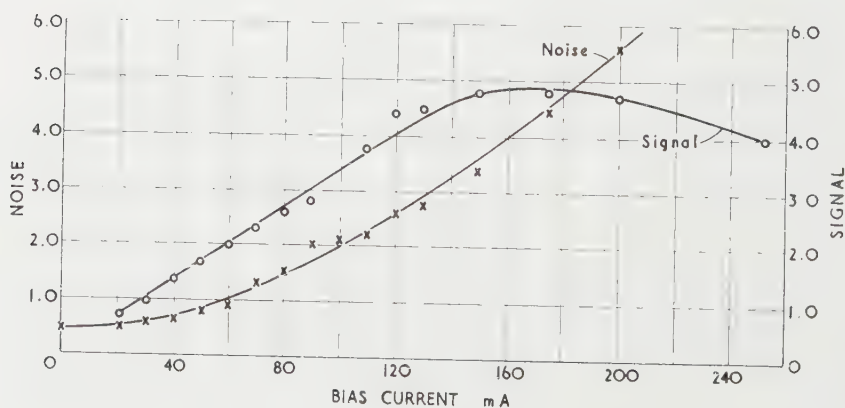


Figure 4

Figure 5 shows the fall-off in output from the cell as the temperature is raised. The input signal was monochromatic radiation at a wavelength of 2.3μ . We can attribute this fall-off to a reduction in lifetime τ and an increase in \bar{n} in the filament

material. We also find irreversible injurious changes in the surface recombination velocity after the cell has been operated at elevated temperatures. It was thought that it might prove possible to move the cut-off out to longer wavelengths by working above room temperature as the energy gap decreases with an increase in temperature. It was found though that the fall-off in sensitivity due to the temperature rise far outweighed any such effect. It is possible at a temperature of 120°C to detect radiation of 4.3μ but the sensitivity of the device is less than that of the InSb PEM detector to be described.

Room temperature performance of this detector is summarized in table 2.

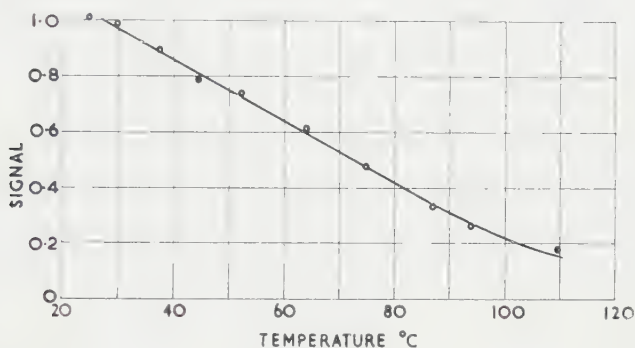


Figure 5

3.2. Indium antimonide PEM detector

3.2.1. Construction

The construction of this detector is somewhat different to that of the photoconductor described above. In the first place there is no problem of power dissipation to be considered and it is possible to mount the filament directly onto brass screws in an insulating block. Secondly, the thickness of the filament is ideally of the order of a diffusion length and this enables filaments to be somewhat thicker and therefore more robust than in the photoconductor. The indium antimonide is prepared in the form of a pulled single crystal which is cut, lapped and diced to a size similar to the photoconductor filaments. These are then mounted on the insulating block. The filament is then etched in an $\text{HF-H}_2\text{O}_2$ mixture until optimum thickness is reached. This thickness varies somewhat from crystal to crystal, but once a crystal has been characterized a large number of detectors can be made from it by etching for a standard time. Care must be taken not to etch the back surface as this will cause a reduction in signal when the thickness is of the order of a diffusion length. Ideally the surface recombination velocity should be zero at the front surface and infinite at the back (cf. in the photoconductor it is required to be zero at both surfaces). The specimen on its block is then positioned in the gap of a small permanent magnet. The magnet used is made of Alcomax III with mild steel yoke and permanent pole-pieces shaped to give a field of $\sim 10\,000$ gauss in a 1.5 mm gap.

3.2.2. Performance

This detector is found to have a spectral response curve which is linear with quantum input to a value of 6.0μ and falls to zero by 7.1μ . It will be seen that

these wavelengths are rather less than those which have been presented for an InSb photoconductor [6]. This is because the non-penetrating radiation at the absorption edge is not effective in the PEM case but is so for the photoconductor.

Data on performance are collected in table 2.

Table 2

	InAs	InSb
Wavelength of peak response	3.8μ	6μ
Response time	$\sim 3 \mu\text{s}$	$< 0.1 \mu\text{s}$
ENI at peak response	$\sim 5 \times 10^{-11}$ watts	3×10^{-10} watts
Cell resistance	50–100 Ω	5–25 Ω

4. USE OF THESE DETECTORS

We see from the details given in table 2 that the indium antimonide detector is very useful for applications where it is necessary to have sensitivity over a wide wavelength range whilst the indium arsenide detector covers roughly the same range as the present lead sulphide photocell. There are however certain advantages and disadvantages to be borne in mind when these semiconductor detectors are being used.

To gain the maximum sensitivity it is essential that the noise level is at its minimum, that is the noise level associated with the device itself. It is therefore necessary to design the associated circuitry with considerable care to ensure that no appreciable noise sources are included. It is necessary to chop the signal and then use a tuned amplifier to feed into the recorder. A mechanical chopper is used so that only the radiation signal is modulated. Two precautions are necessary here, firstly, the chopper unit must be mounted so that no vibrations are transferred to the detector; secondly if we are using the PEM detector we must make sure that the chopper blade is made of non-conducting material or is at a considerable distance from the detector or eddy current pick-up will be troublesome. The output from the detector is fed through a step-up matching transformer into a low noise single stage pre-amplifier and thence to the tuned amplifier. In our experience a chopping frequency of 800 c/s is convenient and amplifier band width of 50 c/s.

These detectors are characterized by their low output impedance which is of the order of 10 to a 100 ohms. For this reason it is necessary to use a transformer when they are employed in conjunction with a valve amplifier. However, this impedance is ideal for use with a transistor circuit [7]. The noise in this case can be prohibitive although it has been possible using selected low noise transistors to construct an amplifier which gave us only 3 dB reduction in the S/N ratio from the ideal case. In the future it is considered that use will be made of this feature in the design of cheap, sensitive, small and robust instruments for analysis or process control—preferably using multi-layer interference filters instead of prisms or gratings [8].

To the spectroscopist some of the advantages of these detectors over thermal detectors for the same wavelength range are as follows:

- (a) *Cost*.—The detectors discussed in this paper could be produced in quantity for a few pounds each.

- (b) *Size*.—The photoconductor especially shows considerable gain in size and geometry.
- (c) *Speed*.—The short time constants associated with these detectors enable transient phenomena to be investigated, and also they permit the use of an amplifier tuned at frequencies higher and more favourable than the usual 5–20 c.p.s. needed with radiation thermocouples.
- (d) *Ruggedness*.—These detectors are considerably less fragile than many thermal detectors.
- (e) *Reproducibility*.—The performance of these photocells can be predicted accurately theoretically, and many identical units could be made.

5. FUTURE TRENDS IN SOLID-STATE DETECTORS

Consideration of figure 3 shows that there is scope for some improvement in the noise characteristics of the contacts of the InAs detector. With better contact technology and improved methods of treating and stabilizing the filament surface the sensitivity of the detector could be increased about two-fold.

The seven micron cut-off of indium antimonide detectors is about the longest wavelength sensitivity which is likely to be achieved with detectors operating at room temperature. Any further decrease in the energy gap is accompanied by a large increase in the dark conductivity and consequent lowering of the sensitivity. However by operating detectors at low temperature it is possible to enhance considerably their properties and it is in this direction that future improvements seem most likely. Several workers have reported doped germanium photoconductors sensitive out to $\sim 25\mu$ at helium temperatures. The optical activation process involved here is one of activation into the conduction band from impurity levels, the low temperature being necessary to ensure that the impurity atoms are in the un-ionized state.

The sensitivity and noise characteristics of InSb and InAs detectors are appreciably improved by operation at liquid nitrogen temperatures and work is in progress on the design of such devices. In this case however the increase of energy gap as the temperature is lowered does result in a loss of long wavelength sensitivity.

ACKNOWLEDGMENT

Thanks are due to the Plessey Co. Ltd. for permission to publish.

On donne de brefs résultats théoriques montrant l'influence des paramètres matériels sur la sensibilité d'un détecteur utilisant les effets photoconducteur et photoélectromagnétique. A la lumière de ces résultats, on discute l'utilisation de deux substances, l'arseniure d'indium et l'antimoniure d'indium, et l'on décrit la construction et les performances de détecteurs réalisés à partir de ces substances. On discute quelques aspects de l'utilisation pratique de ces détecteurs en insistant surtout sur les éléments de circuit qui leur sont associés.

Für Festkörper-Detektoren, deren Wirksamkeit auf der Photoleitfähigkeit oder auf photo-elektromagnetischen Eigenschaften beruht, wird die theoretische Abhängigkeit der Empfindlichkeit von den Materialparametern kurz dargelegt. Im Licht dieser Ergebnisse wird die Brauchbarkeit zweier Stoffe, Indiumarsenid und Indiumantimonid, behandelt sowie Bau und Leistungsfähigkeit von Detektoren aus diesen Stoffen beschrieben. Schliesslich werden noch einige Gesichtspunkte für die praktische Verwendung dieser Detektoren mit besonderer Berücksichtigung der angeschlossenen Stromelemente mitgeteilt.

REFERENCES

- [1] ROBERTS, D. H., and WILSON, B. L. H., 1958, *Brit. J. appl. Phys.*, **9**, 291.
- [2] SHOCKLEY, W., 1950, *Electrons and Holes in Semiconductors* (New York: Van Nostrand).
- [3] HILSUM, C., and ROSS, I. M., 1957, *Nature, Lond.*, **179**, 146.
- [4] MOSS, T. S., 1959, *Optical Properties of Semiconductors* (London: Butterworths).
- [5] LASSER, M. E. (private communication).
- [6] GOODWIN, D. W., 1956, R.R.E. Memorandum No. 1239.
- [7] AVERY, D. G., and BOWES, R. C., 1958, *J. sci. Instrum.*, **35**, 212.
- [8] LISSBERGER, P. H., and RING, J., 1955, *Opt. Acta*, **2**, 42.

Colour confusion produced by voluntary fixation

by K. J. McCREE†

Technical Optics Section, Imperial College, London

(Received 9 March 1960)

When an observer stares at a colour-matching field, he may lose a great deal of his colour discrimination. Some find it possible to match any pair of spectral colours. Prolonged staring is not necessary, but the colours must be exactly matched in brightness. A systematic study of the fixation effects indicates that they are not due to a photochemical bleaching of pigments, but rather to the reduction of eye movements. Blue-green discrimination is affected more than yellow-red.

1. INTRODUCTION

There has been considerable interest recently in the part which eye movements play in colour vision [1-4], and some colour effects have been studied with the mechanically stabilized retinal image [5, 6]. It is, however, quite possible to make quantitative observations with purely voluntary fixation. When a bipartite field containing two colours is adjusted for equality of brightness and looked at as steadily as possible, colour differences can apparently vanish. Under some conditions, colours as different as spectral red and spectral blue can seem the same to the eye.

2. EQUIPMENT AND TECHNIQUE OF OBSERVATION

Almost all the experiments here reported have been made on the Wright colorimeter [7]. The observer sees in Maxwellian view, through an artificial pupil 2 mm in diameter, a horizontally divided square field, which subtends 80 min of arc at the eye. The upper half may be a mixture of up to three spectral colours from the 'primary' side of the instrument, and the lower half either one or two spectral colours from the 'test-colour' side. For wavelength discrimination measurements, only one colour is presented in each half of the field.

In these particular experiments, the object was to find the extent of the region within which all wavelengths matched, when the field was fixated. The wavelengths in each half of the field were initially set to be the same. The wavelength of the lower half was then shifted slightly, the field fixated, and the brightness control oscillated slowly through the match point. If the two wavelengths were not too far apart, there would be moments of good fixation and exact brightness match, when the colours would merge into one desaturated mixture of the two. The wavelength control would then be moved a little further, and the operation repeated. Eventually, a point would be reached at which the two wavelengths could no longer be made to match. The control

† Now at the Dominion Physical Laboratory, Lower Hutt, New Zealand.

would then be moved back a little, until they still matched, but only just, and the reading noted.

Fixation was voluntary, and therefore rather variable, but quite repeatable results could be obtained with practice. It was found best not to stare deliberately at one point in the field, but rather to relax and let one's gaze find its own centre of interest. It was essential to steady the head, with the dental impression which is a normal accessory to the colorimeter.

3. THE BASIC OBSERVATIONS

The author found that with a fairly dim field (a retinal luminance of less than 60 trolands) any two spectral colours could be made to look the same.

With brighter fields, the confusion of colour was not so complete. This can be seen from figure 1. In this 'confusion chart', the abscissa is the fixed wavelength in the upper half of the field, and the ordinate is the limiting

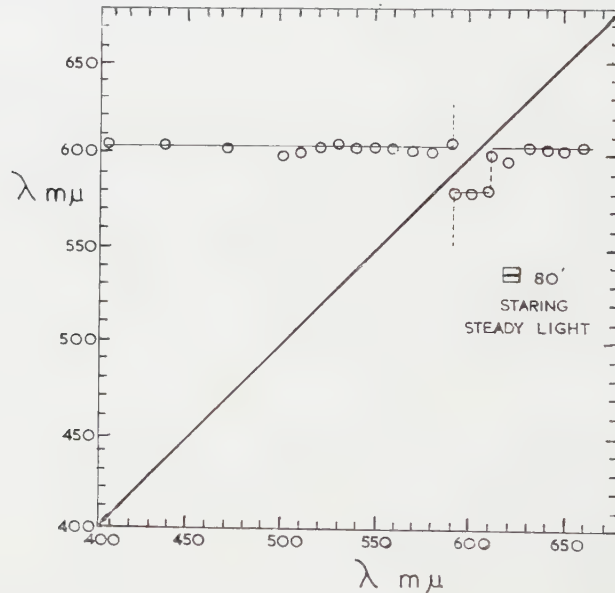


Figure 1. Chart showing the limiting wavelength (ordinate) which the author can just match with a given fixed wavelength (abscissa), when fixating on an 80' field. Retinal luminance constant at 830 trolands above 470 mμ.

wavelength in the lower half which would still just match this wavelength in the moments of good fixation. For all fixed wavelengths less than about 590 mμ, the limiting wavelength was very closely the same, 602 mμ. As the movable wavelength was made progressively longer, the two halves of the field could be kept matched only up to this point. Beyond it, a red sensation began to appear in the lower half, which did not have any counterpart in the upper half. Similarly, if the fixed wavelength were in the far red, the lower half could not be moved in beyond 602 mμ without a mismatch appearing, this time because of the absence of a red sensation.

Other details appeared in the confusion chart when the light was interrupted for 1/20 sec every 1/2 sec. This 'artificial blink' produced a metastable state

of rather poor fixation. As the chart shows (figure 2), instead of the red sensation with a boundary at $602\text{ m}\mu$ there was now a persistent yellow sensation which first appeared at a wavelength of $575\text{ m}\mu$. On the short-wave side, there was evidence of a persistent blue at $512\text{ m}\mu$, as the wavelength was decreased from a match at, say, $560\text{ m}\mu$. The whole chart is much less definite than the first; at several wavelengths, the observer was not sure whether he should record the first barely discriminable change of colour (the points near the 45° straight line) or continue to the later quite definite change.

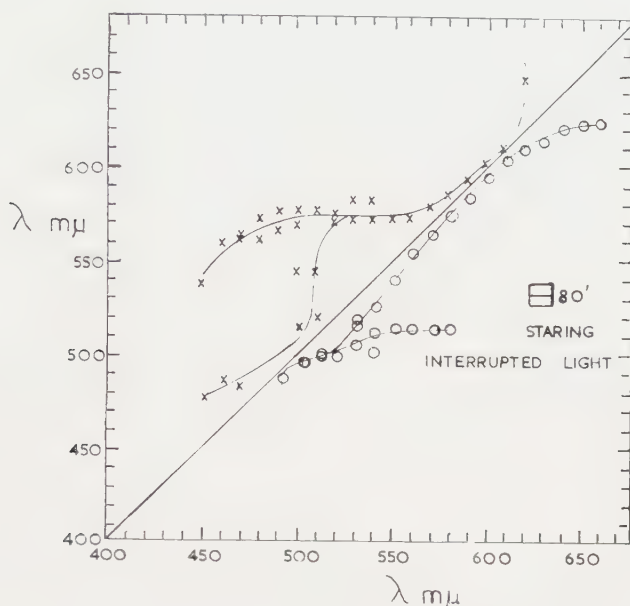


Figure 2. Confusion chart for the author, fixating on an $80'$ field in which the light is interrupted for $1/20$ sec every $\frac{1}{2}$ sec. (The wavelength discrimination step is the vertical distance away from the 45° straight line.)

A very similar type of chart (figure 3) was recorded by two other observers with steady light. Evidently, their fixation with steady light is about as good as the author's fixation with interrupted light.

In all, nine observers other than the author have been tested. Their sensitivities to fixation effects varied a great deal. Two were similar to the author in suffering a large and immediate loss of discrimination, the two mentioned above were moderately sensitive, one noticed the effect only under conditions in which discrimination would tend to be below normal in any case (low brightness or reduced field size) and four had difficulty in seeing any fixation effect at all. Several observers reported that the field could disappear momentarily, a phenomenon which has often been reported by observers viewing a 'stabilized' field [8].

All these observers have been tested with pseudo-isochromatic plates, and were shown to have normal colour vision. The author was also tested with the Farnsworth-Munsell 100-Hue Test.

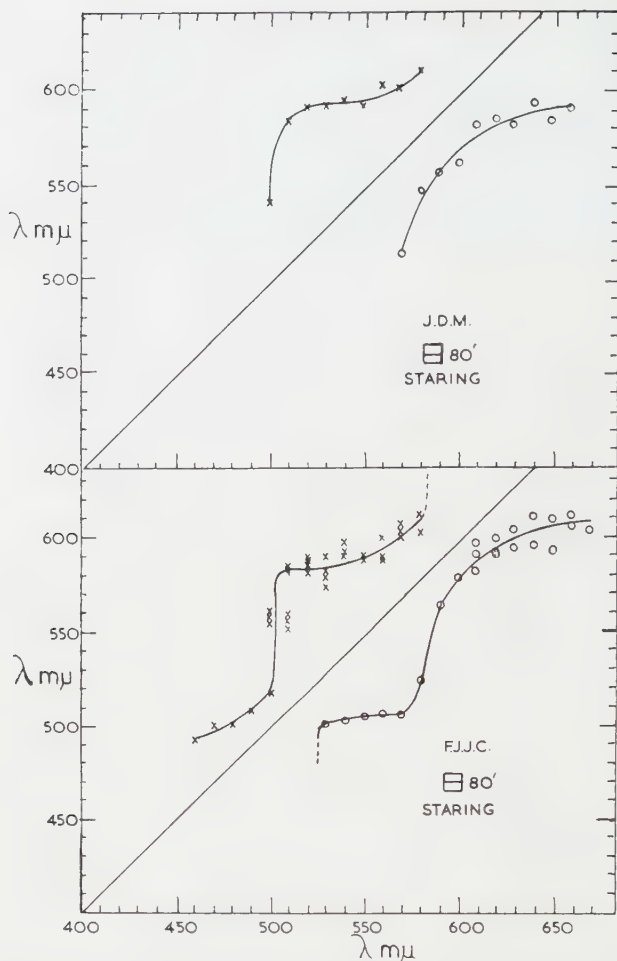


Figure 3. Confusion charts for two observers fixating on an 80' field. Retinal luminance constant at 300 trolands above 500 m μ .

4. OBSERVATIONS MADE UNDER VARIOUS OTHER CONDITIONS

All these measurements had been made in a darkened room, after a brief initial period of dark adaptation. To test for fixation effects in the light-adapted state, the pre-adaptation equipment on the colorimeter was brought into operation. By means of a sliding mirror and an auxiliary tungsten lamp, a circular patch of bright light, subtending 5° at the eye, can be viewed in place of the colorimeter field. The author found that if he kept his eye light-adapted by staring at this patch, flashing in and fixating the colorimeter field for only a few seconds at a time, his discrimination was just as poor as it was in the dark-adapted state.

The same equipment was used to test the periphery. A fixation spot, reflected in the same mirror, was set at various positions to the side of the colorimeter field. The author found that he could again match all colours in the field, when fixating on the spot, no matter how far apart in wavelength the two were set.

Some tests were also made with larger centrally fixated fields, up to 8° in diameter. The instrument used for these was a filter colorimeter designed by Wright for auroral observations. The colour confusions were akin to those with the $80'$ field of high luminance; though blues and greens were easily matched, reds could not be matched with other colours, even at the lowest luminances. It should be noted, however, that fixation was probably not as good as with the $80'$ colorimeter, since the observer's head was not steadied with a dental impression.

The $80'$ colorimeter was also arranged binocularly, so that one of the colours was seen by the right eye and the other by the left. The observer kept the two halves of the field as nearly as possible one above the other, fixating midway between them. Naturally, the fixation was not as good as it was when the two halves were seen by the same eye. The confusion chart (figure 4) was, in fact, very similar to that taken monocularly with interrupted light, that is, with poor fixation.

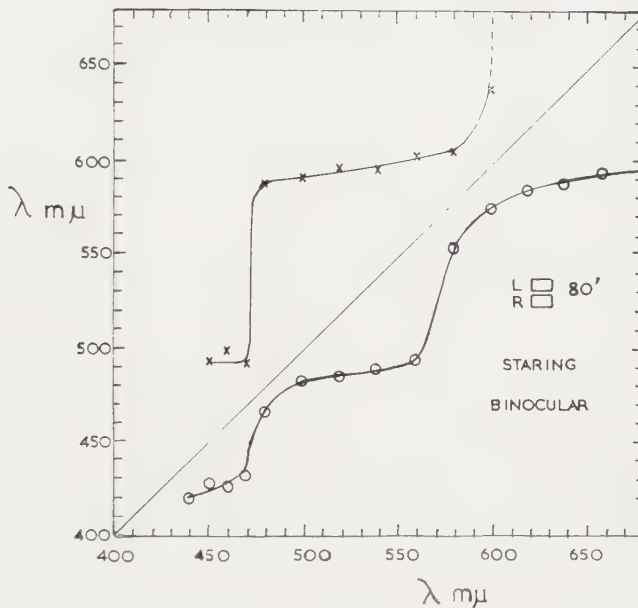


Figure 4. Confusion chart for the author, fixating on an $80'$ field of which one half is seen by each eye. Retinal luminance 28 trolands.

Since it might be contended that the discrimination losses were not due to fixation, but merely to the division of the field between the two eyes, a control experiment was made with the observer taking only brief glances at the pair of fields. The discrimination (figure 5) was very much better, and of the 'normal' type. It seems certain, therefore, that the two colours do not need to be seen by the same eye for the fixation effects to occur.

Finally, an attempt was made to measure the time interval between the moment of fixation and the earliest moment when colours were confused. Yellow and green were set up in the colorimeter and viewed monocularly by the author. The field was flashed on for various times in the range 0.1 to

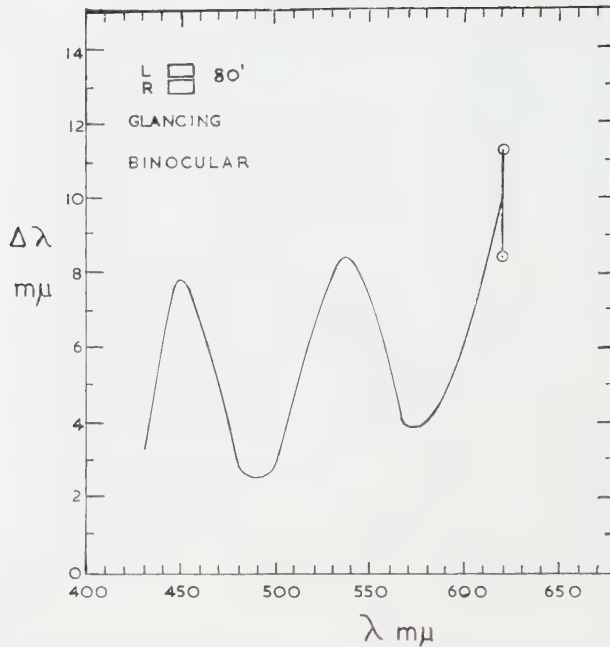


Figure 5. Wavelength confusion curve for the same conditions as in figure 4, but with the observer glancing at the field.

2.0 sec, while a small red spot was continuously fixated. The minimum time for the confusion of the yellow and green was found to be between 0.4 and 0.8 sec.

5. COMPARISON WITH THE EFFECTS OF STRONG ADAPTATION

Brindley [9] has also demonstrated a condition under which an observer has little or no colour discrimination. His 'artificial monochromacy' was produced by pre-adaptation to very bright coloured lights. If fixation were to produce a spot of intense local self-adaptation, it might induce the same type of 'monochromacy'. In this case, one would expect a similar drastic change in the luminosity curve.

Luminosity curves taken by the author, under fixation conditions and without fixation, are shown in figure 6. For these measurements, constant light of wavelength 530 $m\mu$ in the lower half of the field was matched in brightness with light of various wavelengths in the upper half. The relative luminosities were taken to be inversely proportional to the energy flux required to match the constant light.

When the divided field was viewed monocularly, fixation produced no change in the curve (figure 6). With binocular viewing, the comparison wavelength being seen by the right eye and the variable one by the left, there was a slight change on fixation, but it was probably not greater than the systematic error which is commonly met with in matching the brightness of different colours. When the observer was glancing at the field, he saw two very different colours, and would be tempted to judge the more saturated colour to be brighter than it really was; when he was fixating on the field, the colours were all the same,

or at least very desaturated, and this error would not arise. Thus the 'glancing' curve would tend to be higher than the 'staring' one in the far red and far blue, where the saturation is greatest.

The luminosity curve is certainly not changed as much as it is when the 'artificial monochromacy' is induced with strong pre-adaptation.

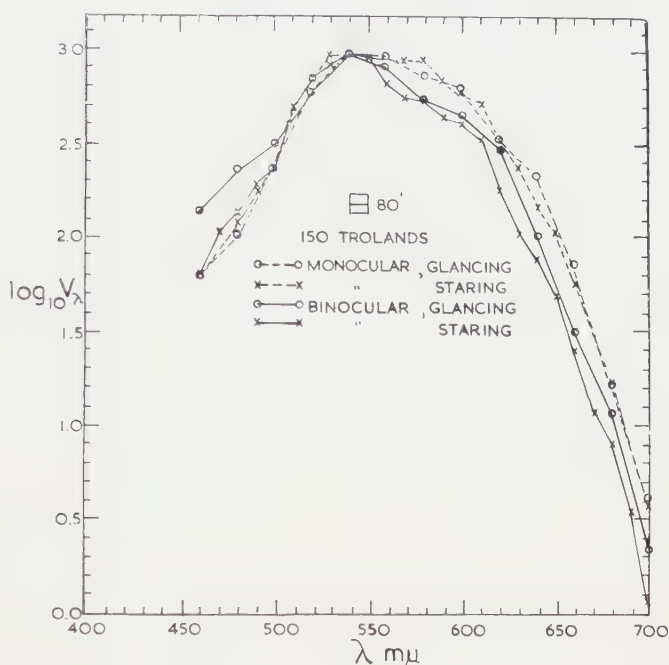


Figure 6. Luminosity curves, taken under glancing and staring conditions, and with the field viewed completely by one eye or divided between the two eyes.

6. CHANGES IN APPARENT COLOUR

One quite obvious result of steady fixation is that both halves of the field desaturate. If they were to desaturate completely, they would of course become matched. To find out whether complete desaturation does in fact take place, single patches of light of various spectral colours have been fixated, and the changes in their subjective colour measured by the binocular method. The colorimeter was set up so that the right eye viewed a spectral colour from the test-colour side of the instrument. This patch was fixated, and the colour changes were followed by matching with a mixture of three primary colours, seen by the left eye.

The procedure was as follows. An initial colour match was made with both eyes as nearly as possible dark-adapted; for this match the fields were viewed for less than two seconds at a time. There followed two minutes of fixation on the right-eye patch, with the left-eye patch obscured. The observer then made a second colour match, exposing the left-eye patch for a series of two-second flashes, and adjusting its colour to match that of the adapted right-eye patch. The left eye was thus in the same state for both matches, and the two sets of readings could be used to calculate the change in the apparent colour of the

monochromatic light fixated by the right eye, as measured in the trichromatic system of the left eye.

The patch could not, of course, be fixated perfectly for the whole of the two minutes, and there was a major distraction when the left-eye patch was flashed. In practice, however, a considerable area of the retina near the patch appeared to be well adapted down after two minutes, and the observer could, with practice, bring his fixation back into this area very quickly after he had opened the shutter for the left-eye patch.

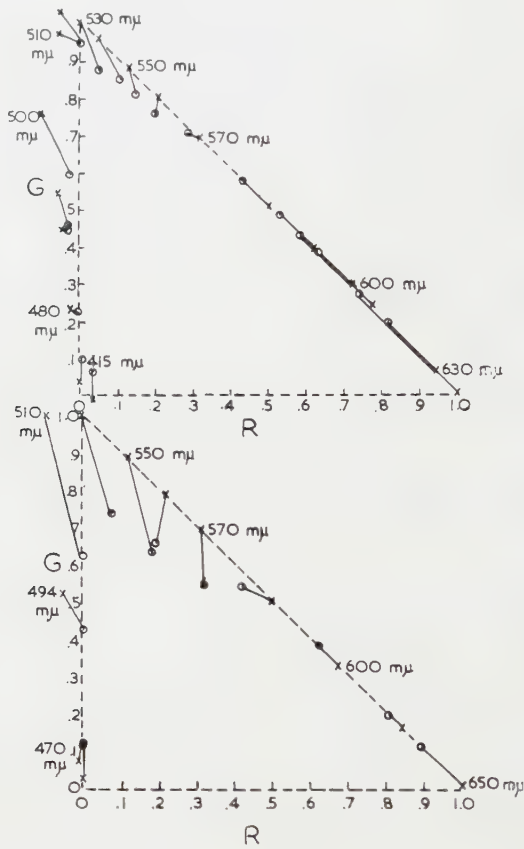


Figure 7. WDW Chromaticity diagrams showing the change in apparent colour of a fixated spectral colour; left eye glancing at a mixture of the primaries 460, 530 and 650 $m\mu$, right eye first glancing and then staring at various spectral colours. Right eye patch of constant *energy* in the upper diagram and constant *brightness* in the lower diagram (130 trolands).

Two minutes' fixation was judged to be sufficient for the right eye to reach a steady state of adaptation. Quite a large proportion of the colour change actually took place within the first few seconds, but it was not practicable to start measurements before the change was complete.

There was a considerable drop in the apparent brightness of the fixated patch, in addition to its change in colour. This could lead to errors in the colour measurements, since the apparent colour of a given mixture in the reference

patch would change as the brightness level was lowered. To eliminate this type of error, a second set of measurements was made with the observer continuously increasing the energy of the right-eye field as he stared at it, so that the final colour match was made at the same brightness level as the initial one.

The results of both sets of measurements are given in figure 7. They are plotted on WDW chromaticity charts for the left eye, the primaries being spectral colours of wavelengths 460, 530 and 650 m μ , and the units based on equality of R and G at 582.5 m μ and of G and B at 494.0 m μ . They both show a certain amount of desaturation of the spectral colours, after two minutes' self-adaptation. (Similar changes have been recorded by Yustova [10].) The desaturation is by no means complete, however, and one must reject the hypothesis that two colours look identical when fixated because they have lost all their hue by adaptation.

Further evidence that adaptation is not a direct cause of the discrimination loss which accompanies fixation, was obtained when five other observers were tested for sensitivity to adaptation, on Wright's subjective photometer. In this simple test, only red light was used, and the measurement was limited to the change in apparent brightness which resulted from steady fixation for two minutes. The observers were, however, asked to *estimate* the change in colour, by comparing it with a fixed orange. The brightness and colour changes were obviously related, for a given observer, but there seemed to be no connection between these changes and the sensitivity of the same observer to fixation effects. Observers were found who recorded large changes in brightness but suffered very little colour confusion on fixation, and vice versa.

Finally, there is evidence, discussed above, that fixation effects can appear after 0.4 sec. This rather rules out any connection with the photochemical bleaching of a pigment.

7. CONCLUSION

The most reasonable conclusion is that the reduction of eye movements has caused the colour confusion. Also, the fact that one must adjust for equality of brightness as one fixates, indicates that there is a linkage, somewhere in the visual system, which makes the divided field look uniform in colour when it is made uniform in brightness. Since the same confusions occur when the field is divided between the two eyes, the linkage cannot be in the retina. The combination of this linkage, the reduced eye movements and a certain amount of desaturation of the colour, could easily lead to a colour confusion which would vary in severity with the observer and with the conditions of observation.

Though there was a big variation from one observer to another, more than half of them found that their discrimination was affected to some extent by fixation. This means that some losses are bound to occur even in normal colour matching. After all, it is natural to stare at the field when one is trying to judge a very small colour difference. Moreover, the discrimination loss will be greater in some parts of the spectrum than in others, as figure 1 shows. The selective lowering of blue-green discrimination, relative to the yellow-red, is in the same direction as tritanopia.

The implications of this will be discussed elsewhere. For the present, we wish only to draw attention to the fact that losses do occur, so that steps can be

taken to avoid them. In most cases it should be sufficient to instruct the observer consciously to avoid fixation, but where it is particularly important for the field to fall on the central fovea, it may be necessary to provide a fixation spot and a field flashing on for less than half a second in every two. This would make the measurements somewhat more difficult, but the observer would be much more sensitive to colour differences. One suspects that observers have in the past been rejected as inaccurate or unreliable, when in fact they have merely been particularly sensitive to fixation effects.

ACKNOWLEDGMENTS

It is a pleasure to thank Professor W. D. Wright for his constant friendly guidance, and my fellow students and staff for their help as observers and recorders.

Quand un observateur regarde fixement un champ d'égalaion de couleurs, il peut perdre une grande partie de sa faculté de distinguer les couleurs. Certains trouvent possible d'égaler deux couleurs spectrales quelconques. Une fixation prolongée n'est pas nécessaire, mais les plages doivent être exactement égalisées en luminosité. Une étude systématique des effets de la fixation indique qu'ils ne sont pas dus à une décoloration photochimique de pigments, mais plutôt à une réduction des mouvements de l'œil. La discrimination entre le bleu et le vert est plus affectée que la discrimination entre le jaune et le rouge.

Wenn ein Beobachter auf ein Farbvergleichsfeld blickt, so kann seine Fähigkeit zur Farbunterscheidung beträchtlich nachlassen. Manche Beobachter können jedes beliebige Paar von Spektralfarben vergleichen. Ein längeres Hinblicken ist nicht nötig aber die Farben müssen in der Helligkeit genau gleich sein. Eine systematische Untersuchung der Fixationseffekte deutet an, daß sie nicht von einem photochemischen Ausbleichen der Pigmente herrühren, sondern eher von einem Nachlassen der Augenbewegungen. Die Blau-Grün-Unterscheidung wird davon mehr betroffen als die Gelb-Rot-Unterscheidung.

REFERENCES

(Note: The 'Symposium' referred to is the Symposium on Visual Problems of Colour, held at the National Physical Laboratory, Teddington, in September 1957, the Proceedings of which were published by Her Majesty's Stationery Office, London, in 1958.)

- [1] FARNSWORTH, D., 1957, Symposium, Paper 26, p. 429.
- [2] FRY, G. A., 1957, Symposium, Paper 27, p. 665; 1959, *J. opt. Soc. Amer.*, **40**, 1156.
- [3] BRINDLEY, G. S., 1957, *Progr. Biophys.*, **8**, 49.
- [4] BEDFORD, R. E., and WYSZECKI, G. W., 1958, *J. opt. Soc. Amer.*, **48**, 129.
- [5] DITCHBURN, R. W., 1957, Symposium, Paper 15, p. 415.
- [6] YARBUS, A. L., 1957, *Biofizika*, U.S.S.R., **2**, 703.
- [7] WRIGHT, W. D., 1946, *Researches on Normal and Defective Colour Vision* (London: Henry Kimpton).
- [8] DITCHBURN, R. W., and FENDER, D. H., 1958, *Opt. Acta*, **3**, 128.
- [9] BRINDLEY, G. S., 1953, *J. Physiol.*, **122**, 332.
- [10] YUSTOVA, E. N., 1957, Symposium, Paper 37, p. 681.

Extension du concept d'espaces de Fourier à la spectroscopie†

par P. JACQUINOT

Université de Paris et Laboratoires du CNRS, Bellevue (S. et O.) France

(Manuscrit reçu le 10 novembre 1959)

On montre comment le concept d'espace de Fourier, familier en technique des communications a été étendu d'abord au domaine de l'imagerie optique. Les correspondances des diverses variables et fonctions sont indiquées dans les cas de l'imagerie cohérente, de l'imagerie par reconstruction de front d'onde et de l'imagerie incohérente.

Un rapprochement est ensuite établi entre l'imagerie par reconstruction de front d'onde et la nouvelle méthode de spectroscopie dans laquelle le spectre est reconstitué par transformation de Fourier de l'interférogramme fourni par un interféromètre à deux ondes.

Ce rapprochement permet de comprendre clairement les propriétés essentielles de cette nouvelle méthode. En particulier lorsque la transformation de Fourier est faite par voie numérique au moyen d'un certain nombre de points équidistants sur l'interférogramme, on obtient une superposition (overlapping) de spectres, tout comme dans l'emploi d'un réseau ou d'un appareil de Fabry-Perot: cet effet est analysé par comparaison avec l'imagerie d'un objet monochromatique donnée par un réseau. On montre enfin la relation qui existe entre les différentes méthodes spectroscopiques et les différents types d'imagerie optique.

1. INTRODUCTION

La notion d'espace de Fourier, familière depuis longtemps aux spécialistes des télécommunications, est de plus en plus utilisée par les opticiens. Le but de cet exposé est de montrer que cette notion peut être utile aussi en spectroscopie instrumentale, et d'analyser certaines analogies qui existent entre le domaine de l'imagerie optique et le domaine de la spectroscopie. Avant de montrer l'extension de ce concept à la spectroscopie il est utile de rappeler brièvement comment il s'est introduit en théorie des communications et en imagerie optique.

2. SPECTRE DE FREQUENCES EN TECHNIQUE DES COMMUNICATIONS

Un signal quelconque $y=f(t)$ est transmis à travers une série de dispositifs électriques ou mécaniques dont le comportement est supposé linéaire. Le signal est déformé en traversant les dispositifs: pour connaître cette déformation on peut décomposer le signal en impulsions très brèves et ajouter les 'réponses impulsionnelles' du système. Il est souvent plus commode de considérer non pas les réponses impulsionnelles mais les réponses du système à des excitations sinusoïdales permanentes de fréquences variées: on est alors amené à considérer le signal comme une superposition de fonctions sinusoïdales dont les amplitudes et les phases dépendent de la fréquence de façon à reconstituer le signal, puis à

† Conférence prononcée au Congrès de la Commission Internationale d'optique à Stockholm (Août 1959).

ajouter les réponses du système à ces différentes excitations. Cette décomposition s'exprime par la transformation de Fourier

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(N) \exp(-2\pi j N t) dN \quad (1)$$

ou encore $F(N) = \mathcal{F}[f(t)]$ où $F(N)$ est une fonction complexe tenant compte à la fois de l'amplitude et de la phase. A l'espace (e) de la donnée physique primaire $y=f(t)$ (ici espace des temps) on fait correspondre un *espace de Fourier conjugué* (E) , $Y=F(N)$ (ici espace des fréquences). La transformation de Fourier étant réciproque, on peut également dire que (E) est l'espace de Fourier conjugué de (e) , ou que (e) est l'espace de Fourier conjugué de (E) . Chacune des composantes de Fourier $F(N)dN$ est transmise par le dispositif avec un gain $G(N)$ (qui est en général complexe), si bien que le signal subit dans son espace de Fourier une altération qui transforme son *spectre de fréquence* $F(N)$ en

$$F'(N) = F(N) \cdot G(N). \quad (2)$$

Pour trouver le signal à la sortie on repasse à l'espace primaire (e) par la transformation de Fourier inverse qui donne

$$f'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F'(N) \exp(2\pi j N t) dN = \mathcal{F}(F \cdot G). \quad (3)$$

Le théorème de Parseval joue un rôle fondamental dans le maniement des espaces de Fourier; en appelant a et b deux fonctions et A et B leurs transformées il s'exprime par :

$$\mathcal{F}(A \cdot B) = a \star b \quad \text{ou encore} \quad \mathcal{F}(a \cdot b) = A \star B, \quad (4)$$

$a \star b$ désignant la convolution des fonctions a et b , définie par

$$c(x) = a \star b = \int_{-\infty}^{+\infty} a(x') b(x - x') dx'.$$

En appliquant le théorème (4) à l'équation (3) on obtient

$$f'(t) = f(t) \star g(t).$$

On montre facilement que $g(t)$ n'est autre que la réponse impulsionnelle: on retrouve ainsi pour $f'(t)$ le résultat qu'on aurait obtenu directement par la décomposition de $f(t)$ en impulsions élémentaires. La méthode *impulsionnelle* (qui n'utilise que l'espace (e)) et la méthode *fréquentielle* (qui passe par l'intermédiaire de l'espace de Fourier (E)) sont donc bien équivalentes: on utilise, suivant les cas, celle qui s'avère la plus commode.

3. IMAGERIE COHÉRENTE

Traisons d'abord le cas du problème à une seule dimension. Un objet O est illuminé par une source ponctuelle lointaine S , de telle sorte que chacun de ses points, défini par l'abscisse x transmet (ou réfléchit) une vibration d'amplitude complexe $f(x)$, la fonction f décrivant complètement l'objet. Les vibrations

lumineuses de tous les points de l'objet sont cohérentes, de telle sorte qu'on trouve, à grande distance, une figure de diffraction dans laquelle l'amplitude complexe est $F(\alpha)$, α étant le sinus de l'angle définissant la direction θ .

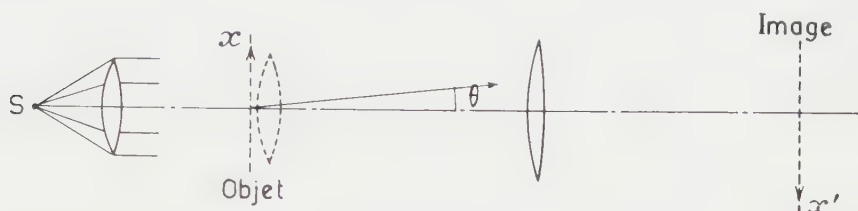


Figure 1

Si la distance entre l'objet et la plan d'observation de la figure de diffraction est suffisamment grande (ou si cette figure est observée au foyer d'une lentille L' placée sur l'objet) on peut utiliser la théorie élémentaire de la diffraction de Fraunhofer, qui donne :

$$F(\alpha/\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-2\pi j x \alpha / \lambda) dx; \quad (6)$$

$F(\alpha/\lambda)$ est la transformée de Fourier de $f(x)$: c'est aussi une amplitude complexe représentée dans un espace de Fourier (E) conjugué de l'espace (e). Dans (e) les abscisses sont x et les ordonnées complexes $f(x)$, c'est à dire des vecteurs perpendiculaires à l'axe des x ; dans (E) les F sont aussi des amplitudes complexes F et les abscisses sont des sinus d'angles, α , ou plutôt des *fréquences spatiales* $S = \alpha/\lambda$. On peut dire ici que l'espace de Fourier (E) conjugué de (e) est *matérialisé* et se confond avec l'espace de Fraunhofer. A toute fréquence spatiale S (distribution sinusoïdale d'amplitude dans (e)) correspondent en effet deux points dans (E) matérialisés par deux taches lumineuses dans les directions $\alpha = \pm S \cdot \lambda$.

Utilisons maintenant un système optique L qui rassemble dans son plan focal la lumière distribuée dans l'espace de Fraunhofer. Pour trouver la distribution $f'(x')$ d'amplitude complexe dans le plan on doit faire la somme de toutes les amplitudes complexes qui parviennent de tous les points du système optique, compte tenu de leur retard de phase $-2\pi x' \alpha / \lambda$. On a donc

$$f'(x') = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha/\lambda) \exp(-2\pi j x' \alpha / \lambda) d\alpha. \quad (7)$$

Cette relation est la transformation de Fourier inverse de la transformation (6). On est donc revenu à l'espace primaire, qui est ici celui de l'image au lieu d'être celui de l'objet, et en raison de la réciprocité de la transformation de Fourier $f'(x') \equiv f(x)$. Le système optique a donc reproduit une image identique à l'objet en effectuant deux transformations inverses schématisées ainsi :

$$\begin{array}{ccccc} f(x) & \rightarrow & F(\alpha/\lambda) & \rightarrow & f'(x') \equiv f(x). \\ \text{espace } (e) & & \text{espace } (E) & & \text{espace } (e) \end{array}$$

En réalité il n'en est pas tout à fait ainsi. Le système optique ne traite pas de la même façon toutes les amplitudes $F(\alpha)$: tout d'abord le fait qu'il est limité

lui fait exclure les valeurs de α extérieures à un certain intervalle (limitation); ensuite, il peut, à l'intérieur de cet intervalle, modifier les amplitudes complexes (aberrations et 'pondération'); enfin il peut, même à l'intérieur de l'intervalle, ne conserver qu'un nombre fini de valeurs discrètes de α (prélèvement ou 'sampling'). Ces trois actions pouvant être caractérisées par une fonction unique $G(\alpha/\lambda)$ (fonction pupillaire) qui transforme $F(\alpha/\lambda)$ en $F'(\alpha/\lambda) = F \cdot G$. La suite des opérations est alors

$$\begin{array}{ccccc} f(x) & \rightarrow & F(\alpha/\lambda) & \rightarrow & F \cdot G & \rightarrow & f'(x') \neq f(x). \\ \text{espace } (e) & & \text{espace } (E) & & & & \text{espace } (e) \end{array}$$

L'utilisation du théorème (4) donne d'ailleurs

$$f'(x') = f(x) \star g(x);$$

$g(x)$ étant la 'fonction d'appareil' qui n'est autre que la transformée de Fourier de $G(\alpha/\lambda)$. La fonction $G(\alpha)$ (ou $G(S)$) a donc joué ici exactement le même rôle que le gain du filtre $G(N)$ dans la transmission d'un signal fonction du temps. La correspondance est indiquée dans la deuxième ligne du tableau général placé à la fin de l'article.

La généralisation au cas à deux dimensions est immédiate. Aux deux variables d'espace de l'objet x et y dans l'espace (e) correspondent deux variables conjuguées dans l'espace (E) qui sont deux sinus d'angle α et β , ou deux fréquences spatiales S et T ; les transformations de Fourier sont définies par

$$F(\alpha/\lambda, \beta/\lambda) = F(S, T) = \iint f(x, y) \exp [-2\pi j(\alpha x + \beta y)/\lambda] dx dy.$$

Dans les processus que nous venons d'étudier c'est un système optique qui effectue lui-même la deuxième transformation de Fourier, et, le plus souvent le double processus de Fourier passe inaperçu, sauf si on agit sur lui de façon explicite comme dans l'expérience d'Abbe. Mais il arrive souvent qu'il n'existe pas de système optique capable d'effectuer cette seconde transformation: tel est le cas de l'examen des structures cristallines au moyen des rayons x ou électroniques, ou des tentatives de microscopie x. La seule information fournie sous forme physique à l'observateur est alors l'espace de Fraunhofer. On peut fixer cet espace par la photographie; la figure ainsi obtenue est appelée diffractogramme, ou plus souvent hologramme. Si l'on fait directement une photographie, on ne fixe que les modules des amplitudes, mais l'utilisation d'un fond cohérent ajouté à l'espace de Fraunhofer permet d'obtenir, au moyen de deux photographies, les deux composantes des amplitudes complexes.

On peut utiliser l'hologramme, soit en apprenant à interpréter directement dans l'espace (E) les informations qu'il contient, soit en opérant *a posteriori* la seconde transformation de Fourier pour revenir à l'espace (e) . La première méthode est celle qu'emploient le plus souvent les cristallographes. La deuxième méthode est appelée imagerie par reconstruction de front d'onde et fera, dans ce Congrès, l'objet d'une communication par Dr. El Sum. Disons seulement ici que la méthode employée est la méthode analogique qui simule le plus parfaitement possible l'opération que l'on n'est pas capable de faire avec le rayonnement utilisé:

elle consiste à utiliser le phénomène de Fraunhofer lui-même, en sens inverse, avec une radiation se prêtant mieux aux opérations de l'optique†. On pourrait évidemment, en principe, reconstituer l'image par une transformation de Fourier opérée par *voie numérique* à partir de l'hologramme. Mais, alors qu'une telle opération est réalisable dans le cas de problèmes à une dimension, elle devient redhibitoire dans le cas d'objets à deux dimensions un tant soit peu compliqués. J'ai insisté un peu longuement sur cette question de l'imagerie cohérente: c'est uniquement à cause de l'analogie étroite qui existe avec le procédé de spectroscopie par transformation de Fourier.

4. IMAGERIE INCOHÉRENTE

L'intervention des transformations de Fourier dans l'imagerie incohérente est beaucoup moins évidente: l'espace de Fourier n'y est pas matérialisé physiquement et ne se confond pas avec un espace de Fraunhofer. Cependant il est très tentant, là aussi, de décomposer l'objet en structures sinusoïdales et de chercher comment chacune d'elle est traitée par le système optique. Ceci peut se faire expérimentalement, indépendamment de toute relation entre le système optique et l'espace de Fourier conjugué de celui de l'objet. Cependant cette relation peut être explicitée, comme l'a indiqué Duffieux il y a déjà longtemps. Ici l'objet est décrit par une fonction $b=f(x,y)$ où b est une luminance. Dans l'espace de Fourier conjugué la transformée est $B=F(\alpha,\beta)$, qui n'est pas observable physiquement dans le dispositif. Mais tout se passe presque comme dans le cas de l'imagerie cohérente car le système fabrique lui-même la transformée de Fourier d'une fonction $F'=F \cdot G'$ de l'espace (E) ; mais, ici, G' n'est pas la fonction pupillaire elle-même telle qu'elle a été définie précédemment, mais une fonction dérivée de G par l'opération $G'=G \star G^*$. Contrairement au cas précédent on ne peut pas contrôler G' d'une façon arbitraire et rien d'analogue à l'expérience d'Abbe ne peut être imaginé.

Il n'est pas utile ici d'insister plus longuement sur cette question qui a été étudiée profondément par de nombreux chercheurs parmi lesquels Hopkins, et Wolf et Linfoot, qui ont, en particulier, examiné ce qui se passe dans les cas intermédiaires entre la cohérence totale et l'incohérence totale. Ce qui a été dit ici permet d'écrire la troisième ligne du tableau, en se bornant encore, pour simplifier, au cas unidimensionnel. L'espace (E) n'a ici aucune réalité physique et n'est pas un espace de Fraunhofer (voir le tableau à la fin de l'article).

5. SPECTROSCOPIE PAR TRANSFORMATION DE FOURIER

Nous arrivons enfin au cas de la spectroscopie et nous commençons par la dernière en date des méthodes, qui a fourni récemment des résultats spectaculaires. (voir par exemple: Fellgett [3], Gebbie [4], Strong et Vannasse [5], J. Connes et H. Gush [6]). Il n'est d'ailleurs pas tout à fait exact de dire que cette méthode

† Il n'a été fait allusion, dans ce paragraphe, qu'à un cas particulier de l'imagerie par reconstruction de front d'onde, qui nous sera utile par la suite. Mais la formation de l'hologramme à grande distance (ou dans le plan focal d'une lentille) n'est nullement nécessaire: si l'on opère à distance finie, l'équation de l'hologramme, donnée par la théorie de la diffraction de Fresnel, est plus compliquée; la reconstruction de l'image s'effectue de la même façon par le procédé analogique qui utilise la diffraction de Fresnel elle-même, en sens inverse. (Cf. Gabor, ref. [1] et Kirkpatrick and El Sum, ref. [2]).

est la dernière : en fait elle a été exploitée très timidement et grossièrement par Rubens et Wood en 1910 dans l'infra-rouge lointain. Cette méthode aurait d'ailleurs dû être la première de toutes, puisqu'aucun dispositif optique n'est nécessaire pour la mettre en œuvre, si ce n'est un interféromètre à deux ondes. Et, à l'heure actuelle, c'est encore la seule qui soit applicable dans certains domaines où les spectroscopistes ne sont encore que des primitifs.

Ce que le spectroscopiste cherche à connaître, c'est le 'spectre' de la lumière de la source, représenté par la distribution de la densité spectrale $b=f(\sigma)$ en fonction du nombre d'onde $\sigma=1/\lambda=\nu/c$: c'est la représentation de cette fonction qui constitue notre espace primaire (e). Or la transformée de Fourier de $f(\sigma)$ peut être obtenue très directement. En effet si on envoie la lumière dans un interféromètre à deux ondes quelconque (de préférence un interféromètre de Michelson) à différence de marche variable Δ , le flux qui émerge est

$$\phi \propto \int_0^\infty f(\sigma) d\sigma + \int_0^\infty f(\sigma) \cos 2\pi\sigma\Delta d\sigma.$$

La partie variable n'est autre que la transformée de Fourier (en cosinus), $F_c(\Delta)$ de $f(\sigma)$. Cette fonction $F_c(\Delta)$ que nous appellerons 'interférogramme' se situe dans un espace de Fourier (E) conjuguée de (e) où la variable est Δ ; il joue exactement le même rôle que l'hologramme dans l'imagerie cohérente et est matérialisable directement sous forme d'un enregistrement magnétique ou graphique. Pour souligner le fait que cet espace est matérialisé on pourrait par analogie avec le nom d'espace de Fraunhofer, l'appeler, par exemple, espace de Michelson†.

La situation est tout à fait comparable à celle où se trouve un opticien qui a produit la figure de diffraction de Fraunhofer de l'objet qu'il désire étudier, mais qui ne désire pas (ou ne peut pas) faire opérer la transformation réciproque par un système optique : il se contente alors d'enregistrer (photographiquement) son hologramme. Le spectroscopiste doit donc, comme dans ce cas, soit apprendre à interpréter directement les informations contenues dans l'interférogramme, soit opérer lui-même, *à posteriori*, la deuxième transformation de Fourier. La première méthode était employée sous forme directe par Rubens et Wood ; mais elle ne peut être utile que pour des spectres extrêmement simples. Elle a aussi été utilisée par Michelson lui-même sous le nom de méthode de visibilité des franges. Michelson utilisait non pas l'interférogramme lui-même, qu'on ne savait pas enregistrer à son époque, mais la courbe de visibilité des franges, qu'il mesurait visuellement et qui est à peu de choses près l'enveloppe de l'interférogramme. Ce faisant il perdait une grande partie de l'information et sa méthode n'était valable que pour des spectres simples respectant certaines

† On peut remarquer d'ailleurs que si Δ augmente linéairement avec le temps E ($\Delta=vt$), l'espace de Fourier devient un espace où la variable indépendante est t : à toute fréquence lumineuse dans le spectre correspond une fonction $F(t)$ sinusoïdale, et, évoquant les transformations du §2 on serait tenté de dire que l'espace (E) est identique à celui de la vibration lumineuse $X(t)$, l'espace (e) étant lui-même conjugué de Fourier de l'espace de $X(t)$. Mais cela ne serait vrai que si les vibrations étaient cohérentes, ce qui n'est pas le cas : la variable lumineuse étant une variable aléatoire, $f(\sigma)\{\langle \text{ni } \sqrt{[b(\sigma)]} \rangle\}$ n'est pas la transformée de Fourier de $X(t)$ mais seulement de sa fonction de corrélation $\langle X(t).X(t-\tau) \rangle$. Il est bien vrai, en effet, que $F(\Delta)$ n'est pas autre chose que $\langle X(t).X(t-\tau) \rangle$.

conditions de symétrie. Sa méthode, soumise aux mêmes conditions, a été portée à un haut degré de perfection par J. Terrien : elle donne d'excellents résultats pour les mesures de largeurs ou de profils de raies symétriques.

La deuxième méthode a été employée récemment par un certain nombre de chercheurs et consiste à effectuer complètement la deuxième transformation de Fourier. Pour effectuer cette deuxième transformation on peut songer soit à des procédés entièrement analogiques, utilisant par exemple la diffraction de Fraunhofer comme en imagerie cohérente, soit à des procédés semi-analogiques effectuant les intégrales par des circuits électriques pour toute une série de valeurs discrètes de Δ , soit à des procédés entièrement numériques remplaçant les intégrales par des sommes portant sur un nombre fini de valeurs de Δ . Les procédés entièrement analogiques sont moins indispensables ici qu'en imagerie cohérente car il ne s'agit que d'un problème à une dimension au lieu de deux : aussi ces procédés n'ont-ils fait l'objet d'aucune tentative. Une tentative est faite actuellement par P. Connes pour réaliser un calculateur semi-analogique, mais il est encore trop tôt pour dire quel en sera le succès : cette machine calculera véritablement les intégrales, en utilisant la suite continue des valeurs de Δ et pourra donner, avec une résolution élevée, des spectres exempts des complications que nous allons voir.

Tous les autres chercheurs utilisent maintenant des procédés purement numériques qui consistent à mesurer sur l'interférogramme un grand nombre N de valeurs $F_c(n\Delta_e)$ de F_c pour des valeurs équidistantes, $n\Delta_e$, de Δ : un calculateur numérique effectue ensuite la sommation

$$\sum_0^N F_c(n\Delta_e) \cos 2\pi n\Delta_e \sigma$$

qui peut remplacer l'intégrale

$$\int_0^{\Delta_{\max}} F_c(\Delta) \cos 2\pi \sigma \Delta d\Delta$$

si N est assez grand. L'analogie étroite qui existe avec l'imagerie cohérente à une dimension permet de voir immédiatement les inconvénients essentiels de cette façon d'opérer. Le fait de n'utiliser que N valeurs discrètes de $F_c(\Delta)$ remplace l'intégrale

$$\int_0^{\Delta_{\max}} F_c(\Delta) \cos 2\pi \sigma \Delta . d\Delta$$

par

$$\int_0^{\infty} F(\Delta) . G(\Delta) \cos 2\pi \sigma \Delta d\Delta$$

où $G(\Delta)$ est une fonction nulle en dehors de l'intervalle $(0, \Delta_{\max})$ ainsi qu'en tout point intérieur à cet intervalle, à l'exception des points $\Delta = n \cdot \Delta_e$. Ceci est équivalent à l'imagerie à une dimension donnée par une lentille recouverte d'un réseau de fentes infiniment fines†. Or on sait que, dans ces conditions on voit non pas une seule image de l'objet, mais toute une série d'images identiques

† Il s'agit, d'après les équations, de l'équivalence avec l'imagerie donnée par un système optique quand l'objet est éclairé en lumière cohérente. Mais l'équivalence est aussi valable, en ce qui concerne les positions des diverses images de l'objet, avec l'imagerie incohérente. C'est pourquoi il n'est pas nécessaire de préciser, pour en tirer les conséquences qui suivent, s'il s'agit d'imagerie cohérente et incohérente.

et équidistantes, correspondant aux différents ordres $0, \pm 1, \pm 2$, etc... des 'spectres' donnés par le réseau, comme le montre la figure 2. Si l'objet est étendu, ses différentes images se superposent et cet 'overlapping' peut rendre la représentation méconnaissable. La distance d'overlapping, Δx est inversement proportionnelle à la distance des traits du réseau, et la limite de résolution δx est inversement proportionnelle (avec la même constante) à la largeur couverte par le réseau. Le rapport $\Delta x/\delta x$ est ainsi égal à N , nombre de traits, ce qui signifie que l'objet ne doit pas être plus large que N fois la limite de résolution, ou encore que le nombre d'éléments discernables sans confusion dans l'objet ne peut pas dépasser N .

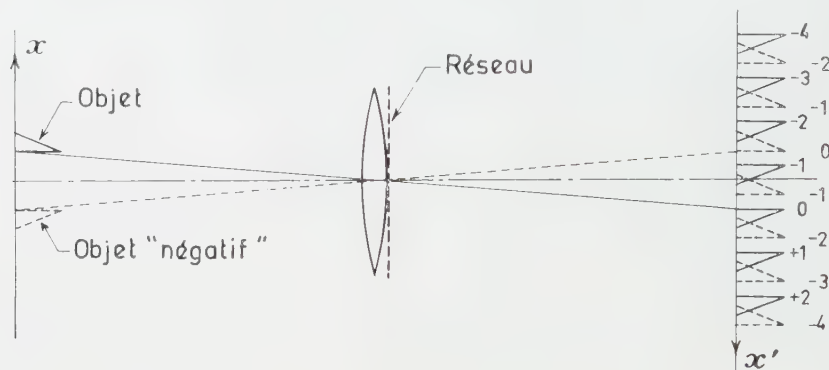


Figure 2

Au moyen de la correspondance $x \rightarrow \sigma$ et $\alpha \rightarrow \Delta$, les propriétés précédentes sont transposables à la spectroscopie par transformation de Fourier. On en déduit aisément les propriétés suivantes :

- (a) le nombre d'éléments spectraux discernables sans confusion est égal au nombre de points N relevés sur l'interférogramme.
- (b) le domaine spectral qu'il est ainsi possible d'étudier est

$$\Delta\sigma = N \cdot \delta\sigma = \delta\sigma \cdot \Delta_{\max}/\Delta_e = 1/\Delta_e$$

c'est à dire qu'il est égal à l'inverse de l'intervalle élémentaire de différence de marche, Δ_e , choisi sur l'interférogramme.

Il y a cependant une petite complication nécessaire pour rendre l'analogie complète et le résultat tout à fait correct. Nous avons vu, en effet, que l'interférogramme fournit la transformée de Fourier en *cosinus* du spectre $f(\sigma)$, et non pas sa transformée complète : on peut interpréter cette différence en disant que $F_c(\Delta)$ est la transformée complète, non pas du spectre $C=f(\sigma)$ mais de l'ensemble du spectre et de son 'image' $b_- = f(-\sigma)$ dans les fréquences négatives, de sorte que l'on manipule non pas $f(\sigma)$, mais $f(\sigma) + f(-\sigma)$. Dans l'analogie avec l'imagerie à une dimension, il faut donc considérer non pas un objet, mais l'ensemble de deux objets, symétriques par rapport à l'axe, comme l'indique la figure 2. Dans ces conditions, pour éviter toute confusion due à l'overlapping, il faut respecter au mieux les deux conditions suivantes :

- (a) Les images provenant de l'objet 'positif' et les images provenant de l'objet 'négatif' doivent s'intercaler exactement les unes entre les autres, ce qui impose une relation entre l'abscisse de l'objet et l'équidistance des fentes du réseau.

(b) L'objet ne doit pas être plus large que la limite de résolution δx multipliée par $N/2$ (et non pas par N): le nombre maximum d'éléments discernables est alors seulement $N/2$.

Ces deux conditions se transposent aisément au cas spectroscopique et se traduisent ainsi :

(a) L'équidistance Δ_e des points utilisés sur l'interférogramme ne doit pas être choisie arbitrairement: on trouve facilement qu'elle doit être $\Delta_e = \lambda_m(2K+1)/4$, λ_m étant la longueur d'onde moyenne de la région du spectre étudié.

(b) Le spectre ne doit pas occuper autour du nombre d'onde moyen σ_m un domaine plus large que $N/2$ fois la limite de résolution: le nombre maximum d'éléments spectraux discernables est seulement $N/2$, et l'ensemble est équivalent, à ce point de vue, à un réseau ayant $N/2$ traits ou à un Fabry-Perot de finesse $N/2$.




Pour éviter d'être gêné par la superposition (overlapping) il faut donc, soit prendre N très grand, ce qui allonge beaucoup les calculs, soit limiter la bande spectrale qui alimente le système. Une telle limitation est utilisée couramment avec les réseaux et les appareils de Fabry-Perot: elle se fait au moyen de filtres optiques ou de monochromateurs. On peut aussi employer ces procédés avec la méthode par transformation de Fourier, mais on dispose ici d'un moyen plus élégant. En effet, comme nous l'avons déjà dit, si on prend $\Delta = Vt$, l'interférogramme se présente comme un signal fonction du temps et à toute fréquence lumineuse $\nu = c\sigma$ correspond une fréquence 'électrique' $N = V\sigma = \nu \cdot V/c$ dans le 'spectre de fréquence' de l'interférogramme. Ce spectre, conjugué de Fourier de l'interférogramme se situe dans un espace (e) de même nature que l'espace primaire qui est celui de $b = f(\sigma)$: tout filtrage électrique dans cet espace est donc équivalent à un filtrage 'optique' dans l'espace des σ , et il a, de plus, l'avantage d'éliminer une partie du bruit propre du récepteur. Parmi toutes les opérations que l'on peut effectuer dans cet espace, grâce au degré de perfectionnement de la technique électronique, une opération particulièrement fructueuse a été indiquée par L. Mertz [7]: c'est un changement de fréquence qui permet de centrer le filtre électrique utilisé sur la fréquence zéro, et que L. Mertz a dénommé 'heterodyne spectroscopy'.

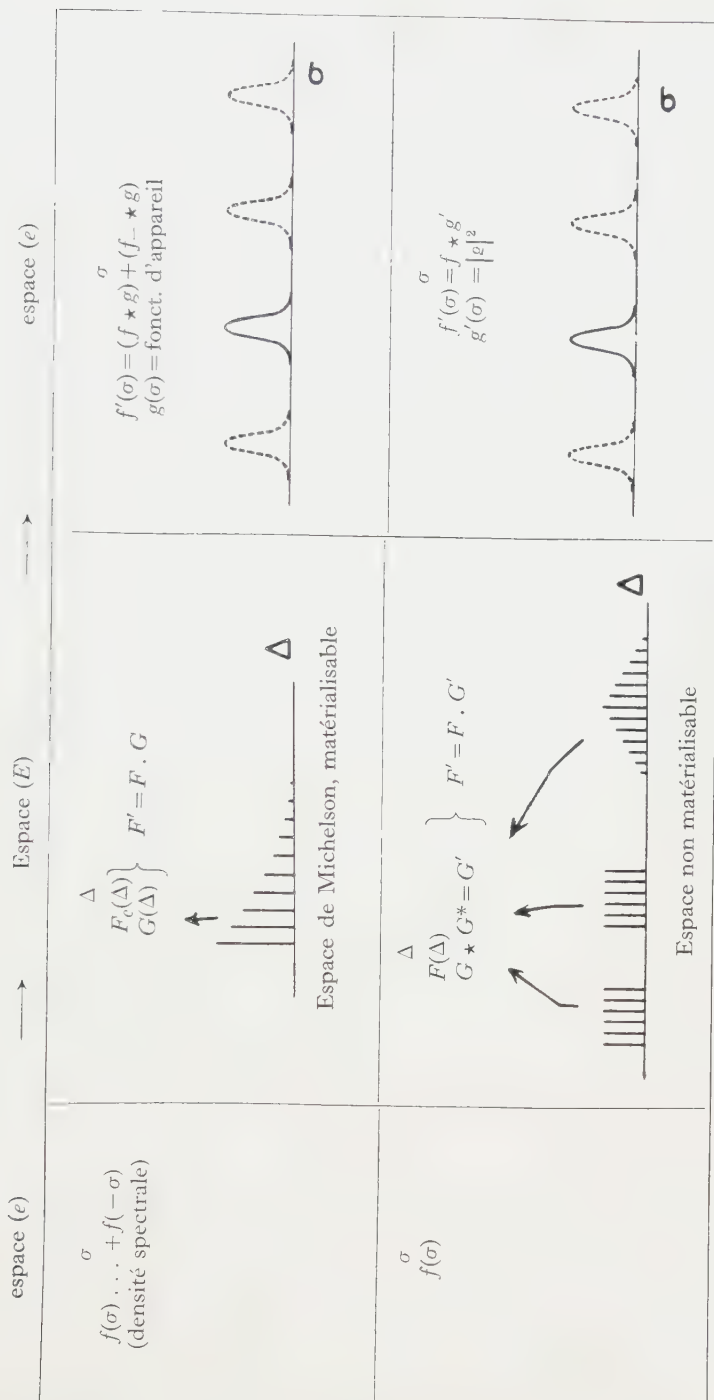
Dans ces remarques sur la spectroscopie par transformation de Fourier, je n'ai étudié que les aspects qui mettent en jeu le concept d'espace de Fourier et l'analogie avec l'imagerie, en particulier l'imagerie par reconstruction de front d'onde. Les résultats sont résumés dans la quatrième ligne du tableau.

La méthode possède des avantages fondamentaux considérables, qui ont été bien mis en évidence lors du Colloque de Bellevue [8], et sur lesquels il n'est pas nécessaire de revenir dans cet exposé.

6. LES METHODES SPECTROSCOPIQUES CLASSIQUES ET LA TRANSFORMATION DE FOURIER

Il est naturel de chercher à comparer, du point de vue des concepts de Fourier, le fonctionnement des dispositifs spectroscopiques classiques à la spectroscopie par transformation de Fourier. Cette comparaison est suggérée en particulier par la similitude qui existe entre les propriétés d'overlapping dans les deux types de méthode. La situation est assez analogue à ce qui se passe quand, ayant bien

espace (e)	Espace (E)	espace (e)
$f(t)$	N $F(N)$ $G(N)$ (réponse fréquentielle) $\left. \vphantom{\begin{matrix} F(N) \\ G(N) \end{matrix}} \right\} F' = F \cdot G$ 	$f'(t) = f \star g$ $g(t) = \text{réponse impulsionnelle}$
$f(x)$ (amplitude complexe)	α $F(\alpha)$ $G(\alpha)$ (Fonct. pupill. ou transmiss. de fréquences) $\left. \vphantom{\begin{matrix} F(\alpha) \\ G(\alpha) \end{matrix}} \right\} F' = F \cdot G$  (Espace de Fraunhofer, matérialisable)	$f'(x') = f \star g$ $g(x') = \text{fonct. d'appareil ou réponse ponctuelle}$
$f(x)$ (luminance)	α $F(\alpha)$ $G \star G^* = G'$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} F(\alpha) \\ G \star G^* \end{matrix}} \right\} F' = F \cdot G'$ (ou $S = \alpha/\lambda$)  Espace non matérialisable	$f'(x') = f \star g'$ $g'(x') = g ^2$ (réponse ponctuelle)



compris les processus de Fourier de l'imagerie cohérente ou par reconstruction de front d'onde, on cherche à étendre ces notions à l'imagerie incohérente: Les résultats sont aussi très analogues. Cette étude est actuellement entreprise par Mme J. Connes: malheureusement les résultats étaient encore trop incomplets pour qu'il fut possible de les présenter dans une communication au Congrès, et je ne puis ici qu'en donner l'esprit général. On peut dire, assez grossièrement, que les dispositifs classiques tels que les prismes, réseaux ou systèmes interférentiels à ondes multiples effectuent eux-mêmes la transformation de Fourier de $F_c(\Delta)$ ou, plus exactement de $F(\Delta) = \int f(\sigma) \exp(-2\pi j\sigma\Delta) d\sigma$ (en n'oubliant pas que $F_c(\Delta)$ représentait seulement la transformée *en cosinus* de $f(\sigma)$). On doit considérer un espace de Fourier (E) conjugué de l'espace (e) du spectre $f(\sigma)$: dans cet espace $F(\Delta)$ doit être multiplié par une fonction $G'(\Delta)$ qui tient compte de la limitation, de la pondération, et du 'sampling'. Mais ici l'espace de Fourier (E) n'est pas matérialisé, et $G'(\Delta)$ n'est pas la fonction $G(\Delta)$ que l'on applique physiquement aux rayons qui interfèrent avec la différence de marche Δ , mais la fonction $G' = G \star G^*$. Dans les appareils à prismes, par exemple, il n'y a pas de 'sampling' et la fonction G est continue. Mais dans les appareils à réseau, ou dans l'interféromètre de Fabry-Perot, on n'utilise que des valeurs discrètes de Δ , correspondant aux faisceaux multiples qui interfèrent et la fonction G est non nulle seulement aux points $\Delta = n \cdot \Delta_e$; on a donc exactement le même 'sampling' que dans le traitement numérique des interférogrammes. Le système optique effectue ensuite lui-même la transformation de Fourier de $F \cdot G'$, tout comme les systèmes optiques dans l'imagerie incohérente. A de petits détails près on peut donc dire que les méthodes classiques sont à la spectroscopie par transformation de Fourier ce que l'imagerie incohérente est à l'imagerie par reconstruction de front d'onde. Un de ces petits 'détails' est que les méthodes classiques traitent la transformée complète de $f(\sigma)$ alors que la méthode par transformation de Fourier ne traite que la transformée en cosinus, ce qui introduit les 'spectres images' $f(-\sigma)$ et introduit le facteur $\frac{1}{2}$ dans l'expression du nombre d'éléments discernables et la nécessité de choisir convenablement la valeur de Δ_e . Les résultats sont résumés dans la cinquième ligne du tableau.

Grâce à cette comparaison, une certaine unité se trouve introduite, sous le signe des concepts de Fourier, dans la théorie des méthodes spectroscopiques.

The application of the concept of Fourier space, familiar in communication theory, to the field of optical imagery is described. The correspondence of the different variables and functions is discussed for the cases of coherent imagery, imagery by wave-front reconstruction, and incoherent imagery.

A relationship is established between imagery by wave-front reconstruction and the new spectroscopic method in which the spectrum is reconstructed by the Fourier transformation of the interferogram obtained by a double beam interferometer.

This relationship clarifies the essential characteristics of the method. In particular when the Fourier transform is obtained numerically from a number of equidistant points in the interferogram, a superposition of spectra is obtained, similar to that given by a grating or a Fabry-Perot: the effect is analysed by comparison with the imagery of a monochromatic object by a grating. Finally the relationship is discussed between different methods of spectroscopy and typical optical imagery.

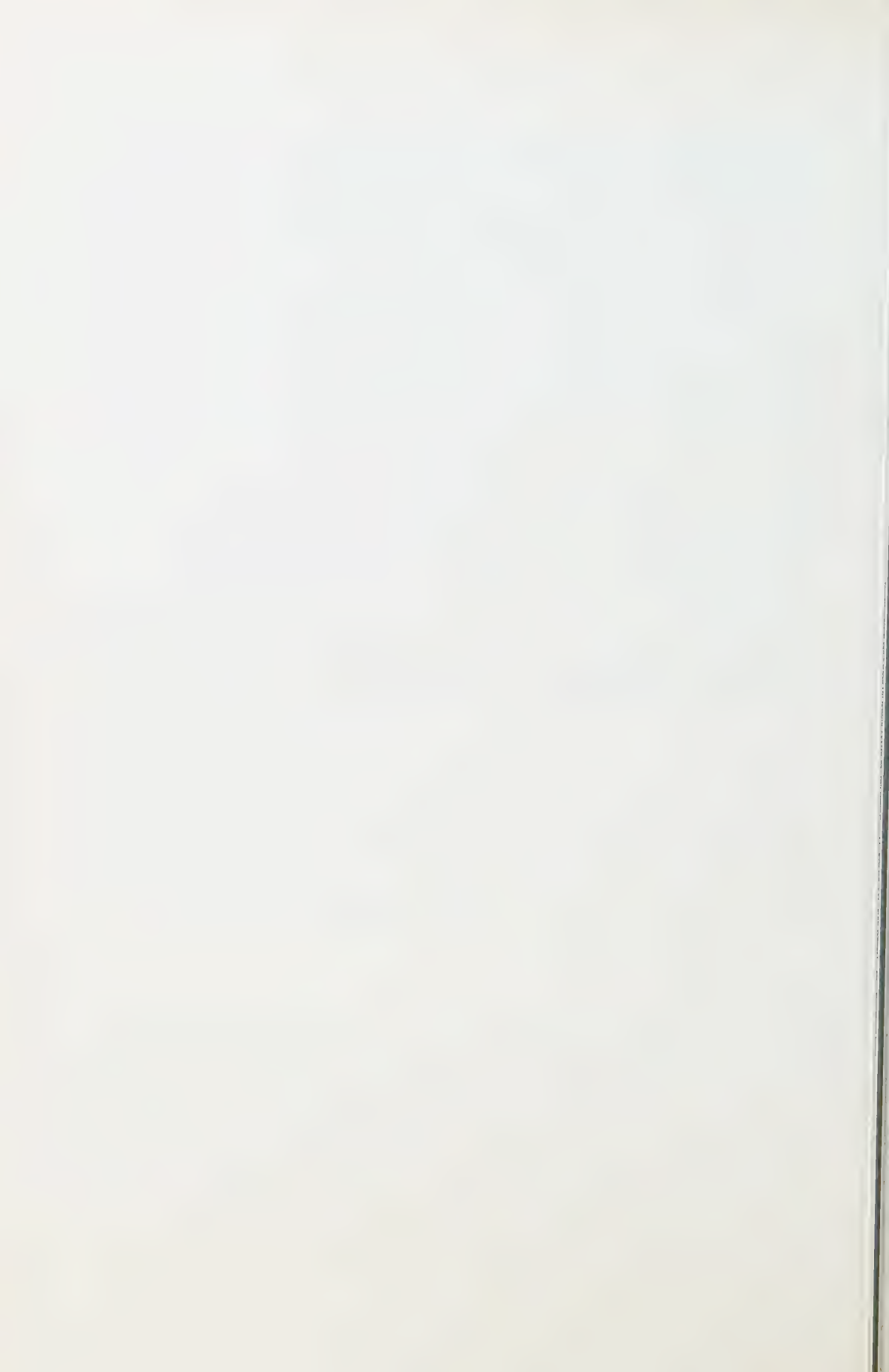
Die Vorstellung des Fourierraumes ist von der Nachrichtentechnik auf das Gebiet der optischen Abbildungslehre übertragen worden. Die Entsprechungen der verschiedenen Variablen und Funktionen werden für die kohärente Abbildung, für die Abbildung durch Rekonstruktion der Wellenfront und für die inkohärente Abbildung angegeben.

Es läßt sich damit eine engere Beziehung zwischen der Abbildung durch Rekonstruktion der Wellenfront und einem neuen spektroskopischen Verfahren aufstellen, bei dem das Spektrum mittels der Fourier-Transformation des Interferogrammes gefunden wird, das man aus einem Doppelwellen-Interferometer erhält.

Diese Verknüpfung erleichtert sehr stark das Verständnis für die wesentlichen Eigenschaften dieses neuen Verfahrens. Wenn man insbesondere die Fouriertransformation auf numerischem Wege mittels einer bestimmten Zahl äquidistanter Punkte auf dem Interferogramm vornimmt, bekommt man eine Überlagerung von Spektren, genau wie bei der Anwendung eines Gitters oder einer Fabry-Perot-Platte. Dieser Effekt wird genauer verglichen mit der Abbildung eines monochromatischen Objektes durch ein Gitter. Schließlich wird auf die Beziehungen zwischen den verschiedenen spektroskopischen Verfahren und den verschiedenen Arten der optischen Abbildung eingegangen.

REFERENCES

- [1] GABOR, D., 1949, *Proc. roy. Soc. A*, **197**, 454; 1951, *Ibid.*, B, **464**, 443.
- [2] KIRKPATRICK, P., et EL SUM, H. M. A., 1956, *J. opt. Soc. Amer.*, **46**, 825.
- [3] FELLGETT, P., 1958, *J. phys. Radium*, **19**, 187.
- [4] GEBBIE, H. A., 1958, *J. phys. Radium*, **19**, 230; 1959, Symposium on Interferometry, Teddington.
- [5] STRONG, J., et VANASSE, G. A., 1958, *J. phys. Radium*, **19**, 195; 1959, *J. opt. Soc. Amer.*, **49**, 844.
- [6] CONNES, J., et GUSH, H., 1959, Symposium on Interferometry, Teddington.
- [7] MERTZ, L., 1959, 5ème Congrès de la Commission Internationale d'Optique, Stockholm.
- [8] COLLOQUE SUR LA SPECTROSCOPIE INTERFERENTIELLE, 1958, *J. phys. Radium*, **19**, 198; 1958, et Service des Publications du C.N.R.S., Paris.



Mesure pyrométrique du seuil visuel absolu

par E. BAUMGARDT

Laboratoire de Physiologie Générale, Sorbonne, Paris
(Groupe de Recherches de Physiologie des Sensations)

(Received 19 November 1959)

On mesure le seuil visuel absolu en quanta lumineux de $520\text{ m}\mu$, au niveau de la cornée. L'énergie du faisceau est déterminée au moyen d'une méthode pyrométrique très précise. Les résultats confirment *grosso modo* ceux de Hecht, Shlear et Pirenne. On est autorisé à conclure que l'absorption de sept quanta par les récepteurs rétiniens peut suffire à déclencher une sensation liminaire.

1. DÉFINITION DU SEUIL ABSOLU

Le terme 'seuil' peut désigner une intensité mais également une quantité stimulante. Le propre du seuil est d'éveiller une sensation liminaire avec une certaine probabilité (si rien n'est dit à ce sujet, cette probabilité est 0,5 ou 50 fois sur 100 expériences). Le terme 'absolu' change de sens avec celui qu'on attribue au terme 'seuil'. Si ce dernier est une intensité, 'seuil absolu' veut dire "intensité déclanchant la sensation liminaire en absence de toute sensation de même qualité". Si le seuil est une quantité, c'est ce terme qui remplace le terme 'intensité' dans la définition qui précède.

En vision, les conditions expérimentales auxquelles correspond le *seuil absolu quantité* sont très différentes de celles qui définissent le *seuil absolu intensité*. Pour atteindre le premier, on doit opérer dans les conditions où la rétine utilise au mieux chaque quantum lumineux (photon) qui la frappe. Au contraire, le seuil absolu intensité est atteint lorsque le flux de photons par unité d'aire rétinienne et par unité de temps devient minimum.

Dans le premier cas, l'efficacité globale du système visuel est maximum et l'on constate que les paramètres 'durée' et 'diamètre angulaire' du stimulus ne peuvent dépasser certaines limites.

Dans le second cas, ces paramètres prennent des valeurs beaucoup plus élevées, tout en étant limités vers le haut, et l'efficacité globale du système visuel est très médiocre.

L'information que peut fournir la connaissance du seuil absolu intensité est donc brouillée par des interactions spatiales et temporelles complexes. Au contraire, le seuil absolu quantité informe sur les conditions d'utilisation optimum des photons, c'est-à-dire sur les valeurs que peuvent prendre les paramètres 'diamètre angulaire' et 'durée du stimulus'. Ce seuil caractérise les événements rétiens discrets qui sont à l'origine des processus nerveux aboutissant à l'éveil de la sensation. Pour cette raison nous mesurons des seuils absolus quantité et les exprimons en photons.

2. QUELQUES REMARQUES D'ORDRE GÉNÉRAL SUR LA MESURE DES SEUILS

La mesure du seuil absolu rencontre quelques difficultés spécifiques. L'une d'entre elles est commune à toutes les mesures de seuil: c'est la *fluctuation instantanée du seuil*.

Lorsqu'on présente au sujet un stimulus nettement supraliminaire, plusieurs fois de suite, il le voit chaque fois. Quand on fait baisser l'intensité du stimulus, le sujet ne le voit plus chaque fois. Si, à une intensité stimulante constante correspondait une quantité d'énergie constante au niveau rétinien, ce phénomène serait dû uniquement à une variabilité biologique de la sensibilité visuelle du sujet. Mais on sait que l'émission lumineuse, de même que l'absorption, sont des phénomènes statistiques et aléatoires. En effet, on estime que chacun des systèmes discrets desquels se compose le filament de la lampe émettrice possède une certaine probabilité d'émettre un photon pendant un laps de temps donné. Il est impossible de savoir d'avance combien de photons seront émis pendant la durée d'un éclat, par tous ces systèmes indépendants l'un de l'autre. Il s'ensuit qu'un éclat lumineux produit dans des conditions physiques contrôlées et maintenues constantes le plus rigoureusement possible, ne peut pas, en général, amener au niveau rétinien un nombre constant de photons. Il y a fluctuation physique de ce nombre. Cette fluctuation (f) se produit autour du *nombre moyen* (m) de photons. Son importance relative (f/m) est faible lorsque m est grand, mais peut devenir très importante, lorsque m atteint des valeurs de l'ordre de 10 ou moins. Ainsi par exemple, lorsque $m=5$, sur 1000 éclats, 40 environ contiennent 0 ou 1 photon, et 20 éclats environ contiennent 13 photons ou davantage. Ces précisions numériques sont dérivées de l'équation de Poisson (loi des petits nombres). Appliquée à notre problème, celle-ci fournit la probabilité P_x que x photons soient absorbés effectivement au cours d'une stimulation particulière si m est le nombre moyen absorbé par stimulation:

$$P_x = \frac{\exp(-m)m^x}{x!} \quad (1)$$

Il a paru utile de vérifier l'hypothèse que la loi de Poisson décrit réellement la fluctuation d'un petit nombre de photons. Grâce à l'emploi d'une photomultiplicatrice à 20 étages à bruit de fond extrêmement faible (8 électrons par seconde), Baumgardt [1] a pu démontrer que la fluctuation des photons absorbés par la photocathode est conforme à celle prévue par la loi de Poisson.

La fluctuation instantanée du seuil absolu peut ainsi s'expliquer par la seule fluctuation physique du stimulus. Mais à celle-ci se superpose une fluctuation lente d'origine biologique. La mesure précise d'un seuil dure assez longtemps. Quelque soit la méthode employée, on ne saurait guère obtenir un seuil avec moins de 80 à 400 observations, selon le degré de précision qu'on exige. D'autre part, on est obligé d'espacer les observations de quelques secondes. La durée de l'opération se situe donc entre 5 et 30 min environ.

Pendant une période d'observation aussi longue, la sensibilité de chaque observateur subit des fluctuations. Lee *et al.* [2] et Bornschein [3] ont constaté l'existence de rythmes de la sensibilité sur certains sujets. Ces rythmes sont de l'ordre de quelques minutes. D'autres sujets présentent des variations non rythmiques, mais également lentes. Chez nos observateurs les plus stables, la variation totale de la sensibilité ne dépasse pas 0,1 unités logarithmiques (25 pour cent) pendant une séance de 1 heure, mais atteint chez les autres

0,2 unités (60 pour cent). Il est donc indispensable de procéder à un certain nombre de séances pour chaque observateur.

Le seuil le plus bas est plus caractéristique d'un observateur que son seuil moyen. En effet, le seuil le plus bas correspond à la limite du fonctionnement physiologique rétinien et tous les facteurs d'ordre supérieur ne peuvent qu'entraver cette sensibilité maximum, en brouillant un message nerveux qui, par définition, est le plus faible pouvant engendrer une sensation.

Evidemment, un seuil anormalement bas peut être le fruit d'une certaine fertilité d'imagination de l'observateur qui peut croire voir sans en être absolument certain. Il est bon de souligner que même les observateurs les plus stables et les plus expérimentés commettent de telles erreurs, bien que très rarement. Il faut que l'expérimentateur connaisse l'incidence sur ses résultats de ces défauts de fidélité de ses sujets. D'où la nécessité d'user de beaucoup de pièges (stimulations nulles) afin de connaître très exactement le degré de fidélité de ses sujets.

Barlow [4] demande à un observateur de répondre aux stimulations par 'vu', 'non vu' ou 'peut-être'. Il intercale 300 pièges entre les présentations et note que son sujet ne répond jamais par 'oui' à un piège mais bien 3 fois par 'peut-être'. Barlow peut donc construire deux courbes de réponse (statistiques de 'vu' en fonction de la quantité stimulante). En définissant le seuil, comme d'habitude, par la quantité lumineuse à laquelle correspond 50 pour cent des réponses 'vu', il montre que le seuil obtenu en comptant les réponses 'peut-être' comme des réponses 'vu' est 25 pour cent bas que le seuil calculé à partir des seules réponses 'vu'. Barlow définit la fidélité (reliability) du sujet par le pourcentage des réponses 'vu' consécutives à des pièges. Il a donc démontré qu'une fidélité de 1 pour cent peut faire baisser le seuil de 25 pour cent. Evidemment, il est difficile de connaître avec une grande précision la fidélité d'un bon observateur. En effet, si la fidélité est de l'ordre de $5^0/_{00}$, il faudrait 5000 pièges pour la déterminer à $\pm 1^0/_{00}$ près. Or, cela frise l'impossible et explique que l'expérimentateur se contente généralement de quelques dizaines ou, au plus, de quelques centaines de pièges pour juger de la fidélité d'un observateur. On conçoit que là réside un élément d'incertitude qui pèse sur chaque tentative de déterminer un seuil avec une grande précision. L'exemple suivant permet de se faire une idée chiffrée de cette incertitude.

Notre observateur B. H. n'a jamais donné une fausse réponse 'vu' à l'un des 320 pièges qui lui ont été présentés au cours de toutes les expériences. Nous devons donc lui attribuer un taux de fidélité zéro. Mais quelle est la marge d'imprécision d'une telle qualification? Supposons que nous ayons pu lui présenter 100 000 pièges et qu'elle ait répondu 'vu' 625 fois. S'il en était ainsi, son taux de fidélité serait $6,25^0/_{00}$. En moyenne, elle donnerait donc 2 fausses réponses 'vu' à 320 pièges, mais dans l'expérience particulière où elle nous a servi, elle n'a fourni aucune fausse réponse à 320 pièges. Est-ce un comportement improbable? La réponse est négative. Pour s'en convaincre, il suffit de consulter une table de la loi de Poisson. On y lit que pour une moyenne $m=2$, la probabilité que la variable prenne la valeur zéro est 0,135. Cela signifie qu'il y avait une chance comprise entre $1/7$ et $1/8$ pour que notre observateur B. H. réponde zéro fois 'vu' à 320 stimuli pièges tout en étant caractérisée par une fidélité de taux $6,25^0/_{00}$. Si son taux de fidélité était égal à $9,38^0/_{00}$, la probabilité de répondre zéro fois 'vu' à 320 pièges tomberait à moins de 5 pour cent. On

peut donc raisonnablement considérer que le taux de fidélité réel de l'observateur B. H. est inférieur à 1 pour cent. Si nous avons pu poser 1000 pièges à B. H. et si elle n'avait répondu 'vu' à aucun d'eux, nous pourrions admettre que son taux de fidélité est inférieur à $3^0/_{00}$, car la probabilité de répondre 'vu' zéro fois à 1000 pièges est inférieur à 5 pour cent, lorsque le taux de fidélité est $3^0/_{00}$.

Une autre difficulté, celle-ci spécifique de la mesure du seuil en adaptation à l'obscurité, réside dans le fait que ce seuil est excessivement bas. Hecht *et al.* [5] indiquent une moyenne de l'ordre de 100 photons de $510\text{ m}\mu$ de longueur d'onde au niveau de la cornée. Aucun instrument ne permet la mesure précise d'une si faible quantité d'énergie, ne serait-ce que parce que les fluctuations d'ordre physique y sont relativement très importantes et atteignent souvent 25 pour cent. Au contraire, ces fluctuations deviennent pratiquement insignifiantes lorsqu'on opère avec des quantités d'énergie mille fois ou un million de fois supérieures. On interpose donc, entre le test et l'œil du sujet, des filtres gris dont on a mesuré la densité auparavant. Lors de la mesure de l'énergie absolue, on remplace l'œil par un récepteur de radiation et enlève les filtres. Nous reviendrons sur les détails de cette opération au paragraphe suivant.

Pour déterminer le nombre de photons atteignant la cornée, il importe de maintenir constante l'émission de la source lumineuse utilisée. Puisque l'émission lumineuse varie selon une loi à puissance élevée avec le courant alimentant la source, la mesure de ce courant doit être particulièrement précise.

Finalement le choix du récepteur de radiation pose un problème. La meilleure façon d'opérer serait sans doute de comparer le test avec un corps noir, seul étalon sûr. Ce n'est pas facilement réalisable et c'est pourquoi on peut se contenter, par exemple, d'une thermopile étalonnée avec un corps noir. C'est d'ailleurs ainsi qu'ont opéré Hecht et collaborateurs.

Nous avons cherché à répéter l'expérience de Hecht *et al.* avec la plus grande précision possible. Dans ce but, nous avons étalonné tous nos filtres et coins avant et après l'expérience. D'autre part, nous avons préféré à l'emploi de la thermopile celle d'un pyromètre étalonné directement à l'aide d'un corps noir. Cet équipement provient du Laboratoire des Echanges Thermiques à Bellevue, du Professor Ribaud, et a été conçu par lui-même. Nous estimons que notre méthode est susceptible d'une précision et d'une stabilité au moins aussi grande que celle de Hecht *et al.* et, de ce fait, permet un contrôle valable de leurs résultats.

3. TECHNIQUE

L'expérience se déroule en deux temps. La première partie consiste à déterminer la densité des filtres et coins gris qu'il faut interposer entre la source quasi monochromatique et l'œil de l'observateur pour que le seuil soit atteint. La constance du flux lumineux est contrôlée avant et après chaque séance avec une cellule photoélectrique débitant sur un galvanomètre.

La seconde partie de l'expérience est dévolue à la mesure pyrométrique de l'énergie du rayonnement quasi monochromatique qui, en absence des filtres et coins gris, serait tombée sur l'œil de l'observateur. Connaissant cette énergie, il suffit de la diviser par l'atténuation due aux filtres et coins, pour calculer l'énergie liminaire. Le seuil exprimé en photons s'obtient en divisant cette dernière énergie par celle que représente un photon.

Dans les deux expériences, le seul filtre inamovible est un filtre interférentiel Balzers B.20 dont la transmission maximum se situe à $520\text{ m}\mu$ et dont la bande de transmission, très étroite, est reproduite par la figure 2.

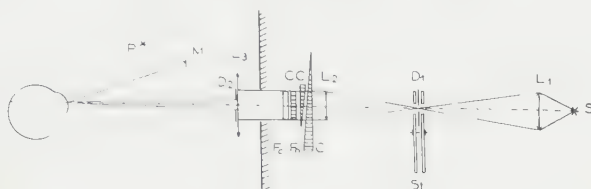


Figure 1. Schéma du stimulateur lumineux. La lumière blanche émise par la lampe à ruban de tungstène S est focalisée au niveau du diaphragme D_1 et du secteur tournant S_t au moyen du système optique L_1 . Le faisceau émergent de D_1 est rendu quasi parallèle par la lentille L_2 et traverse un coin gris C et un contre-coin CC , puis un filtre gris F_n et un filtre interférentiel F_c . Le diaphragme D_2 délimite le champ de l'observateur dont l'oeil reçoit la lumière passant par D_2 en projection maxwellienne, grâce au système optique L_3 . Le miroir M reflète l'image du point de fixation rouge P .

3.1. Mesure du seuil absolu: méthode psychophysique

L'opérateur et l'observateur se trouvent dans deux laboratoires adjacents séparés par un mur. La source de stimulation est une lampe à ruban de tungstène alimentée en courant redressé et filtré. Grâce à un stabilisateur électronique, son courant est maintenu à 14 A avec une précision de $\pm 0,75\%$. Cela détermine une émission lumineuse constante à $\pm 0,4$ pour cent près.

Un système optique L_1 esquissé schématiquement dans la figure 2 forme l'image du ruban de tungstène très près du plan du secteur tournant S_t et un diaphragme circulaire D_1 en isole la partie centrale. Le faisceau divergent est rendu presque parallèle par la lentille L_2 et traverse ensuite un coin photométrique C , un contre-coin CC , un filtre interférentiel quasi monochromatique F_c et un filtre gris F_n , et entre dans la pièce totalement obscurcie, où l'observateur s'est adapté pendant 50 min. Le système optique L_3 muni d'un diaphragme D_2 projette l'image du diaphragme D_1 dans le plan de la pupille du sujet dont la

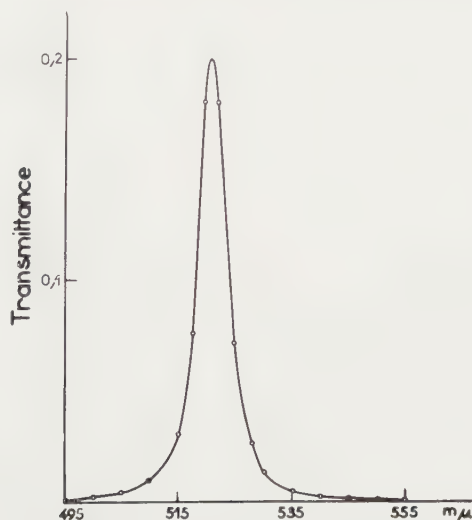


Figure 2. Transmittance du filtre interférentiel Balzers B.20- $520\text{ m}\mu$.

tête est immobilisée par une empreinte dentaire (vision maxwellienne). Il importe de s'assurer que le faisceau est bien centré sur la pupille. Le sujet expérimenté s'en assure facilement par tâtonnement—l'empreinte dentaire peut, en effet, être déplacée dans tous les sens. Mais l'opérateur peut, s'il le juge nécessaire, s'en convaincre objectivement, avant le début de l'adaptation.

Les stimuli sont délivrés sous forme d'éclats de 25 msec de durée. Le choix de cette durée se justifie selon l'observation de Baumgardt et Hillmann [6] que dans la rétine extrafovéale (15° à 20°) le seuil absolu demeure constant lorsqu'on opère par éclats de 100 msec de durée ou moins, le diamètre angulaire de ces stimuli pouvant atteindre au moins 8° . La durée de l'exposition est réglée par un dispositif à 2 secteurs tournants. Celui-ci assure des ouvertures de durée rigoureusement constante et permet d'opérer avec des stimuli de durée comprise entre 1 msec et 2 sec. Un dispositif à relais électromagnétiques et à cames permet à l'observateur de déclencher un stimulus unique dont l'intensité est réglée par l'opérateur. Il peut aussi bien déclencher des séries de stimuli espacés de 5 sec. Des signaux acoustiques déclenchés par une came fixée sur l'un des secteurs tournants l'avertissent deux secondes avant le passage du stimulus et immédiatement après.

L'angle visuel du stimulus est déterminé par le diamètre du diaphragme D_2 et la distance entre D_2 et l'œil du sujet. Nous avons utilisé deux valeurs de cet angle: $18'$ et $39,8'$. Ces valeurs sont inférieures à la valeur limite à partir de laquelle le rendement baisse et le seuil augmente. Il n'est pas aisé de mesurer avec précision cette limite. Toutefois, nos propres mesures [7] et celle de Graham et Margaria [8] montrent que cette limite est supérieure à $45'$ et atteint peut-être 1° .

Le sujet fixe un point rouge de faibles dimensions angulaires et d'intensité juxtaliminaire. Il règle lui-même cette intensité de manière à n'éprouver juste pas de difficultés de fixation dans les conditions de l'expérience. Grâce à l'utilisation du miroir M , la distance œil-point de fixation peut être rendue égale à la distance œil-diaphragme de champ (D_2).

Averti par l'opérateur qu'il peut commencer dès qu'il le désire, le sujet déclenche une série de 10 présentations auxquelles 4 stimulations nulles sont mêlées dans un ordre variable. Cette proportion inusitée de pièges nous permet de définir avec une précision raisonnable la fidélité de nos observateurs. D'un autre côté, elle contribue à allonger la séance ce qui rend plus variable la sensibilité du sujet. On peut déterminer le seuil en interpolant linéairement entre 4 valeurs du stimulus dont 2 supraliminaires et 2 autres infraliminaires, tout en présentant chaque valeur 20 fois au total. Nous avons également employé l'interpolation entre une valeur supraliminaire et une valeur infraliminaire, chacune présentée 40 fois au total. Ni l'une ni l'autre de ces deux méthodes ne nous a fourni des résultats systématiquement différents de ceux qu'on obtient à l'aide d'une courbe de réponse (voir figure 3). Nous avons donc enregistré une seule courbe de réponse par sujet et tous les autres seuils ont été obtenus par interpolation linéaire, chacun étant le résultat de 80 présentations auxquelles sont mêlés 32 pièges. Dans les courbes de réponse, chaque point désigne la proportion des 'vu' relativement à 50 stimuli auxquels 20 pièges sont mêlés.

La figure 3 montre qu'aux courbes de réponse on peut associer des valeurs de n allant de 6 à 8. Cette association a été utilisée notamment par Hecht *et al.* ;

elle lie la pente d'une fonction de Poisson au nombre n de quanta lumineux devant être absorbés dans les récepteurs pour que la sensation liminaire puisse s'établir. L'hypothèse sous-jacente peut se résumer comme suit: chaque fois où n ou davantage quanta sont absorbés dans les récepteurs, une sensation lumineuse s'établit. Lorsque moins de n quanta sont absorbés, aucune sensation n'a lieu. Or, la probabilité P_x que x photons soient absorbés effectivement au cours d'une expérience particulière, si m est le nombre moyen de photons absorbés par éclat est

$$P_x = \frac{\exp(-m)m^x}{x!}, \quad (1)$$

où x entier et x et m positifs.

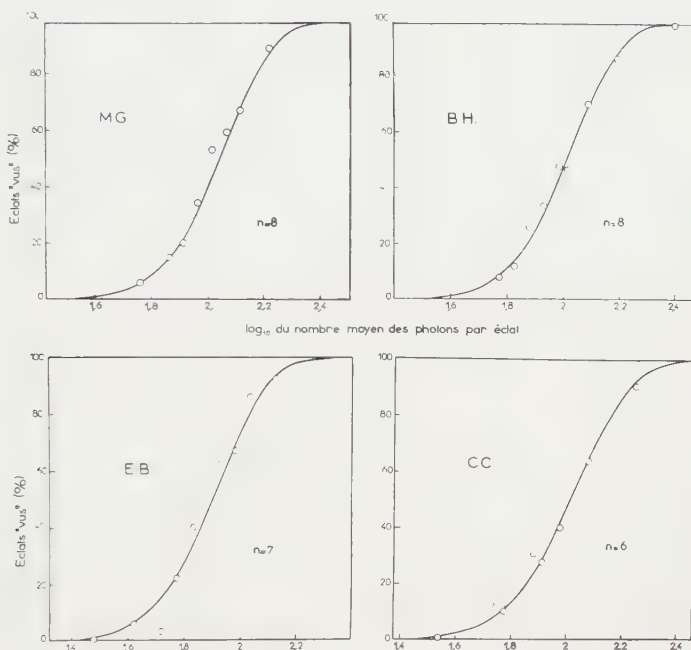


Figure 3. Courbes de réponse de 4 sujets. Les courbes sont les intégrales des statistiques de Poisson correspondant aux paramètres 6, 7 et 8. Les cercles sont les fréquences de 'vu' observées.

On en déduit la probabilité que n ou davantage de quanta soient absorbés, m étant l'absorption moyenne :

$$P_n = \sum_{x=n}^{\infty} P_x = 1 - \sum_{x=0}^{n-1} P_x = 1 - \sum_{x=0}^{n-1} \frac{\exp(-m)m^x}{x!}. \quad (2)$$

On peut donc interpréter la courbe de réponse comme la fonction qui décrit la probabilité de voir le stimulus. Cette courbe est alors une courbe de Poisson de paramètre n , sa pente étant déterminée par ce seul paramètre. Lorsque $m=n$, P_n varie entre 0,63 et 0,50 quand n tend de 1 vers infini. Pour les valeurs de n comprises entre 6 et 8, on peut, avec une bonne approximation; poser n égal à la valeur m qui produit 55 pour cent de réponses 'vu'.

Hecht et autres attribuent une assez grande importance aux valeurs de n ainsi trouvées et nous-mêmes les avons suivis. Il nous semble pourtant, à la lumière d'une analyse plus serrée des points de mesure obtenus par eux et repris

et commentés surtout par Pirenne et Marriott [9] que ces valeurs ne sont pas toujours très bien définies. Ceci est d'ailleurs vrai aussi bien en ce qui concerne nos propres valeurs. Plusieurs interprétations sont souvent possibles et pourtant les courbes choisies par Hecht et autres sont les meilleures dont ils disposent (voir Pirenne et Marriott). Il nous semble donc prudent de considérer les valeurs de n ainsi déterminées comme seulement susceptibles de fournir un ordre de grandeur de n . Cette réserve s'applique évidemment aussi à nos propres courbes de réponse.

3.2. Mesure du seuil au niveau cornéen—Méthode pyrométrique

Le principe de cette mesure en énergie absolue est la comparaison avec une luminance tare, d'une luminance inconnue. Dans le pyromètre de Ribaud à disparition d'un filament tare, on compare à ce dernier l'image réelle dont on désire connaître la température de luminance et, partant, l'énergie. Pour ce faire, nous avons étalonné le pyromètre avec le même filtre interférentiel utilisé pour la mesure du seuil visuel. Avec un microscope à faible grossissement, on vise à travers ce filtre le filament tare de la lampe pyrométrique et, simultanément, l'image aérienne étudiée (l'image réelle projetée dans l'œil dans l'expérience psychophysiologique décrite sous 3.1). On connaît ainsi l'énergie, dans la bande spectrale étudiée, par unité de surface et d'angle solide de l'image. Par un procédé photographique, nous avons mesuré ces deux dernières valeurs, la première à 1 pour cent, la seconde à 0,5 pour cent près. Notre étalonnage du pyromètre permet de connaître à 3° près les températures de luminance mesurées, mais on peut atteindre une précision de moins d'un degré en prenant certaines précautions supplémentaires. L'imprécision de notre mesure se monte à 3 pour cent en énergie. L'étalonnage des filtres gris, du coin et du contre-coin photométriques a été effectué avec un double monochromateur et une photomultiplicatrice d'électrons. Sa précision est telle que la densité totale du coin et de tous les filtres utilisés dans la mesure du seuil est connue à 0,015, c'est-à-dire à 3 pour cent près.

En additionnant toutes les erreurs possibles, on arrive à 8,5 pour cent. Notre mesure de l'énergie liminaire ou—ce qui est la même chose—du nombre liminaire de quanta $520\text{ m}\mu$, au niveau cornéen, est donc exacte à 8,5 pour cent près. Mais il est hautement invraisemblable que toutes les erreurs s'additionnent. L'erreur probable est évidemment de beaucoup plus faible.

Le calcul du seuil absolu en photons $520\text{ m}\mu$. Soit :

- λ longueur d'onde moyenne de la bande passante du filtre interférentiel utilisé,
- $\Delta\lambda$ largeur de bande de ce filtre en μ à la transparence théorique 1,
- d diamètre en cm de l'image aérienne projetée dans l'œil de l'observateur,
- α angle solide du faisceau en stéradians,
- T température de luminance de l'image aérienne visée,
- E énergie débitée par seconde (Watt) par le faisceau, à la température T ,
- t durée (s) de présentation du stimulus lors de la mesure psychophysiologique du seuil,
- $h\nu$ énergie (erg) d'un photon $520\text{ m}\mu$,
- $r_{\lambda, T}\Delta\lambda$ l'énergie totale rayonnée dans toutes les directions (angle solide 2π) sous forme de radiations comprises entre λ et $\lambda + \Delta\lambda$, par 1 cm^2 de l'ouverture pratiquée dans la paroi d'une enceinte noire.

La loi de Wien s'énonce

$$r_{\lambda, T} = C_1 \lambda^{-5} \exp\left(-\frac{C_2}{\lambda T}\right) \text{ d'où} \quad (3)$$

$$\frac{r_{\lambda, T} \Delta \lambda \alpha}{\pi} \frac{d^2 \pi}{4} = C_1 \lambda^{-5} \Delta \lambda \alpha \frac{d^2}{4} \exp\left(-\frac{C_2}{\lambda T}\right), \quad (4)$$

énergie rayonnée perpendiculairement au plan de l'image aérienne circulaire de diamètre d et dans un cône d'angle solide α , C_1 et C_2 étant les constantes de la loi de Wien.

On remarque qu'au dénominateur de la fraction gauche de l'équation (4) figure π et non pas 2π . Puisque le corps noir obéit à la loi de Lambert, il émet, dans une direction donnée, une intensité énergétique proportionnelle au cosinus de l'angle que fait la direction d'émission avec la normale à sa surface. De ce fait, l'émission dans la direction normale à sa surface est bien $1/\pi$ de l'émission totale pourvu que l'angle solide α soit petit par rapport à 2π . Or $\alpha/2\pi = 2,1 \times 10^{-4}$ dans notre expérience ce qui justifie la formule (4).

Nous avons adopté les valeurs 37 320 pour C_1 et 14 380 pour C_2 . Pour $h\nu$ nous posons $3,813 \times 10^{-12}$ erg. Nous avons déterminé $\Delta\lambda$ en mesurant avec précision la bande de transmission de notre filtre d'interférences. La figure 2 montre le graphique qui est à la base de notre calcul.

4. RÉSULTATS

Nous utilisons par la suite des seuils à 55 pour cent, car le raisonnement physiologique s'en trouve simplifié. Comme nous l'avons exposé à la suite de l'équation (2), le nombre n est égal à la valeur m qui produit 55 pour cent de réponses 'vu'. On passe facilement du seuil à 50 pour cent au seuil à 55 pour cent, par interpolation linéaire, car les courbes de réponse sont linéaires entre 35 pour cent et 65 pour cent de 'vu', lorsque $n \geq 6$. Le tableau 1 fournit l'ensemble de nos résultats.

On ne constate aucune différence systématique entre les valeurs mesurées avec des stimuli de 18' et de 39'48" de diamètre angulaire, et cela nous permet de raisonner sur la totalité des 20 mesures. Le seuil à 55 pour cent varie entre 83 et 158 photons. Les valeurs minimum de nos 4 sujets sont respectivement 99-101-84-83 photons.

Comparons ces valeurs à celles de Hecht et autres converties au seuil de 55 pour cent, et en tenant compte de la courbe de visibilité nocturne (ces auteurs ont opéré à 510 m μ). Les valeurs au seuil de 55 pour cent sont inférieures de 6 pour cent à celles indiquées par Hecht et autres qui opèrent au seuil de 60 pour cent. La conversion d'un nombre donné de photons de 520 m μ en photons de 510 m μ peut s'opérer à l'aide des valeurs de la fonction de visibilité scotopique de Stiles et Smith [11]. Les valeurs originales de Hecht et autres sont

79-54-58-81-120-83-79 photons 510 m μ

les valeurs converties au seuil de 55 pour cent :

75-51-55-76-113-78-74 photons 510 m μ .

Nos propres valeurs, au seuil de 55 pour cent et converties en photons 510mμ sont

95-97-81-80.

La moyenne de ces derniers nombres est approximativement 88, la moyenne relative aux mesures de Hecht *et al.*, près de 75. Cette moyenne est exactement 15 pour cent inférieure à la nôtre.

Tableau 1. Seuil cornéen à 55 pour cent indiqué en nombre *N* de quanta 520. Stimuli 18' et 39' 48"

Sujet	B.H.	C.C.	M.G.	E.B.
Angle visuel	18' 39' 48"	18' 39' 48"	18' 39' 48"	18' 39' 48"
<i>N</i>	106 99	117 101 134 158 103 117	88 114 84 101	122 83 120 112 86 99 104 98
<i>N</i> minimum	99	101	84	83
<i>N</i> moyen	103	122	97	101
Fausse réponses positives	0/320	4/514	0/362	3/812
Pour cent fausses réponses positives	0	0,78	0	0,38

Un tel écart n'apparaît pas élevé si l'on tient compte de la grande variabilité des sujets et des inévitables erreurs inhérent à la mesure de l'énergie en valeur absolue. Il n'est pourtant pas exclu que la fidélité des observateurs y joue un certain rôle.

Hecht *et al.* ont bien présenté des pièges à leurs observateurs, mais n'indiquent aucun détail à ce sujet. Pirenne et Marriott affirment que les 3 courbes de réponse publiées en 1942 proviennent de sujets n'ayant jamais donné une seule fausse réponse 'vu'.

Il n'est plus possible d'établir aujourd'hui si les valeurs en quanta mesurés à l'aide d'une thermopile publiées en 1942 proviennent partiellement de sujets ayant donné des réponses 'vu' en absence de toute stimulation (communication personnelle de Pirenne). Il est toutefois intéressant de noter que les 3 courbes de réponse sélectionnées par Hecht parce que particulièrement 'lisses' fournissent les nombres suivants de quanta, au seuil de 55 pour cent :

127-93-130,

moyenne 117 donc très supérieure à la moyenne générale des 25 mesures publiées qui est de 87.

Un tel écart n'apparaît pas dans nos mesures, où la moyenne générale est de 107 et où les 4 courbes de réponse fournissent les valeurs

114-106-83-117

de moyenne 105. Il convient d'insister sur le rôle important que joue la fidélité dans la détermination des seuils. Puisqu'une proportion de 1 pour cent de fausses réponses 'vu' peut faire baisser le seuil de 25 pour cent d'après Barlow (voir aussi Jones [10]), on devrait connaître la fidélité d'un observateur à une faible fraction de 1 pour cent près. Il est évident qu'on ne peut le faire sans lui poser au moins plusieurs centaines de pièges, ce que nous avons fait effectivement. A la lumière de ces considérations il paraît possible que parmi les 22 mesures du nombre de photons $510\text{ m}\mu$, au niveau de la cornée, que Hecht et autres présentent en dehors de leurs 3 courbes de réponse sélectionnées, une certaine fraction fournisse des valeurs trop basses à cause d'une fidélité insuffisante des observateurs. Nos expériences montrent que dans les conditions les plus favorables, un observateur parfaitement fidèle, ou presque, peut éprouver une sensation visuelle liminaire au seuil de 55 pour cent lorsque 80 quanta de $510\text{ m}\mu$ frappent sa cornée.

Admettons une transmission de 50 pour cent entre cornée et rétine (Ludwigh et MacCarthy [12]) et une absorption de 24 pour cent des quanta de $505\text{ m}\mu$ par la rhodopsine des bâtonnets *in vivo* (Rushton [13]). Admettons en outre 30 pour cent de perte dans la rétine en dehors des bâtonnets (cônes et interstices entre récepteurs). On calcule n près de 7. Cela signifie qu'environ 1 quantum sur 12 qui frappent la cornée contribue à l'acte de l'excitation visuelle.

Revenons-en à l'analyse des courbes de réponse. Le tableau 2 indique dans la première ligne des nombres N de photons $510\text{ m}\mu$ au seuil de 55 pour cent, dans la seconde ligne les n dérivés des pentes des courbes de réponse et dans la dernière ligne les (n) calculés en utilisant la valeur de Rushton extrapolée à $510\text{ m}\mu$:

Tableau 2

Hecht et autres				Baumgardt				
N	S.H.	S.S.	M.H.P.	N	M.G.	B.H.	E.B.	C.C.
	127	93	130		110	102	80	113
n	6	7	5	n	8	8	7	6
(n)	10,5	7,7	10,7	(n)	9,1	8,4	6,6	9,3

N : Nombre de photons $510\text{ m}\mu$ mesuré au niveau cornéen et au seuil de 55 pour cent; n : déterminé par la pente de la courbe de réponse respective. (n) : calculé à partir de N en utilisant les mesures de Ludwigh et MacCarthy et de Rushton.

Parmi les 7 courbes de réponse dont ce tableau résume les caractéristiques, il en est 4 qui accusent des valeurs peu différentes pour n et (n) . Parmi nos propres sujets, trois accusent des rapports $n/(n)$ proches de l'unité: 0,88–0,95–1,06. Parmi les 3 observateurs de Hecht et autres, S. S. seul accuse un rapport $n/(n)$ proche de l'unité (0,91). Les autres rapports sont 0,57 et 0,47. La moyenne des quatre valeurs de (n) ainsi sélectionnées est 7,95, les n correspondant étant 7–8–8–7. Il est tentant de considérer la concordance assez parfaite entre les valeurs n et (n) pour quatre observateurs parmi sept comme

non fortuite. Sauf pour E. B. qui accuse un rapport $n/(n)=1,06$, ces rapports sont un peu inférieurs à l'unité. Il faut s'y attendre, car toute courbe de réponse tend à s'étaler, au fur et à mesure que l'observateur varie de sensibilité (Pirenne et Marriott), ce qui diminue le n apparent.

5. CONCLUSION

Chez les sujets entraînés, stables et fidèles, le seuil absolu en adaptation à l'obscurité est atteint par l'absorption de 7 à 9 photons 510 m μ .

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier M. le Professeur Ribaud et M. François Cabannes, Directeur du Laboratoire des Echanges Thermiques à Bellevue, de l'assistance qu'ils m'ont prêté en mettant à ma disposition leur matériel, leur temps et leurs précieux conseils.

The absolute visual threshold at the corneal level is measured by a precise pyrometrical method. Using green light of 520 m μ wave-length, results do not differ essentially from those published by Hecht, Shlear and Pirenne. It is concluded that the absorption of seven light quanta may allow for a liminal light sensation.

Die absolute Quantensehswelle am Hornhautniveau wird in grünem Licht von 520 m μ Wellenlänge gemessen. Die Lichtenergie wird mittels einer genauen pyrometrischen Methode bestimmt. Die numerischen Ergebnisse stimmen ungefähr mit denen von Hecht, Shlear und Pirenne überein und erlauben die Aussage, dass die Absorption von sieben Lichtquanten durch die Netzhautempfinger zu einer Schwellenempfindung führen kann.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BAUMGARDT, E., 1957, *C. R. Acad. Sci.*, **245**, 2236.
- [2] LEE, R. H., FINCH, E. M., et POUNDS, G. A., 1945, *Amer. J. Physiol.*, **143**, 6.
- [3] BORNSCHEIN, H., 1951, *Graefes Arch. Ophthalmol.*, **151**, 446.
- [4] BARLOW, H. B., 1956, *J. opt. Soc. Amer.*, **46**, 634.
- [5] HECHT, S., SHLAER, S., et PIRENNE, M. H., 1942, *J. gen. Physiol.*, **25**, 819.
- [6] BAUMGARDT, E., et HILLMANN, B. M., *J. opt. Soc. Amer.* (à paraître).
- [7] BAUMGARDT, E., 1949, *Rev. Opt.*, **28**, 661.
- [8] GRAHAM, C., et MARGARIA, R., 1935, *Amer. J. Physiol.*, **113**, 299.
- [9] PIRENNE, M. H., et MARRIOTT, F. H. C., 1959, *Psychology: A Study of a Science*, Ed. S. Koch (McGraw-Hill Book Company, Inc., p. 330).
- [10] JONES, R. CLARC, 1959, *J. opt. Soc. Amer.*, **49**, 645.
- [11] STILES, W. S., et SMITH, T., 1944, *Proc. phys. Soc. Lond.*, **56**, 251.
- [12] LUDWIG, E., et MACCARTHY, E. E., 1938, *Arch. Ophthalm.*, **20**, 37.
- [13] RUSHTON, W. A. H., 1956, *J. Physiol.*, **134**, 30.

Small-field tritanopia and the effects of voluntary fixation

by K. J. McCREE†

Technical Optics Section, Imperial College, London

(Received 9 March 1960)

Recently published wavelength discrimination curves for point sources have shown no tritanopic confusion of blue and green, and it has been suggested that this was because the observers scanned the field, instead of fixating on it. Curves measured by the author, also without fixation, but over a different range of field sizes and luminances, do show tritanopic confusion, although it is not as marked as in the older investigations. The curves also show that lowering the luminance, at a given field size, produces a different effect, and that discrimination between blue and violet, at 430 $m\mu$, can be very good when fixation is avoided.

1. INTRODUCTION

When a colour-matching field is made sufficiently small, the matching is thought to become tritanopic; that is, wavelengths in the blue-green part of the spectrum become easily confused, and only two primaries are needed to match any colour. Wright, in a joint investigation with Willmer [1] obtained a set of dichromatic mixture coefficients for his own eye. Thomson and Wright [2] later confirmed Hartridge's finding [3] that the small-field dichromatism was not confined to the central fovea, but could be observed at points up to 40 min of arc away from the centre. The dichromatism is of a type that could be due to the non-functioning of a 'blue receptor', on the Young-Helmholtz theory. Using this idea, and his own demonstration that protanopes and deuteranopes can match with only one primary in a small central field, Willmer [4] has constructed a detailed theory of colour vision in the central fovea.

Bedford and Wyszecki [5] have recently measured their wavelength discrimination for point sources, at much higher luminance levels than had previously been used. They found little or no tritanopic effect. They remark that one reason for this could lie in the viewing technique used. Whereas previous workers had fixed their gaze on the field, Bedford and Wyszecki used a scanning technique.

During a study of the effects of voluntary fixation on colour discrimination, which has been reported in an earlier paper [6], the author found that the fixation effects did in fact tend to be tritanopic. A further set of measurements was therefore made, without fixation but with small fields, to see if a similar type of colour confusion occurred. The experiments were also designed to test the hypothesis put forward by Farnsworth [7] that reducing the luminance of a normal field was equivalent to reducing the field size at constant luminance. The field size was varied in five steps from 75 to 15 min of arc, and the retinal

† Now at the Dominion Physical Laboratory, Lower Hutt, New Zealand.

luminance in three steps from 150 to 0.85 trolands. These values cover a different range from those used by Bedford and Wyszecki, and different results have been obtained.

2. EQUIPMENT AND TECHNIQUE OF OBSERVATION

The observations were made on the Wright colorimeter [8]. They were begun with a divided field in which the two halves had been set to the same wavelength. The observer (the author) then altered the wavelength of the lower half a little, adjusted its brightness to match that of the upper half, and looked for any possible difference in colour, scanning the field all the time in order to avoid any fixation effects. No attempt was made to keep the field within the central foveal part of the retina.

As in the previous experiments [6], the adjustable wavelength was changed in steps until there was a definite difference in colour, and then moved back until this difference just disappeared. Readings were taken on both sides of the fixed wavelength and averaged. At the end of a measurement at one wavelength, the wavelength of the upper half was set to a new point and it was then matched in brightness with the untouched lower half. Thus all the measurements were made at the same brightness, apart from the few below $480\text{ m}\mu$ at the highest luminance level, where lower brightnesses had to be tolerated.

3. RESULTS

It seems logical to call the curves which were obtained from these measurements 'wavelength confusion curves' rather than 'wavelength discrimination curves', since at any point the height represents the amount of confusion, and not the amount of discrimination. A minimum in the curve can then be spoken of, logically, as a minimum of confusion.

Two sets of curves have been plotted, one to show the effect of varying the field size, at three different luminance levels, and the other to show the effect of varying the luminance, for five different field sizes. Individual points are shown only in the latter set, except for one curve for a $6'$ field which was taken at one luminance level only. This curve had to be taken with two separate spots, since the two halves of a divided field could not easily be resolved. At a diameter of $4'$, each spot was equivalent in area to half of a $6'$ field.

All three sets at constant luminance (figure 1) show a tendency to a tritanopic wavelength confusion as the field size is decreased. In each case, blue-green confusion increases more than yellow-red. It would seem, therefore, that a small field does have a tritanopic effect, quite apart from the effects of fixation.

On the other hand, neither small field nor fixation could be said to produce complete tritanopia (dichromacy) in the author's colour vision. In a small field not fixated, no mixture of blue and red matched yellow, except at very low luminance levels. The spectral colour retained some of its yellow hue, whereas the most closely matching mixture of red and blue looked white. As far as the fixation effects are concerned [6], it was quite possible for the author to match with only one variable, at fairly low luminance levels. At the higher levels, vision could be said to be dichromatic, in that red could not be matched with green, but only in a very limited part of the spectrum were both red and

green needed to produce a match. In fact, it was not possible to produce by fixation any steady state in which the usual type of tritanopic mixture curves with two variables could be obtained. Either one only was sufficient to match all colours, or, at the higher luminances, three were needed in a rather uncertain mixture.

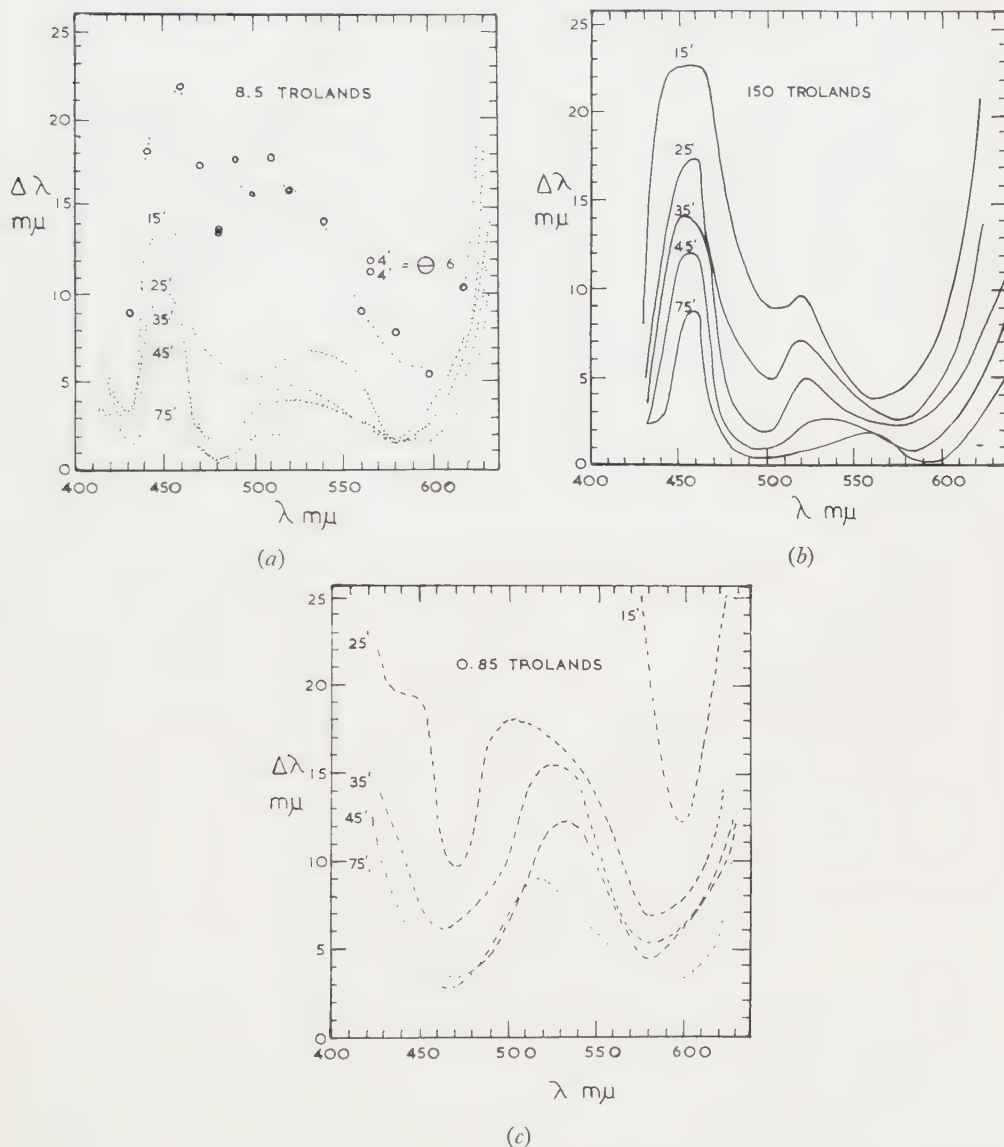


Figure 1. Wavelength confusion curves for three different luminance levels and five different field sizes. Observer (the author) avoiding any fixation on the field. At 150 trolands, the luminance is constant only above 480 $m\mu$.

When the data of figure 1 were plotted for constant field size at three levels of luminance (figure 2), they showed several interesting effects. At the lowest level†, the confusion was in general greater than at the higher levels, but in

† This was 0.6 \log_{10} units above threshold for the 15' field, and 1.3 \log_{10} units above for the 75' field.

the blue, between 440 and 500 $m\mu$, the lower luminance levels showed a smaller amount of confusion than the higher ones. The effect is brought out in figure 3, in which the results of a separate experiment are plotted to show that, whereas the confusion increases with decreasing luminance at 500 $m\mu$, it decreases at 460 $m\mu$.

The curves of figure 2 show also that the blue-green minimum in the confusion curve shifts towards shorter wavelengths as the luminance is decreased. This type of shift appears in some of Thomson and Trezona's [9] and Weale's [10] results. It may be due, as Weale suggests, to an increase in rod activity at the lower luminances. Certainly, the field desaturates at wavelengths around 500 $m\mu$, and differences of saturation, as well as differences of hue, are useful for colour discrimination. On the other hand, it is a little difficult to see why the effect should be limited to these wavelengths, since the rods, according to their spectral sensitivity, should affect all the shorter wavelengths as well.

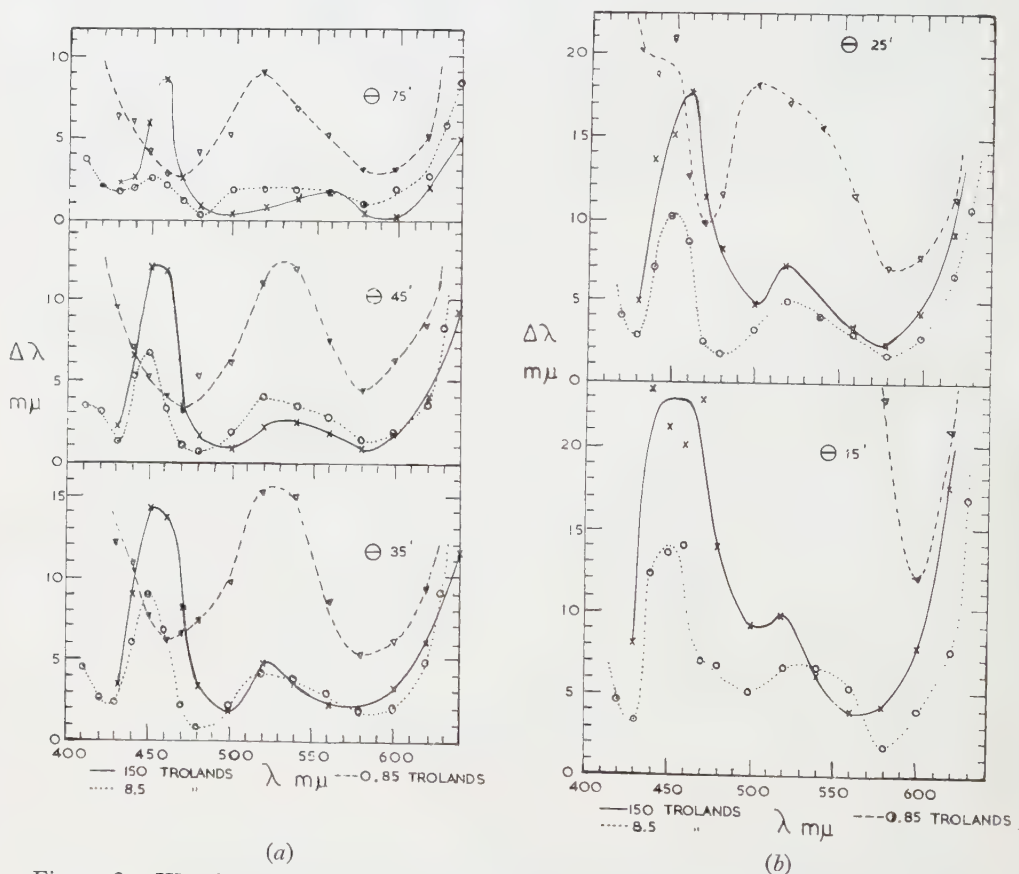


Figure 2. Wavelength confusion curves for five different field sizes and three luminance levels: the curves of figure 1 replotted.

These effects of lowering the luminance level are quite different from those which resulted from decreasing the field size. This can be seen from the three typical curves which have been extracted in figure 4. Relative to the 'normal' curve (full line), the curve for low luminance and the same field size (dashed line) shows the shift of the blue-green minimum towards shorter wavelengths,

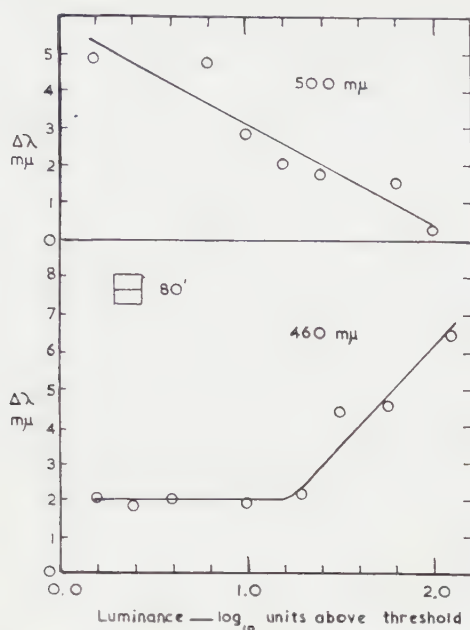


Figure 3. Wavelength confusion step plotted against the luminance of the field, for two wavelengths in the blue region of the spectrum.

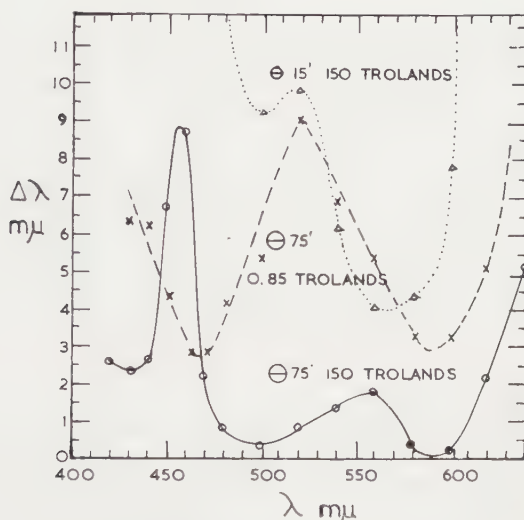


Figure 4. Wavelength confusion curves selected to show the different effects of small field and low luminance conditions.

whereas the curve for reduced field size and the same luminance (dotted line) shows the marked increase of confusion in the blue-green compared with that in the yellow-red.

A further interesting feature of all the curves is the very definite third minimum in the blue-violet, at 430 m μ ; at the higher luminances, the confusion here is as small as that at 480 and 580 m μ . This third minimum was not at all

prominent in the curves obtained by Wright and Pitt [11]. We have found it to be very sensitive to fixation effects, and it also disappeared at the lowest luminance level. Since Bedford and Wyszecki found it in all their curves, there can be no doubt that it is real, and that blue-violet discrimination can be very good, in a reasonably bright field not fixated.

4. DISCUSSION

Our results are intermediate between those of Willmer and Wright [1] and those of Bedford and Wyszecki [5], in the amount of 'small-field tritanopia' found, and this may not unreasonably be explained by our conditions having a relatively low luminance in common with the former investigators, and an absence of fixation in common with the latter. Thus Wright, with the low luminance in the blue, and using the fixation condition, recorded discrimination steps of the order $50 \text{ m}\mu$ in the blue-green for a $20'$ field, whereas Bedford and Wyszecki recorded around 5 or $6 \text{ m}\mu$, with two $12'$ spots of high luminance, not fixated. Our figure would be around 15 to $20 \text{ m}\mu$.

Again, Bedford and Wyszecki compared their 1° discrimination at 100 trolands with their small-field discrimination at 100 to 2000 trolands, whereas we reduced the field size without changing the luminance.

Nevertheless, a mere increase in luminance could not be expected to bring our results into line with those of Bedford and Wyszecki, since in fact an increase from 8.5 to 150 trolands *increased* our wavelength confusion. At 150 trolands, a $15'$ field was too bright for optimum discrimination. Bedford and Wyszecki used 25 100 and 500 trolands for their $12'$ observations. Although their discrimination also deteriorated when the luminance was raised, the change was not at all comparable with ours. Evidently, a field that is too bright for one observer is quite comfortable for another.

In the face of such observer differences, and of the marked influence of fixation on colour discrimination, the existence of a 'small-field tritanopic effect' can no longer be taken for granted. Further checks are needed, with many more observers, using either the glancing technique of observation or some other method of avoiding fixation effects. It would be interesting to combine a flashing field with a fixation spot to keep the field on a known part of the retina.

Des courbes récemment publiées de discrimination des longueurs d'onde pour des sources ponctuelles n'ont pas montré la confusion du bleu et du vert semblable à celle des tritanopes et qui se produit chez les observateurs normaux pour les petits champs de vision. Il a été suggéré que ceci était dû à ce que l'observateur ne fixe pas la source. Les courbes déterminées par l'auteur sans point de fixation, mais pour un grand nombre de luminances et de grandeurs du champ montrent la confusion tritanopique, quoiqu'elle ne soit pas aussi marquée que dans les recherches anciennes. Les courbes montrent aussi qu'en abaissant la luminance à grandeur de champ donnée, il se produit un autre effet et que la discrimination entre le bleu et le violet à $430 \text{ m}\mu$ peut être très bonne quand la fixation est évitée.

Kürzlich veröffentlichte Kurven für die Farbtonunterscheidung bei wechselnder Wellenlänge für punktförmige Lichtquellen haben keine Verwechslung von Blau und Grün bei Tritanopen gezeigt und es wurde angenommen, daß das darauf zurückzuführen ist, daß die Beobachter über das Feld hinwegglitten, anstatt es zu fixieren. Kurven, die von dem Autor aufgenommen wurden, ebenfalls ohne Fixierung, aber über ein weites

Gebiet von Feldgrößen und Leuchtdichten, zeigen Verwechslungen bei tritanopen obwohl das nicht so hervortritt wie in den älteren Untersuchungen. Die Kurven zeigen überdies, daß beim Herabsetzen der Leuchtdichte bei gegebener Feldgröße ein abweichender Effekt auftritt und daß die Unterscheidung zwischen Blau und Violett bei 430 m μ sehr gut sein kann, wenn man ein Fixieren vermeidet.

REFERENCES

- [1] WILLMER, E. N., and WRIGHT, W. D., 1945, *Nature, Lond.*, **156**, 119.
- [2] THOMSON, L. C., and WRIGHT, W. D., 1947, *J. Physiol.*, **105**, 316.
- [3] HARTRIDGE, H., 1945, *Nature, Lond.*, **155**, 391.
- [4] WILLMER, E. N., 1955, *Docum. ophthalm.*, **9**, 235.
- [5] BEDFORD, R. E., and WYSZECKI, G. W., 1958, *J. opt. Soc. Amer.*, **48**, 129.
- [6] MCCREE, K. J., 1960, *Opt. Acta.*, **7**, 281.
- [7] FARNSWORTH, D., 1955, *Die Farbe*, **4**, 185.
- [8] WRIGHT, W. D., 1946, *Researches on Normal and Defective Colour Vision* (London : Henry Kimpton).
- [9] THOMSON, L. C., and TREZONA, P. W., 1951, *J. Physiol.*, **114**, 98.
- [10] WEALE, R. A., 1951, *J. Physiol.*, **113**, 115.
- [11] WRIGHT, W. D., and PITT, F. H. G., 1934, *Proc. phys. Soc. Lond.*, **46**, 459.

Calculation of wavelengths from reflecting echelon patterns

by R. A. HANDS, W. A. HESLOP and T. A. LITTLEFIELD

King's College, Newcastle upon Tyne, University of Durham

(Received 10 March 1960)

Wavelengths are calculated from measurements of reflecting echelon patterns by a simplified procedure which can be carried out conveniently, using a digital computer. By measuring to the position of the centre of the envelope, rather than to an arbitrary mirror image as hitherto, it is shown that envelope correction is automatically applied and a very simple correction for non-linearity of dispersion may be made where necessary.

1. INTRODUCTION

Wavelength measurement with an interferometer consists in counting along a parallel to a given direction the number of waves between two reflecting surfaces. In the case of a Fabry-Perot interferometer the direction is defined naturally by the centre of the system of circular interference fringes. With an echelon on the other hand only two fringes normally appear and their relative intensity is controlled by an envelope curve, the shape of which is determined by the effective step height. The centre of this envelope curve, where fringes attain their maximum intensity, would provide a reference point comparable with the centre of the Fabry-Perot ring system. This point is not readily located and hitherto arbitrary reference points proposed by Williams [1] have been provided by mirror images of the entrance slit orientated above and below the interference fringes. Investigations in this laboratory of wavelength errors arising from envelope displacement by Blackie and Littlefield [2] and of non-linearity of dispersion by Littlefield and Turnbull [3] have clearly shown the advantages of measuring to the single-order position at the centre of the envelope rather than to an arbitrary mirror image. This paper describes the simplified procedure which can be followed when this new reference point is adopted and shows how the envelope correction is automatically applied.

2. ENVELOPE DISPLACEMENT

Blackie and Littlefield applied corrections for envelope displacement in their wavelength measurements of neon [4] and iron [5]. The application of this correction proved laborious and a reconsideration of procedure seemed desirable before a fresh programme of measurements was undertaken.

Figure 1 shows two fringes with modified intensities and having envelope displacement. The observed angular order separation is ϕ and the observed angular distance of the stronger fringe from the envelope centre is θ . Measurements of fringes can only provide values of fractional parts f of orders of interference and when the envelope centre is used as reference direction $f = \theta/\phi$. Measured values of both these quantities are affected by envelope displacement so that the true fractional part becomes $f = (\theta + \Delta\theta)/(\phi + \Delta\phi)$

where $\Delta\theta$, $\Delta\phi$ are envelope displacements. Since, over an appreciable part of the envelope curve, Blackie and Littlefield [2] have shown that the envelope displacement is very nearly proportional to the distance of the fringe from the envelope centre we can write $\Delta\theta = K\theta$ and $\Delta\phi = K\phi$ where K is a constant. It follows at once that the true fractional part f is given by

$$f = (\theta + \Delta\theta) / (\phi + \Delta\phi) = \theta / \phi.$$

Thus by using the measured values of θ , ϕ and provided that the fringes lie within the range $\theta = \pm 3\phi/4$, envelope correction is automatically applied.

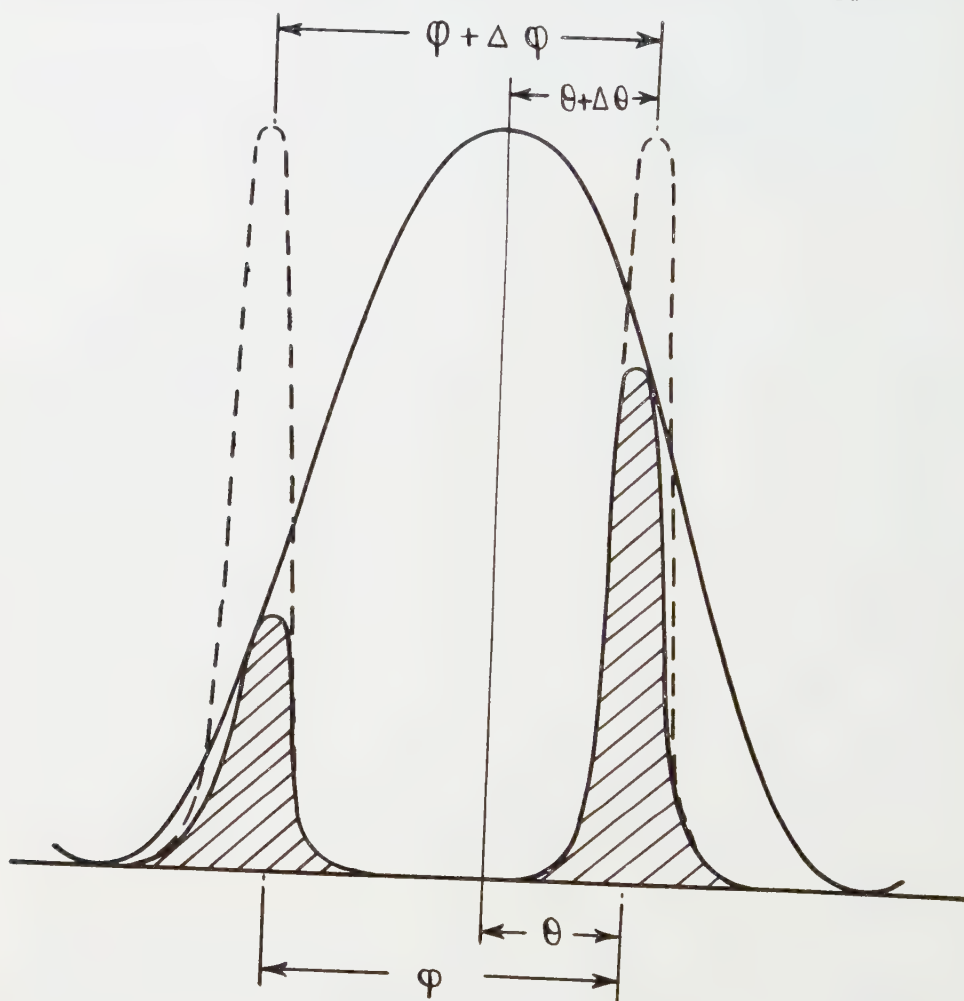


Figure 1. Envelope displacement.

Unfortunately ϕ is not directly observable at all wavelengths. Williams [1] has shown that ϕ' for a wavelength λ' may be calculated from ϕ for another wavelength λ by the formula

$$\phi' = \phi \cdot \frac{\lambda'}{\lambda} \cdot \frac{M_1' M_2'}{M_1 M_2}$$

where $M_1 M_2$, $M_1' M_2'$ are the corresponding reference mirror image separations. Thus for a given plate the function $\lambda \cdot M_1 M_2 / \phi = \lambda' \cdot M_1' M_2' / \phi'$ is constant.

This assumes that both Doppler and instrumental broadening of the fringes, considered as a fraction of order separation, are constant over a given plate. By measuring those lines in or near double order on a given plate the best value for this constant can be determined.

3. LOCATION OF ENVELOPE CENTRE

The position of the centre of the envelope can be determined with respect to the mirror images in a number of ways. In the past it has been found as the mid-point between two fringes fortuitously in 'double order' as judged visually by their equality of intensity. In the present work it has been found adequate to place the standard line in 'single order' visually by tilting the echelon. This setting was facilitated by the appearance of three fringes instead of two within the envelope. These arise when the incident light falls obliquely upon the echelon at a few degrees to the normal. Meissner [6] has pointed out that the length of the spectrograph slit is sufficient to accommodate the consequent vertical movement of the fringe pattern. With this arrangement the fractional part f for the standard line is zero and therefore its order separation does not need to be known. Thus another uncertainty is removed.

It should also be noted that the construction of the echelon provides a direct method of locating the envelope centre. Since the echelon consists of a number of plane parallel rectangular plates wrung together and staggered slightly so that light may be reflected from successive edges, it is only necessary to leave the whole of the front plate unobscured and so provide a mirror which will form an image of the echelon slit at the envelope centre. The method has the disadvantage of requiring a larger aperture which is not always easy to arrange.

4. CALCULATION OF FRACTIONAL PART

Figure 2 shows the standard line F in single order at the centre of the envelope together with the mirror images of the echelon slit M_1, M_2 . XY is the line joining points mid-way between the mirror images M_1, M_2 and M_1', M_2' . The fractional part $f' = y/\Phi'$ and $y = x + z$, Φ' being the order separation at λ' as measured linearly upon the plate. Geometry gives $x = \frac{1}{2}(M_1'F' - F'M_2')$. Similarly the distance of the mid-point between the mirror images M_1, M_2 from the envelope centre for wavelength λ is given by $\frac{1}{2}(M_1F - FM_2)$. At wavelength λ' allowing for the spectrograph magnification $M_1'M_2'/M_1M_2$, this becomes $z = -\frac{1}{2}(M_1F - FM_2)M_1'M_2'/M_1M_2$.

Remembering also that the function $\lambda \cdot M_1M_2/\Phi = \lambda' \cdot M_1'M_2'/\Phi'$ is a constant (k_p) for a given plate, we may write

$$\begin{aligned} f' &= \frac{k_p}{2\lambda'} \left[\frac{M_1'F' - F'M_2'}{M_1'M_2'} - \frac{M_1F - FM_2}{M_1M_2} \right] \\ &= \frac{k_p}{2\lambda'} \cdot \frac{M_1'F' - F'M_2'}{M_1'M_2'} - \frac{K_p}{\lambda'} \end{aligned}$$

where K_p is another constant.

Where the fringes F' and F'' are both measurable, the alternative formula

$$f' = \frac{k_p}{2\lambda'} \cdot \frac{M_1'F'' - F'M_2'}{M_1'M_2'} - \frac{K_p}{\lambda'} - \frac{1}{2}$$

may be used. Thus a value for the fractional part f' is obtained which makes the fullest use of all measurements upon a given plate. Its sign indicates

whether or not it should be added to or subtracted from the integer m' which is already known from previous wavelength measurements using a grating. Remembering that $f=0$ for the standard wavelength λ , the unknown wavelengths are calculated from formulae of the type

$$m\lambda = (m' + f')\lambda' = (m'' + f'')\lambda'' = \text{constant.}$$

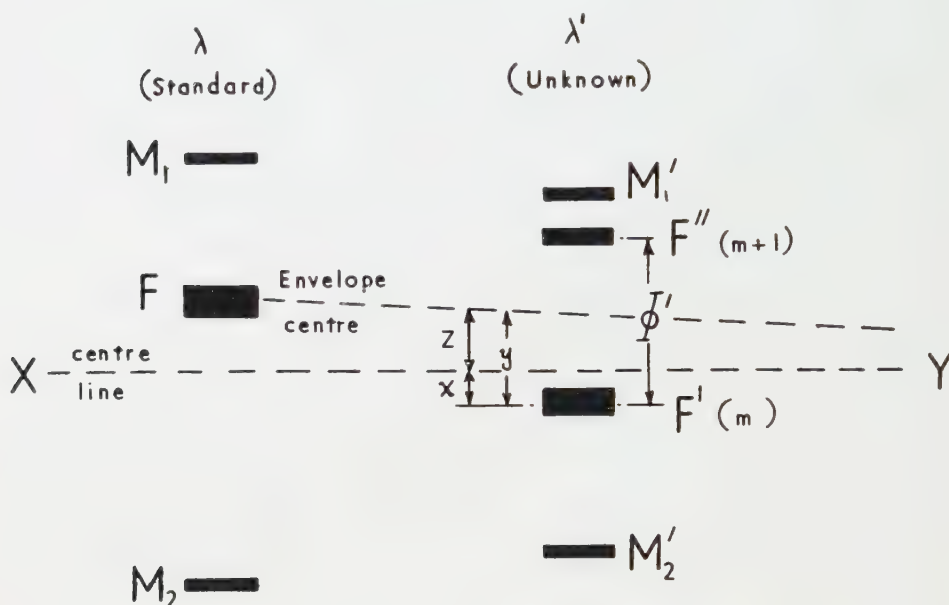


Figure 2. Determination of fractional part.

5. NON-LINEARITY OF DISPERSION

Non-linearity of dispersion has been considered by Littlefield [7] and more fully by Littlefield and Turnbull [3]. They showed that for light incident at an angle $-\alpha$ to the normal of an echelon step, the centre of the envelope lies at $+\alpha$ and that if the angular positions of fringes given by the standard and unknown wavelengths are ω , ω' respectively, the wavelength error introduced will be given by $\Delta\lambda' = \frac{1}{4}\lambda'(\omega - \omega')[2\alpha - (\omega + \omega')]$. This may be rewritten as $\Delta\lambda' = \frac{1}{4}\lambda'[(\alpha - \omega')^2 - (\alpha - \omega)^2]$, i.e. $\Delta\lambda' = \frac{1}{4}\lambda'(\theta'^2 - \theta^2)$ where θ , θ' are the angular displacements of the fringes from the centre of the envelope. As fractional parts are now being calculated with respect to the envelope centre, and remembering that $f = \theta/\phi$ where $\phi = \lambda/s$ this becomes $\Delta\lambda' = \lambda'^3(f'^2 - f^2)/4s^2$ where f , f' refer to the standard and unknown wavelengths respectively and s is the effective height of the echelon step. In this work it has been found convenient to set the fringe due to the standard wavelength at the envelope centre, so that $f=0$ and the equation becomes $\Delta\lambda' = \lambda'^3 f'^2/4s^2$. Since f' usually lies in the range $-\frac{1}{2}$ to $+\frac{1}{2}$ the maximum error is unlikely to exceed $\lambda'^3/16s^2$ as already shown in earlier work. Thus a knowledge of the fractional part f' enables the error arising from non-linearity to be quickly assessed. The errors arising from a fringe with $f' = \pm \frac{1}{2}$ range from 0.000005 at $\lambda 2000 \text{ \AA}$ to 0.00063 at $\lambda 10\,000 \text{ \AA}$ rising to 0.0001

at $\lambda 5400 \text{ \AA}$. In practice the errors are most easily read off from a graph as shown in figure 3, which applies to all echelons having a step height $s = 0.1 \text{ cm}$.

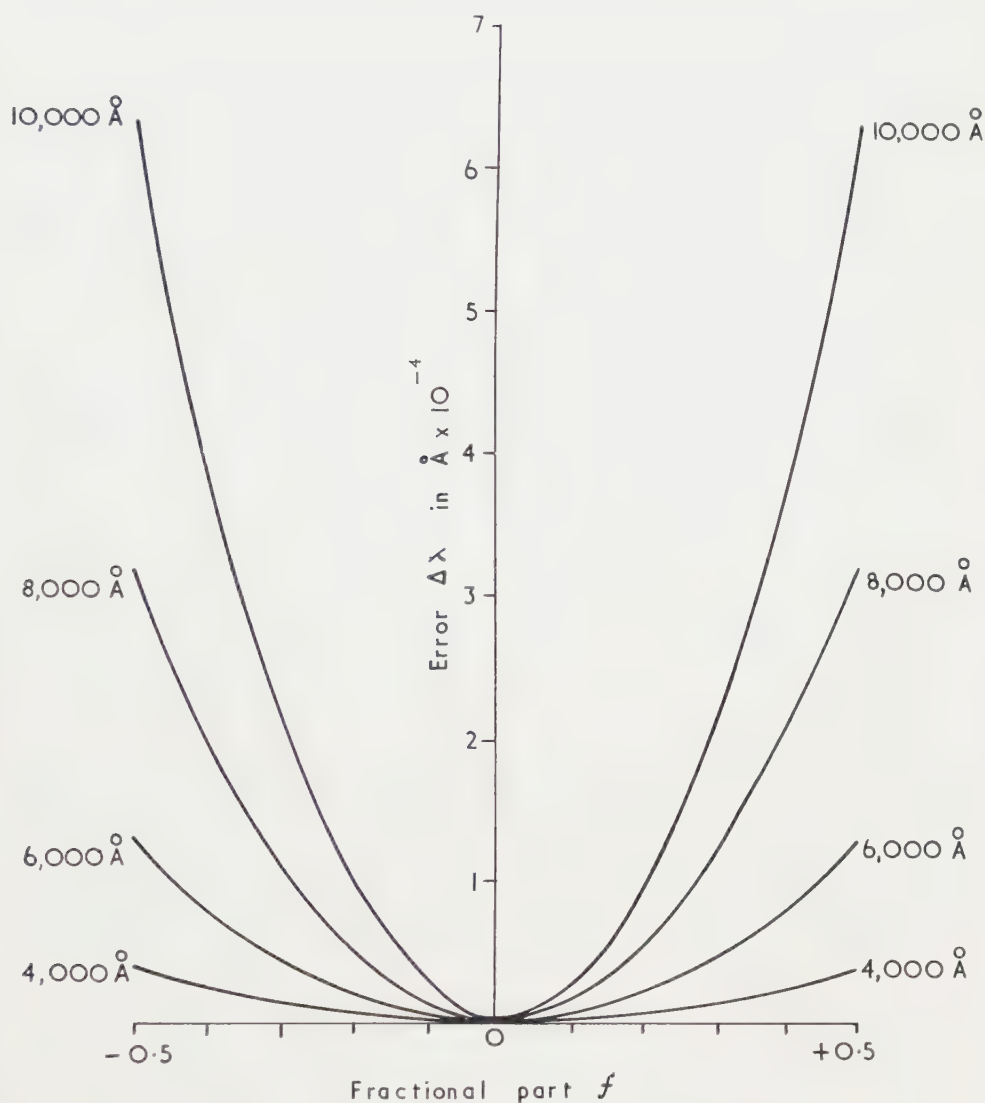


Figure 3. Correction for non-linearity of dispersion.

6. CALCULATION OF WAVELENGTHS

The process of obtaining wavelengths from reflecting echelon patterns may be summarized as follows:

- (a) Measure fringes of satisfactory density within the range of $\theta = \pm 3\phi/4$.
- (b) Use the measurements on all pairs of fringes included in the above to calculate the plate constant k_p .

(c) Calculate the fractional parts for each wavelength using the formula

$$f' = \frac{k_p}{2\lambda'} \cdot \frac{M_1' F' - F' M_2'}{M_1' M_2'} - \frac{K_p}{\lambda'}.$$

(d) Calculate the unknown wavelengths from the formula of the type

$$\lambda' = m\lambda / (m' + f').$$

(e) If necessary apply a correction for the non-linearity, the important correction for envelope displacement having already been applied automatically.

Having formulated the procedure on the above pattern, steps (b), (c) and (d) may be carried out using a digital computer. This substantially speeds up the calculation and minimizes the risk of clerical errors.

ACKNOWLEDGMENTS

We have pleasure in recording our thanks to Dr. J. Eve of the Durham University Computing Laboratory who devised the programme enabling the computer to carry out the above operations. This analysis was carried out prior to wavelength measurements of the spectra of iron and thorium for which two of us (W. A. H., R. A. H.) received financial support from the D.S.I.R. and to whom we have pleasure in expressing our thanks.

Les longueurs d'onde sont calculées à partir des mesures des spectrogrammes fournis par un échelon à réflexion par une méthode simplifiée qui permet l'utilisation d'une calculatrice électronique. On montre que si l'on mesure à la position de la frange standardisée mise au centre de l'enveloppe, la correction d'enveloppe est automatiquement appliquée et, lorsque cela est nécessaire, on peut faire aussi une correction pour tenir compte de la non-linéarité de la dispersion.

Die Wellenlängenberechnung aus den Messungen am Reflexions-Stufengitter kann nach einer vereinfachten Methode mit Hilfe einer elektronischen Rechenmaschine bequem ausgeführt werden. Es ist besser, die Messung auf die Lage eines einzelnen Interferenzmaximums in der Mitte der Energieverteilungskurve (Einhüllende, Apparatfunktion) zu beziehen, als auf ein beliebiges Spiegelbild, wie bisher. Es zeigt sich dann, daß die Korrektur für die Energieverteilung automatisch erfolgt, und nur wegen der Nichtlinearität der Dispersion dort, wo es notwendig ist, eine sehr einfache Korrektur vorgenommen werden muß.

REFERENCES

- [1] WILLIAMS, W. E., 1931, *Nature, Lond.*, **127**, 816.
- [2] BLACKIE, J., and LITTLEFIELD, T. A., 1955, *J. opt. Soc. Amer.*, **45**, 658.
- [3] LITTLEFIELD, T. A., and TURNBULL, D. T., 1953, *Proc. roy. Soc. A*, **218**, 577.
- [4] BLACKIE, J., and LITTLEFIELD, T. A., 1955, *Proc. roy. Soc. A*, **229**, 468.
- [5] BLACKIE, J., and LITTLEFIELD, T. A., 1956, *Proc. roy. Soc. A*, **234**, 398.
- [6] MEISSNER, K. W., 1954 (private communication).
- [7] LITTLEFIELD, T. A., 1946, *Proc. roy. Soc. A*, **187**, 220.

Influence du nombre de traits des mires sur la précision des mesures du facteur de transmission

par P. LACOMME
Institut d'Optique, Paris

(Received 3 May 1960)

A l'ancienne notion de 'limite de résolution' d'un instrument d'optique, on tend à substituer, de plus en plus, celle de 'facteur de transmission' en fonction de la fréquence spatiale, qui renseigne évidemment beaucoup mieux sur la qualité de l'instrument.

Dans les dispositifs utilisés pour la mesure de ce facteur, une cause d'erreur peut être le faible nombre de traits des mires 'periodiques' utilisées. On étudie ci-dessous l'influence de ce nombre de traits sur la précision des mesures, et les moyens de limiter l'erreur qui peut en résulter.

1. GENERALITES

Dans les mesures du facteur de contraste des instruments d'optique (en éclairage incohérent,) on est amené à utiliser des mires variées que l'on qualifie souvent de périodiques. En mesurant le contraste de l'image et en le comparant à celui de l'objet, on obtient la valeur du facteur de contraste de l'instrument.

En fait, la périodicité de la mire n'est qu'approchée, puisque le nombre de traits de la mire ne peut pas être infini. Il en résulte que la transformée de Fourier de la mire, que l'on appelle son 'spectre de fréquences spatiales', ne se réduit pas, dans le cas de la mire sinusoïdale, aux trois signaux isolés limités strictement aux trois fréquences $-1/p$, 0 et $1/p$ (si p est la période); le spectre s'étale légèrement autour de ces fréquences et comporte en fait trois bandes, d'autant plus étroites que le nombre de traits est plus important. Il s'ensuit une imprécision sur le résultat des mesures, que nous nous proposons d'étudier et de réduire.

2. TRANSFORMEE DE FOURIER D'UN OBJET LIMITE

Supposons que l'objet soit une mire dont le facteur de transmission énergétique E soit sinusoïdal, mais que le nombre et la longueur des traits soient limités.

L'objet peut être considéré comme le produit

- (1) d'une sinusoïde exprimée par la fonction $f_1(x)$

$$f_1(x) = 1 + \cos \frac{2\pi x}{p};$$

- (2) d'une fonction $f_2(x, y)$ du genre 'rectangle'

$$\begin{cases} f_2(x, y) = 1 & \text{pour } -\frac{a}{2} < x < +\frac{a}{2}, \quad -\frac{b}{2} < y < +\frac{b}{2}, \\ f_2(x, y) = 0 & \text{partout ailleurs.} \end{cases}$$

D'après les théorèmes généraux sur la transformation de Fourier, le 'spectre' d'un tel objet devient le 'produit de convolution' du spectre $g_1(u)$ de la sinusoïde

c'est à dire les trois signaux de fréquence $-1/p$, 0 et $1/p$ et d'une fonction qui est la transformée de Fourier de l'ouverture rectangulaire limitant la mire

$$g_2(u, v) = \frac{\sin \pi au}{\pi au} \frac{\sin \pi bv}{\pi bv}$$

où a et b sont les dimensions du domaine qui définit f_2 , u et v les coordonnées cartésiennes dans l'espace des fréquences spatiales.

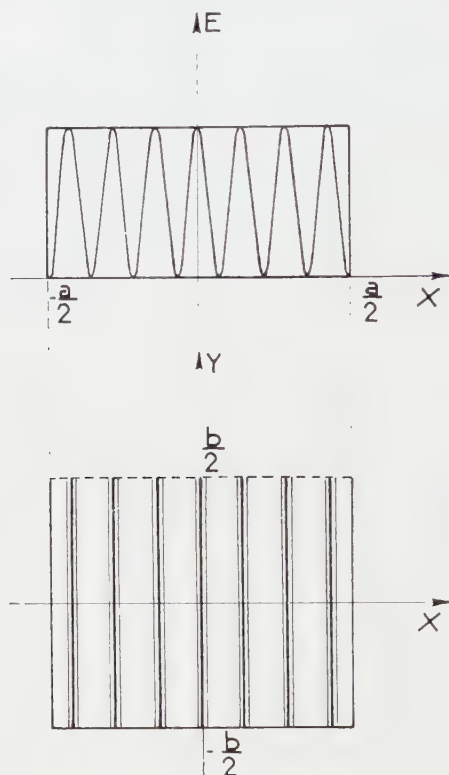


Figure 1.

Dans la direction perpendiculaire aux traits, l'étendue du spectre dans l'échelle des fréquences est inversement proportionnelle à la largeur a .

Si l'on augmente a , ou en d'autres termes, le nombre de traits, le spectre de la mire se resserre autour de chacune des trois fréquences composant la mire infinie (figure 2).

Cet étalement du spectre autour des fréquences $-1/p$, 0 et $1/p$ peut manifestement affecter la précision des mesures; il y a intérêt à ce que la transformée de Fourier $g_2(u, v)$ du 'masque' limitant la mire soit aussi rapidement décroissante que possible.

Le problème mathématique est donc le même que celui de l'apodisation il convient tout d'abord d'éviter les discontinuités dans la fonction $f_2(x, y)$, et il y a avantage à ce que les discontinuités n'apparaissent que dans les dérivées d'ordre aussi élevé que possible.

Nous envisagerons tout d'abord le cas de la fonction rectangle et nous montrerons ensuite les avantages que présenterait un masque 'apodisant'.

3. RECHERCHE D'UNE EXPRESSION DU CONTRASTE DANS LE CAS DU MASQUE RECTANGULAIRE ET D'UNE FONCTION DE CONTRASTE À SYMÉTRIE DE RÉVOLUTION

Supposons la mire sinusoïdale, de période p , limitée par un rectangle de largeur $a = Np$ (N étant le nombre de traits) et de hauteur b . La transformée de Fourier de l'image fournie par l'instrument à étudier est égale au produit de la transformée de Fourier de l'objet (la mire) par la transformée $T(u, v)$ de l'image d'un point isolé que l'on se propose de déterminer.

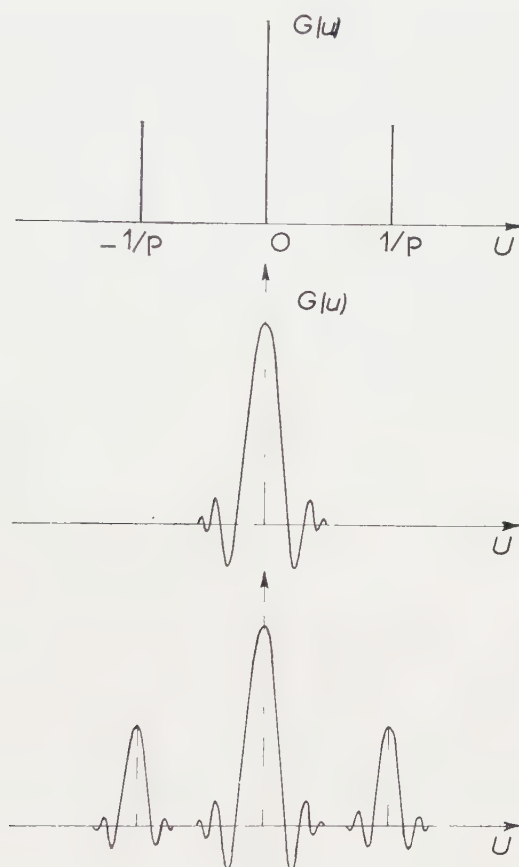


Figure 2.

Supposons, par exemple, que cette dernière puisse être représentée par les développements limités suivants :

$$T(u, v) = 1 - A\sqrt{(u^2 + v^2)} \quad \text{pour la fréquence zero}$$

$$T(u, v) = T\frac{1}{p} - B\left[\sqrt{(u^2 + v^2)} - \frac{\epsilon}{p}\right] + C\left[\sqrt{(u^2 + v^2)} - \frac{\epsilon}{p}\right]^2$$

pour les signaux latéraux $u = \epsilon/p$, ϵ étant égal à ± 1 .

En supposant ainsi $T(u, v)$ de révolution, on élimine l'influence de v sur $T(u, v)$ quand v est petit ; pour les signaux latéraux, on pose

$$u = \epsilon/p + u'$$

et l'on peut écrire plus simplement :

$$T(u', v) = T(\epsilon/p' 0) - Bu' + Cu'^2$$

les termes en v^2 , infiniment petits du deuxième ordre, peuvent être négligés au voisinage des signaux latéraux.

L'image de la mire est donnée par la somme de trois expressions de la forme

$$I(x, y) = C' \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi a[u - (\epsilon/p)]}{\pi a[u - (\epsilon/p)]} \frac{\pi b v}{\sin \pi b v} \exp [i2\pi(ux + vy)] T(u, v) du dv$$

où ϵ prend les valeurs $-1, 0, +1$ et C' est respectivement égal à $\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}$.

3.1. Contribution du signal central

Le terme principal est un fond continu

$$\int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi a u}{\pi a u} \frac{\sin \pi b v}{\pi b v} \exp(i2\pi u x) \exp(i2\pi v y) du dv$$

c'est à dire un rectangle uniformément éclairé : l'objet, sans la modulation à la fréquence de la mire.

Le terme d'erreur

$$-A \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi a u}{\pi a u} \frac{\sin \pi b v}{\pi b v} \sqrt{(u^2 + v^2)} \exp(i2\pi u x) \exp(i2\pi v y) du dv$$

ne peut s'intégrer de façon simple, même en se bornant au point $x=y=0$. Se retranchant du précédent, il diminue le fond continu de l'image sans influencer sur la modulation ; la pente des tangentes au point conique origine introduit toujours, dans la mesure de $T(u, v)$, une erreur par excès.

3.2. Contribution des signaux latéraux

Ici les variables se séparent, nous pouvons mettre en facteur une fonction rectangle

$$H(y) = \int \frac{\sin \pi b v}{\pi b v} \exp(i2\pi v y) dy$$

tandis que le changement de variables $u = u' - \epsilon/p$ fait apparaître, par combinaison des deux fréquences $-1/p$ et $+1/p$

$$\exp(i2\pi u' x) \frac{\exp\left(\frac{i2\pi x}{p}\right) + \exp\left(-\frac{i2\pi x}{p}\right)}{2} \exp(i2\pi u' x) \cos \frac{2\pi x}{p}$$

c'est-à-dire la modulation, dans l'image, à la fréquence de la mire objet. Nous sommes donc en présence de trois termes

$$\begin{aligned} & T\left(\frac{\epsilon}{p}, 0\right) H(y) \cos \frac{2\pi x}{p} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi a u'}{\pi a u'} \exp(i2\pi u' x) du' \\ & - B H(y) \cos \frac{2\pi x}{p} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi a u'}{\pi a u'} \exp(i2\pi u' x) u' du' \\ & + C H(y) \cos \frac{2\pi x}{p} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi a u'}{\pi a u'} \exp(i2\pi u' x) u'^2 du'. \end{aligned}$$

Le premier est le terme principal: l'intégrale donne encore une fonction rectangle $H'(x)$.

Il est facile de voir que la deuxième intégrale, impaire, est nulle

$$\sin \pi a u' \exp(i 2 \pi u' x) = \sin \pi a u' (\cos 2 \pi u' x + i \sin 2 \pi u' x)$$

se transforme en une somme de sinus et de cosinus, et l'intégration entre $-\infty$ et $+\infty$ donne évidemment zéro.

Enfin, le troisième est l'erreur due à la courbure de $T(u, v)$ mais ne converge pas. En se limitant au trait central de l'image ($x=0$)

$$\frac{\sin \pi a u'}{\pi a} u' du' = \frac{\sin \pi a u'}{\pi^3 a^3} - u' \frac{\cos \pi a u'}{\pi^2 a^2}$$

fonction équivalente à $u'^3/3$ dans un petit domaine de u' . La mesure du facteur T à une fréquence déterminée dépend des valeurs de T à toutes les fréquences spatiales. Ceci montre l'intérêt d'une meilleure délimitation de l'objet.

4. MASQUE DE GAUSS

La mire est limitée maintenant par un masque dont la transmission énergétique $f_2(x)$ est une fonction de Gauss

$$\exp\left(-\frac{\pi x^2}{a^2}\right)$$

dont la transformée de Fourier est aussi une fonction de Gauss

$$\exp(-\pi a^2 u^2).$$

Quand u croît, cette dernière décroît beaucoup plus vite que la fonction

$$\frac{\sin \pi a u}{\pi a u}$$

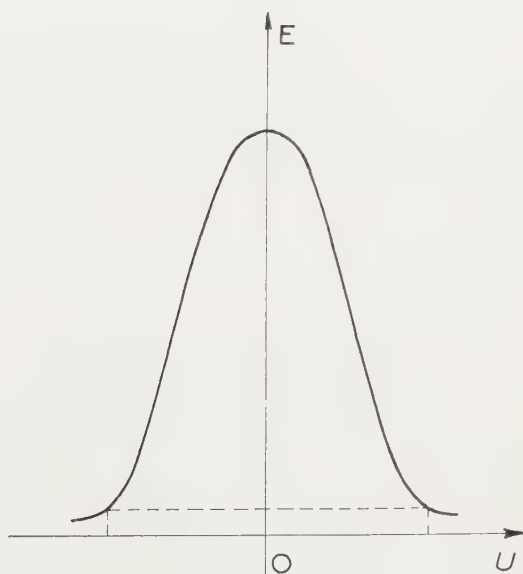


Figure 3.

correspondant à l'ouverture rectangulaire de même largeur. Pour la simplicité du calcul, nous admettrons que la coupure a lieu quand l'éclairement est négligeable et nous raisonnerons sur un masque de Gauss de largeur finie sans faire intervenir les fonctions de probabilité au lieu de l'intégrale prise de $-\infty$ à $+\infty$.

Dans ces conditions, pour qu'à une distance

$$\Delta u = \frac{1}{10p}$$

de la fréquence fondamentale, l'amplitude du spectre soit réduite à 1/1000, on écrira :

$$\exp(-\pi^2 a^2 u^2) < \frac{1}{1000},$$

$$a^2 (\Delta u)^2 = 2,2,$$

$$a = \frac{1,5}{\Delta u} = 15 \text{ traits},$$

ce qui fixe l'échelle du masque par rapport au pas de la mire : de part et d'autre du centre, l'éclairement du 15^e trait est 4,3 pour cent de celui du trait central.

5. CALCUL DE L'IMAGE DE LA MIRE ECLAIREE SUIVANT UNE FONCTION DE GAUSS

Nous avons pour luminance f_2 de l'objet

$$f_1(x)f_2(x,y) = \left(1 + \cos \frac{2\pi x}{p}\right) \exp\left(-\frac{\pi(x^2 + y^2)}{a^2}\right)$$

et l'expression de l'image devient

$$I(x,y) = C' \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\pi a^2 \left[\left(u - \frac{\epsilon}{p}\right)^2 + v^2\right]\right) \exp[i2\pi(ux + vy)] T(u,v) du dv.$$

$T(u,v)$ ayant toujours la même représentation qu'au § 3. Si nous réservons le cas du terme en $-A\sqrt{(u^2 + v^2)}$ dans le développement de $T(u,v)$, nous voyons tout de suite que nous pouvons séparer les variables dans toutes les intégrales, et mettre en facteur dans $I(x,y)$

$$H'(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi a^2 v^2) \exp(i2\pi v y) dv = \exp \frac{(-\pi y^2/a^2)}{a}.$$

Nous pouvons donc faire les calculs à une seule dimension.

$$I(x,y) = I(x,0) H'(y).$$

On est amené, au cours des intégrations, à faire les changements de variables

$$u = u' - \frac{ix}{a^2} \quad (\text{fréquence zéro}),$$

$$u - \frac{\epsilon}{p} = u' - \frac{ix}{a^2} \quad (\text{fréquences } -1/p, +1/p),$$

pour faire apparaître une combinaison des intégrales

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \exp(-\pi a^2 u'^2) du' &= \frac{1}{2a}, \\ \int_0^\infty \exp(-\pi a^2 u'^2) u' du' &= \frac{1}{2\pi a^2}, \\ \int_0^\infty \exp(-\pi a^2 u'^2) u'^2 du' &= \frac{1}{4\pi a^3}.\end{aligned}$$

Certaines des considérations sur la mire limitée par un rectangle se retrouvent ici sans modification ; ainsi les termes en Bu' , impairs, disparaissent dans l'intégration entre $-\infty$ et $+\infty$. Les erreurs sont dues encore à la pente au point conique origine, et à la courbure de T à la fréquence considérée.

Enfin, dans l'intégrale en

$$C\left(u - \frac{\epsilon}{p}\right)^2 du = C\left(u' - \frac{ix}{a^2}\right)^2 du'$$

les termes en $(iu'x/a^2)du'$, impairs, disparaissent, mais il reste un terme en $-(Cx^2/a^4)$ et la correction 'de courbure' sera variable selon le trait considéré.

Finalement, en prenant 1 pour l'éclairement au centre, nous avons pour l'image en présence d'un masque de Gauss cylindrique (les traits éclairés sur une grande longueur)

$$I(x) = \exp\left(\frac{-\pi x^2}{a^2}\right) \left\{ 1 - \frac{A}{\pi a} + \left[T\left(\frac{\epsilon}{p}, 0\right) + C \frac{1-4\pi x^2}{2\pi a^2} \right] \cos \frac{2\pi x}{p} \right\}.$$

Revenons maintenant au cas à 2 dimensions ; seule est modifiée l'intégrale relative au point conique

$$A \int \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-\pi a^2(u^2 + v^2)] \exp[i2\pi(ux + vy)] \sqrt{(u^2 + v^2)} du dv$$

en posant $u' = u + \frac{ix}{a^2}$, $v' = v + \frac{iy}{a^2}$ on obtient

$$\begin{aligned}A \exp\left(\frac{-\pi(x^2 + y^2)}{a^2}\right) \int \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-\pi a^2(u'^2 + v'^2)] \sqrt{\left[\left(u' - \frac{ix}{a^2}\right)^2 + \left(v' - \frac{iy}{a^2}\right)^2\right]} du' dv'.\end{aligned}$$

Le radical peut s'écrire, pour de faibles valeurs de x et de y

$$\sqrt{(u'^2 + v'^2)} - \frac{i(u'x + v'y)}{a^2 \sqrt{(u'^2 + v'^2)}}.$$

Si l'on se contente de la correction au point $x=y=0$, l'intégrale relative à $\sqrt{(u'^2 + v'^2)}$ devient, en passant en coordonnées polaires

$$A \int \int \exp(-\pi a^2 \rho^2) \rho^2 d\rho d\omega = 2\pi A \int_0^\infty \exp(-\pi a^2 \rho^2) \rho^2 d\rho = \frac{A}{2a^3}$$

et l'on obtient pour l'image une approximation

$$I(x, y) = \exp\left(-\pi \frac{x^2 + y^2}{a^2}\right) \left\{ 1 - \frac{A}{a^2} + \left[T \frac{\epsilon}{p} + C \frac{1-4\pi x^2}{2\pi a^2} \right] \cos \frac{2\pi x}{p} \right\}.$$

5.1. Influence du déphasage

$T(u, v)$ n'étant plus de révolution, nous nous bornerons au cas d'une seule variable. $T(1/p)$ et $T(-1/p)$ seront complexes, mais imaginaires conjuguées. Par exemple

$$T(1/p) = T + iT' \quad T(-1/p) = T - iT'.$$

Les exponentielles $\exp(i2\pi x/p)$ font apparaître, par addition des 2 signaux $\cos(2\pi x/p)$ quand elles sont associées à des termes réels T , $\sin(2\pi x/p)$ quand elles sont associées à des termes imaginaires iT' il suffit de poser

$$\frac{T'}{\sqrt{(T^2 + T'^2)}} = \sin \phi$$

pour voir que le contraste n'est pas modifié, la modulation dans l'image prenant la forme

$$\sqrt{(T^2 + T'^2)} \cos\left(\frac{2\pi x}{p} + \phi\right)$$

les traits sont déplacés.

6. CORRECTIONS A APPORTER AUX MESURES

Nous venons de voir, dans le cas d'une mire éclairée à travers un masque de Gauss de révolution, qu'on explore une image

$$1 - \frac{A}{2a} + \left(T + C \frac{1 - 4\pi x^2}{2\pi a^2}\right) \cos \frac{2\pi x}{p}$$

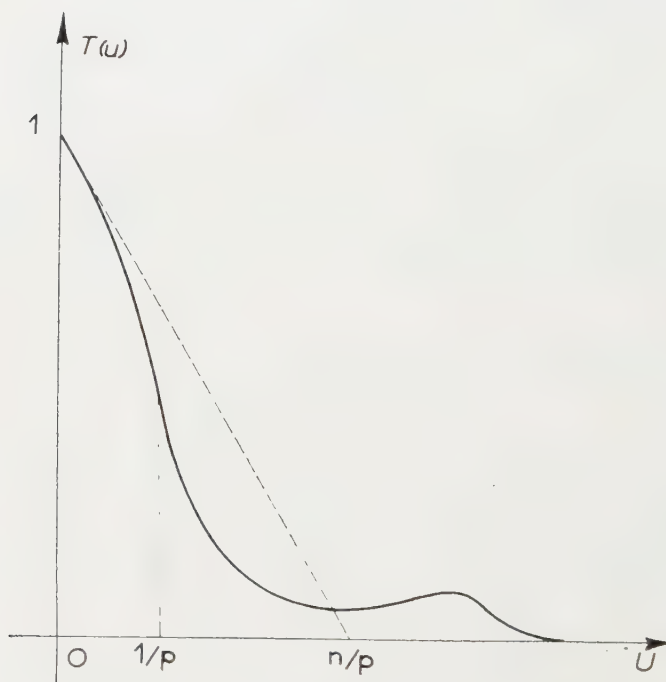


Figure 4.

alors qu'une mire vraiment périodique donnerait

$$1 + T \cos \frac{2\pi x}{p}.$$

Bref, on peut effectuer la correction consistant à prendre non pas le facteur de contraste mesuré T' , mais une valeur

$$T'' = \left(1 - \frac{A}{2a}\right) T' - \frac{C}{2\pi a^2}.$$

Avec l'exemple du §4 (l'éclairement du trait à partir du centre est 4,3 pour cent de celui du trait central) on a

$$a = Np$$

tandis que si la tangente à l'origine aboutit sur l'axe des u à une fréquence n fois plus grande que celle considérée, on écrit

$$A = \frac{p}{n}$$

Si $N=15$, $n=2$ l'erreur relative est de $1/30^{\circ}$ (par excès).

En un minimum de $T(u, v)$ où une variation α/p de la fréquence produit une variation βT du facteur de transmission, la courbure introduit une autre erreur relative

$$\frac{\beta}{2\pi \alpha^2 N^2}.$$

Si la valeur d'un minimum est faible, on le constatera pour une fréquence plus ou moins voisine de celle à laquelle il a lieu. L'erreur commise sur T est par excès aux minima, par défaut aux maxima.

Pour l'erreur due à la pente A , la meilleure méthode consiste sans doute à comparer l'objectif essayé avec un instrument parfait de même ouverture: l'erreur s'élimine ainsi et la correction devient inutile.

7. REALISATION PRATIQUE

Le masque de Gauss peut être réalisé en collant une lentille plan concave en verre absorbant à un verre clair plan convexe de même indice et de puissance opposée.

La densité, fonction linéaire de l'épaisseur de verre absorbant, doit être proportionnelle au carré de la distance au centre puisque la transparence énergétique est de la forme $t = \exp(-\alpha^2 x^2)$.

Le surface de collage exacte serait donc une parabole. On obtiendra cependant de bons résultats avec des surfaces sphériques.

REMERCIEMENT

Je tiens à exprimer mes remerciements à Monsieur Maréchal qui m'a signalé l'intérêt de ces questions et m'a guidé de ses précieux conseils.

One is to-day more and more inclined to indicate the old-fashioned factor of the 'dissolution limit' of the optical instrument by stating the 'transmission factor' as the function of the linear frequency because it quite obviously reflects the quality of an instrument very much better.

A main source of errors in all arrangements used in the measuring of this factor can lie in too small a linear number of the periodic grate. It is therefore necessary to examine the influence of the linear number on the accuracy of measurements and to search for means of limiting the error thus arising.

Man neigt heute immer mehr dazu, die veraltete Angabe der 'Auflösungsgrenze' eines optischen Instrumentes durch die Angabe des 'Übertragungsfaktors' als Funktion der Linienfrequenz anzugeben, weil sie ganz offensichtlich die Güte eines Instrumentes sehr viel besser widerspiegelt.

Eine Hauptfehlerquelle bei allen Anordnungen, die für die Messung dieses Faktors benutzt werden, kann in einer zu kleinen Strichzahl des periodischen Gitters liegen. Es ist deshalb notwendig, den Einfluß der Strichzahl auf die Meßgenauigkeit zu untersuchen und sich nach Mitteln umzusehen, die den so entstehenden Fehler einengen.

Changes in the positions of the invariant colours with the state of adaptation of the eye

by ELAINE G. T. WASSEF and EVONE AZIZ

University College for Girls, Ein Shams University, Cairo, U.A.R.

(Received 13 July 1960)

The colours which retain their daylight appearances to each of five observers under three cases of chromatic adaptation and one case of white adaptation are determined from binocular matching data.

The assumption of the linearity of the relationship between the tristimulus values of the corresponding colours which underlies the analytical treatment of the data is shown to be fulfilled in all the cases, the evidence being the agreement between the observed matches and those computed from the linear transformation.

The invariant colours under each of the adaptation conditions were calculated for each observer and also from the mean matches of all the observers.

The scatter of the individuals' invariants about the invariants obtained from the mean matches provides a criterion for testing the significance of the changes of the latter from one state of adaptation to the other.

The analysis clearly reveals significant changes of the invariants in two regions.

1. INTRODUCTION

According to the trichromatic theory of colour vision the eye is endowed with three receptor systems having maximum sensitivities in the red, green and blue regions of the spectrum, respectively. If the eye is presented with a colour stimulus these receptors are affected to different extents and their additive response gives the colour sensation. When the adaptation of the eye is changed, the relative responses of the receptors change and the stimulus evokes another colour sensation. If on the other hand the colour stimulus acts on only one of the receptors, the colour quality of the stimulus will not change with the adaptation, and this stimulus would be associated with one of the receptor systems in the eye.

Some investigators attempted to identify the three receptor systems of the Young-Helmholtz theory by locating the colours which remained invariant to changing the conditions of adaptation [1, 2]. Knowledge of these invariants would enable prediction of the appearance of colours under any state of adaptation; for it was postulated that the sensitivities of the receptors changed according to coefficients depending on the physical characteristics of the new adapting source.

But prediction formulae based on values of receptors determined by various methods failed to yield results in accord with the observations [3, 4]; and opinion divided as regards the cause of the discordances. First, the nature of the three receptors were suspected. When no further modification of the chosen values could eliminate the failures of the prediction formulae, the form of the relationship between the sensitivities of the receptors under different states of adaptation was questioned. Some authors attempted to improve the situation by the addition of more variables implying the assumption of more than the three receptors [4].

A fresh approach was initiated by one of the authors in an earlier publication [5] in which the affinity of the transformation between the tristimulus values of corresponding colours was established without drawing on the trichromatic theory. The geometrical properties of the affine transformation were used to obtain the positions of the colours which remained unaltered in their colour appearances. Detailed study of the sets of invariant colours thus computed from matching data under different pairs of adaptation conditions may well be expected to decide whether or not there exists a unique set of three invariants.

The results of earlier work [6] revealed conspicuous changes in the location of one of the invariants, in both the cases of white and coloured adaptation. Smaller changes in the position of another invariant were also recorded. As it was deemed necessary to ensure that these changes were not peculiar to the observer herself, and to evaluate the significance of the observed shifts, the scope of the experimental work was extended to provide material for the assessment of these changes in relation to individual differences.

2. EXPERIMENT

The experiment was planned to give the colours which evoke similar colour sensations under different pairs of adaptation conditions. The modified form of the binocular viewer [6] was used. The observations were made by four undergraduates of the College after preliminary training on the assessment of colour differences in terms of the three attributes of the Munsell system. The observational procedure was described in the paper referred to above.

Each of ten coloured Munsell samples chosen from the major hues of chroma 6 and value 5 was viewed under either illuminant A or one of the magenta, yellow and green illuminations and matched under an approximation to daylight illumination. Each of the ten reference samples was matched once in every observing session which lasted about half an hour. Every session was preceded by five minutes dark adaptation and five minutes adaptation to the respective illuminant.

The coloured illuminations were obtained from standardized tungsten lamps and the Wratten filters Nos. 32, 8 and 58; the daylight illumination was obtained from a daylight filter and standard illuminant A. The spectral transmission curves of the Wratten filters were given before [6], the transmission of the daylight filter is given in figure 1. This was measured on a Uvispec Hilger spectrophotometer.

The tristimulus values of the reference samples under each of the illuminants were calculated for the C.I.E. standard observer using the distribution coefficients of the equal-energy spectrum and the spectral energy distribution of the respective illuminant-filter combination together with the spectral reflectances of the samples.

3. RESULTS AND DISCUSSION

The means of the matches obtained by each of the four observers under every adaptation condition are given in Munsell notation in table 1. The tristimulus values of the average matches were calculated and the chromaticity coordinates were derived therefrom. The positions of the average matches on the C.I.E. chart for two of the observers are plotted on figure 2(a, b) together with the positions of the reference samples under each of the illuminants, in

order to show the different appearances which the coloured samples took when the eye was adapted to the illuminants.

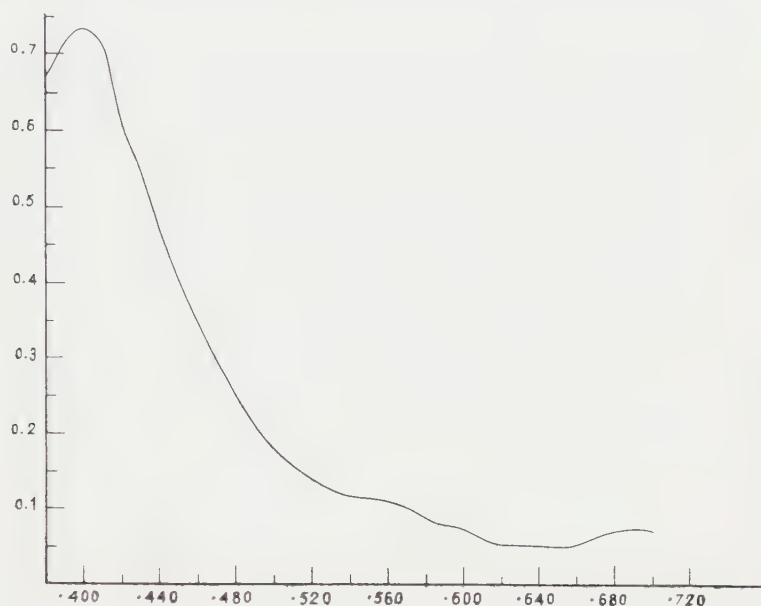


Figure 1. Spectral transmission of the daylight filter.

It is clear that although the colours greatly changed their chromaticities under the different illuminants, their appearances to an eye adapted to the illuminating source is much nearer the region which contains the colours under daylight illumination. The deviations of the matches from the positions which would be occupied by the samples under C are however indicative of the deviation from the colour constancy theory. Furthermore, the distance between the position occupied by a standard sample and that of a match is an indication of the extent of the adaptation of the eye.

It should perhaps be emphasized that drawing conclusions about colour appearances from these figures is legitimate, since all the matches were made under one and the same adaptation condition, namely daylight adaptation.

The presence of individual differences can be seen from figure 3(a, b, c, d) where the matches of the four observers under the same adaptation conditions are given. The differences are large enough to warrant the analysis of the data of each observer separately. The general means of the matches of all observers were also analysed.

In each case the nine coefficients m_{rs} in the linear transformation of the tristimulus value of corresponding colours

$$X' = m_{11}X + m_{12}Y + m_{13}Z,$$

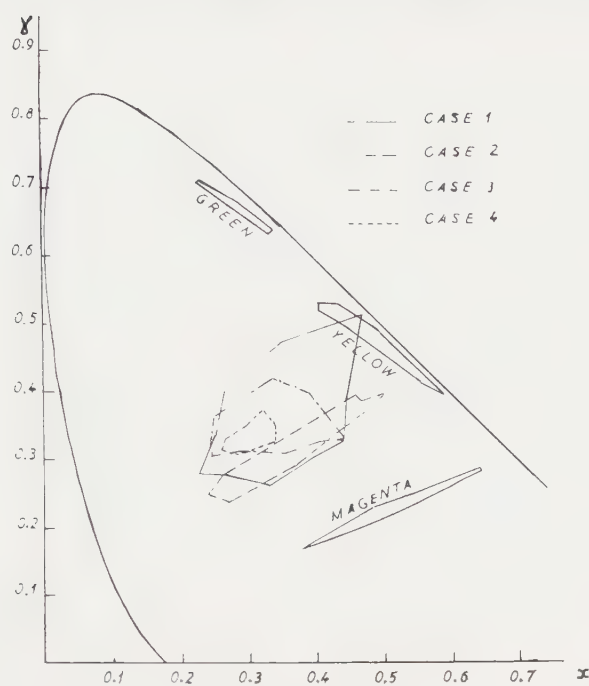
$$Y' = m_{21}X + m_{22}Y + m_{23}Z,$$

$$Z' = m_{31}X + m_{32}Y + m_{33}Z,$$

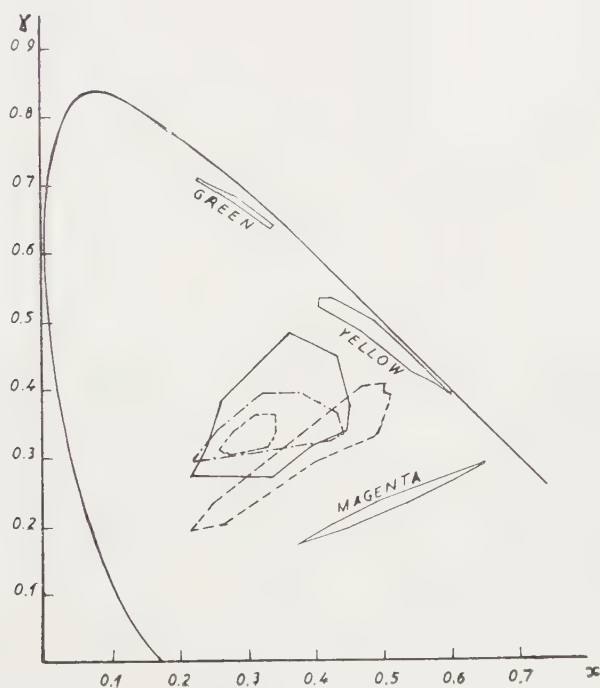
were calculated by the method of least squares reducing to a minimum the sum of the squares of the residuals. Four matrices were calculated from the means

Observer sample	Matches			
	Under A	Under A + F32	Under A + F8	Under A + F58
1 R	6-75R 5-92/9-33	0-42YR 6-25/9-33	6-88R 6-16/9-33	6-67R 4-5/1-33
YR	5-66YR 5-78/7-33	4-05YR 5-57/10-33	3-16YR 6-42/7	5-58YR 5/1-33
Y	6-92Y 6-11/8-33	4-83YR 4-75/7-66	5-16Y 6-16/4-5	5-45Y 5-42/1-66
GY	7-28GY 5-67/7-5	6-42YR 4-58/6-33	7-62GY 6-25/5	9-04GY 6-62/3-33
G	3-75G 6-03/7	0-62BG 4-86/1-5 N 3-5/0	8-22G 5-33/5-5	6-05G 6-17/3
BG	3-12BG 5-5/6	8-88B 4-9/3-33	5BG 5-53/6-16	1-67BG 5-97/4
B	2-66B 5-8/6-33	2-5PB 4-71/5-66	8-33BG 5-5/6-16	5-67BG 5-75/4-5
PB	2-5PB 5-83/3-5	0-25P 4-83/5-33	7-92BG 5-92/2	7-82BG 5-78/1-83
P	1-41RP 5-92/7-33	8-08RP 5-58/7-17	2-95R 5-8/5	N 5-5/0 2-5G 5-25/1-5 5PB 5/1 N 5-52
RP	1-67R 6/8	7-92R 6-26/8-67	6-58R 6-25/7-66	
2 R	6-9R 5-91/9-33	2-5YR 6-25/11-86	6-29R 5-83/9-33	4R 4-75/1-16
YR	2-92YR 6-22/8	3-56YR 5-5/10-83	1-26YR 5-88/6-33	5-16YR 5-55/1-5
Y	5Y 5-83/6	5YR/10	3-75Y 5-83/3-83	8-33Y 5-25/1-91
GY	5-83GY 5-5/7	6-45YR 4-08/6-67	8-12GY 6-38/3-83	0-42G 5-91/2-5
G	6-25G 5-62/6	N 2-17 5P 4-5/1-66	2-61BG 5-5/5	0-42BG 5-42/2-75
BG	5-83BG 5-5/6	7-33PB 4/5-33	5-10BG 5-63/5-66	7-38BG 5-58/3-67
B	4-2B 5-75/6	7-08PB 3-92/10	10BG 5-29/6-33	9-42BG 5-58/3-91
PB	3-08PB 6-22/4-66	2-53P 4-5/7-66	5-88B 5-88/2	9-8BG 5-78/2-25
P	2-12RP 6/7-66	8-75RP 5-08/7-66	1-45R 5-41/4-33	2PB 5-16/1-2
RP	2-25R 5-92/7-66	8-34R 5-58/9	5-58R 5-91/8-33	5P 4-5/1
3 R	8-54R 5-38/10-5	1-95YR 5-83/11	6-25R 5-5/9-66	0-83YR 4/1-66
YR	5-5YR 5-37/7-66	3-42YR 5-5/11-67	1YR 5-7/6-33	7-08YR 4-58/1-58
Y	6-45Y 5-58/6-66	5-4YR 5/9	4-58Y 5-91/4-71	7-08Y 4-96/2
GY	6-66GY 5-54/7	7-92YR 4-42/6-5	8-92GY 5-46/4-92	6-92GY 5-42/3-33
G	4-33G 5-5/6-08	2-5G 2-62/1 2-5P 3-75/1	8-17G 4-92/5-83	5-2G 5-17/2-83
BG	3-08BG 5/92	0-83PB 4-17/3-79	3-17BG 5-25/5-75	9-88G 5-17/3-33
B	1-75B 5-03/6	2-08PB 4-17/7-17	9-85BG 4-75/6	1-92BG 4-83/3-16
PB	2-92PB 5-29/4-08	1-40P 4-76/5-33	0-9PB 5-2/1-4	9-8G 5-25/2-33
P	1-63RP 5-45/6-25	7-75RP 5-37/7-08	9-17RP 5-67/5	5-56BG 3-33/1 9-16GY 5-33/2-33 6-25Y 5-5/2
RP	4-25R 5-66/9	8-96R 5-8/8-58	3-75R 5-75/8	
4 R	5-87R 5-66/8-33	0-72YR 5-83/8-33	4-34R 5-33/9-17	2-75R 4-6/2-75
YR	5-21YR 5-5/7	2-5YR 5-42/9-42	2-42YR 5-72/7	1-25YR 4-58/3-16
Y	7-04Y 5-85/6-83	3-75YR 4-83/8-42	3-58Y 4-88/3-17	3-3Y 4-7/3 N 7/0
GY	7-2GY 5-75/7-25	5-22YR 4-76/4-75	0-83G 5-55/5-5	6-5GY 5-38/4-67
G	6-46G 5-56/7	7-1BG 4-6/2-66 5-75YR 4/1-5	0-25BG 5/6-33	8-37G 5-17/4-83
BG	2-8BG 5-03/6-83	1-62PB 4-5/5-26	5-25BG 4-83/6	1-13BG 5-3/4-83
B	3-25B 4-92/6-67	0-62PB 4-26/7	8-5BG 4-75/5-66	5-25BG 5/4-5
PB	6-33PB 5/5-67	9-5PB 4-84/5-67	N 3-75 0-62B 5-5/2-62	5BG 5/3-25
P	0-12RP 5-22/6-67	3-82RP 4-83/7-5	1-42R 5-3/4-50	N 3-5 9-25PB 5-2/2-25 9-1RP 4-7/1-3
RP	0-95R 5-58/8	6-96R 5-33/8	4-80R 5-5/6-67	
Mean of all five observers				
R	7-0R 5-77/9-98	1-66YR 6-03/10-66	5-68R 5-75/9-80	3-56R 4-47/1-58
YR	4-65YR 5-80/7-80	3-77YR 5-53/10-65	1-13YR 6-01/6-93	2-26YR 4-94/1-71
Y	6-25Y 5-96/7-02	5-33YR 4-90/8-72	3-69Y 5-79/3-84	6-45Y 5-10/1-94
GY	6-81GY 5-72/6-88	6-64YR 4-43/5-95	9-76GY 6-08/4-55	9-30GY 5-89/3-15
G	5-44G 5-71/6-42	3-75P 3-68/1-33 1-95G 4-08/1-85 N 2-8	0-19BG 5-27/5-73	8-20G 5-51/3-28
BG	3-98BG 5-35/6-35	3-28PB 4-36/4-27	4-80BG 5-32/6-01	3-64BG 5-52/3-87
B	2-97B 5-39/6-43	3-97PB 4-26/7-20	9-60BG 5-15/6-10	5-92BG 5-33/3-88
PB	3-19PB 5-62/4-25	1-57P 4-75/5-88	1-16B 5-78/2 N 4-33/0	5-60BG 5-42/2-37
P	1-72RP 5-65/7-05	7-36RP 5-28/7-60	1-67R 5-61/5-0	3-08PB 4-91/1-44 6-25G 4-9/1-5 N 4-5/0 4-36R 4-26/1 8-12Y 4-75/1-75 N 5-2/0 9-14PB 5-26/1
RP	2-30R 5-86/8-56	8-40R 5-79/8-72	5-11R 5-89/8-00	

Table 1. Matches under illuminant C for standard samples under illuminant A, A + F2, A + F8, A + F58.

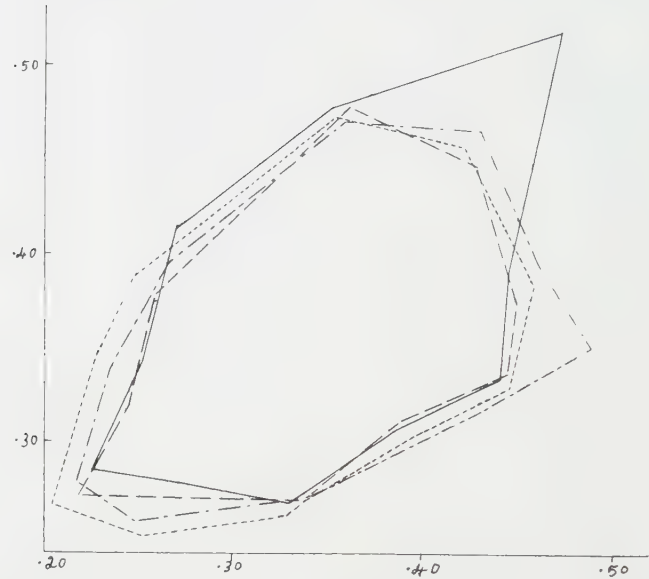


(a) Matches under illuminant C for samples under the four investigated cases made by observer 1.

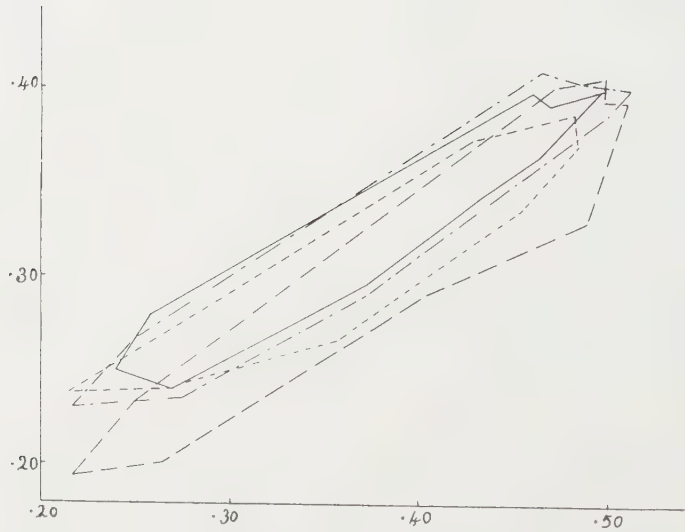


(b) Matches under illuminant C for samples under the four investigated cases made by observer 2.

Figure 2.

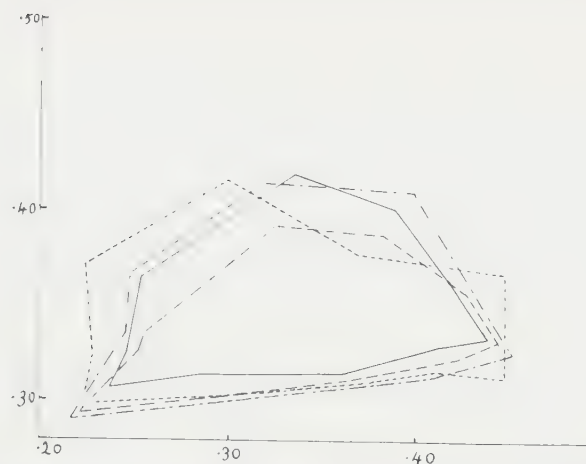


(a) Matches under C made by the four observers for samples under illuminant A.

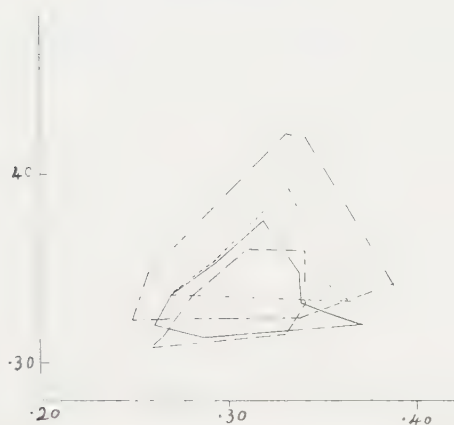


(b) Matches under C for samples under illuminant A + F32.

Figure 3.



(c) Matches under C for samples under illuminant A + F8.



(d) Matches under C for samples under A + F58

Figure 3 (*continued*).

of all observers under the four investigated cases of adaptation. Each match is a mean of thirty observations, the data of Wassef [6] being included.

Before embarking on the evaluation of the invariant colours from numerical analysis of these matrices, the linearity of the transformation was tested to check that the data comply with this basic requirement. The matrices were therefore used to calculate the predicted matches which were then compared with the observed values. The goodness of the representation of the relationship between the tristimulus values by the affine transformation given above is remarkably good, in particular for the means of the five observers, as may be seen from table 2 and figure 4. The mean distance between the positions of the observed and the calculated matches on the C.I.E. chart is 0.008 in the cases of tungsten and magenta adaptations, and 0.010 in the cases of yellow and green adaptations. The shift exceeded 0.02 only twice in the forty given cases. For individual observers, however, the discrepancies were larger, but the fit is nevertheless good. This is of course expected since the number of observations was smaller.

	Observed					Calculated					
	X	Y	Z	x	y	X	Y	Z	x	y	
R	0.382	0.282	0.174	0.4560	0.3367	0.412	0.296	0.181	0.4634	0.3330	0.0082
YR	0.354	0.300	0.122	0.4562	0.3863	0.343	0.296	0.116	0.4543	0.3920	0.0060
Y	0.291	0.309	0.090	0.4217	0.4484	0.270	0.297	0.083	0.4154	0.4554	0.0094
GY	0.223	0.291	0.111	0.3546	0.4663	0.233	0.299	0.127	0.3536	0.4537	0.0129
G	0.176	0.271	0.245	0.2544	0.3914	0.171	0.256	0.213	0.2672	0.4000	0.0154
BG	0.188	0.260	0.334	0.2408	0.3322	0.199	0.276	0.352	0.2406	0.3337	0.0015
B	0.190	0.240	0.440	0.2185	0.2756	0.208	0.248	0.455	0.2283	0.2722	0.0100
PB	0.286	0.296	0.510	0.2620	0.2708	0.290	0.298	0.509	0.2644	0.2716	0.0024
P	0.369	0.297	0.442	0.3330	0.2677	0.328	0.269	0.411	0.3254	0.2669	0.0076
RP	0.382	0.292	0.277	0.4014	0.3076	0.389	0.300	0.295	0.3953	0.3049	0.0067

(a) Observed and calculated mean matches under illuminant C when samples were seen under illuminant A.

	Observed					Calculated					
	X	Y	Z	x	y	X	Y	Z	x	y	
R	0.415	0.322	0.102	0.4948	0.3837	0.437	0.340	0.096	0.5006	0.3895	0.0082
YR	0.330	0.261	0.071	0.4980	0.3946	0.323	0.259	0.070	0.4954	0.3972	0.0037
Y	0.240	0.199	0.058	0.4827	0.4011	0.211	0.176	0.049	0.4839	0.4037	0.0028
GY	0.184	0.162	0.080	0.4317	0.3801	0.173	0.149	0.085	0.4251	0.3661	0.0156
G	0.112	0.117	0.141	0.3014	0.3168	0.125	0.130	0.172	0.2927	0.3044	0.0151
BG	0.156	0.162	0.304	0.2520	0.2599	0.155	0.162	0.293	0.2541	0.2656	0.0062
B	0.159	0.164	0.387	0.2238	0.2306	0.158	0.162	0.383	0.2248	0.2304	0.0010
PB	0.220	0.187	0.406	0.2706	0.2303	0.225	0.193	0.398	0.2757	0.2365	0.0080
P	0.320	0.245	0.286	0.3767	0.2878	0.302	0.231	0.288	0.3678	0.2814	0.0109
RP	0.379	0.292	0.167	0.4522	0.3480	0.386	0.296	0.183	0.4462	0.3422	0.0083

(b) Observed and calculated mean matches under illuminant C when samples were seen under illuminant A + F32.

	Observed					Calculated					
	X	Y	Z	x	y	X	Y	Z	x	y	
R	0.396	0.290	0.203	0.4451	0.3261	0.435	0.310	0.208	0.4564	0.3253	0.0113
YR	0.393	0.326	0.189	0.4328	0.3589	0.369	0.312	0.190	0.4236	0.3582	0.0092
Y	0.288	0.294	0.172	0.3820	0.3900	0.294	0.310	0.181	0.3745	0.3949	0.0089
GY	0.253	0.323	0.234	0.3121	0.3992	0.253	0.308	0.213	0.3269	0.3929	0.0149
G	0.172	0.244	0.271	0.2501	0.3550	0.178	0.248	0.265	0.2576	0.3589	0.0084
BG	0.188	0.254	0.334	0.2418	0.3277	0.194	0.262	0.342	0.2431	0.2383	0.0014
B	0.176	0.234	0.388	0.2203	0.2933	0.180	0.231	0.346	0.2376	0.3052	0.0212
PB	0.254	0.278	0.374	0.2805	0.3070	0.262	0.300	0.345	0.2889	0.3308	0.0252
P	0.350	0.298	0.300	0.3690	0.3143	0.311	0.269	0.271	0.3654	0.3161	0.0040
RP	0.400	0.309	0.254	0.4153	0.3210	0.394	0.309	0.248	0.4143	0.3249	0.0040

(c) Observed and calculated mean matches under illuminant C when samples were seen under illuminant A + F8.

	Observed					Calculated					
	X	Y	Z	x	y	X	Y	Z	x	y	
R	0.165	0.162	0.154	0.3425	0.3362	0.170	0.160	0.173	0.3380	0.3181	0.0186
YR	0.226	0.212	0.196	0.3561	0.3349	0.200	0.194	0.182	0.3472	0.3362	0.0090
Y	0.206	0.215	0.181	0.3426	0.3564	0.232	0.230	0.202	0.3494	0.3464	0.0121
GY	0.246	0.294	0.240	0.3156	0.3768	0.241	0.290	0.235	0.3146	0.3786	0.0020
G	0.206	0.261	0.280	0.2752	0.3496	0.209	0.263	0.289	0.2746	0.3456	0.0040
BG	0.222	0.275	0.340	0.2652	0.3285	0.224	0.278	0.348	0.2635	0.3270	0.0022
B	0.202	0.251	0.316	0.2625	0.3269	0.199	0.242	0.321	0.2612	0.3176	0.0094
PB	0.230	0.266	0.330	0.2785	0.3218	0.230	0.267	0.316	0.2829	0.3284	0.1079
P	0.179	0.189	0.244	0.2922	0.3089	0.184	0.200	0.232	0.2987	0.3247	0.0171
RP	0.196	0.198	0.232	0.3140	0.3160	0.189	0.197	0.213	0.3155	0.3289	0.0131

(d) Observed and calculated mean matches under illuminant C when samples were viewed under illuminant A + F58.

Table 2.

Having thus established that the data agree with the hypothesis of linearity, the roots of the cubic equations were calculated (table 3) and the unaltered directions were computed both for the means and for the individual observers as described before [6]. These directions are projected on the C.I.E. plane as points which represent the chromaticities of colours which keep their daylight appearances after adaptation to the respective illuminants. The invariant colours thus computed are given in table 4.

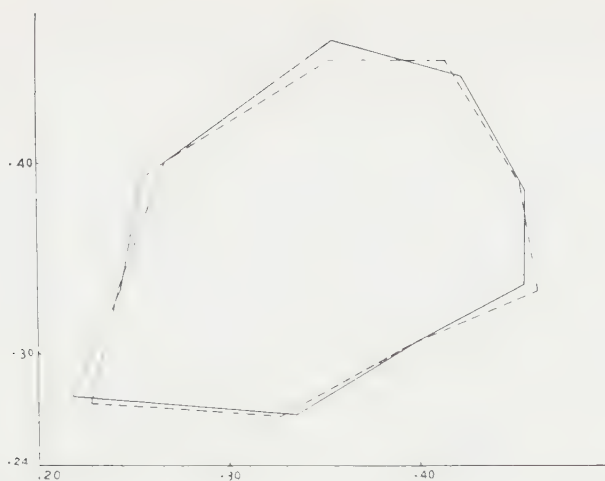
It is evident that the data do not support the assumption of a unique set of three invariants. Nevertheless, the invariants appear in clusters.

Case of adapt.	Observer	1	2	3
A	1	1.0029	1.8330	4.1591
	2	1.0889	1.5201	4.1994
	3	0.9591	1.6460	3.3089
	4	1.0082	1.8839	2.8968
	5	1.1651	Complex	Complex
	<i>m</i>	1.0328	1.7932	3.6222
A + F32	1	0.1032	0.6197	0.0352
	2	0.1110	0.3236	0.0285
	3	0.1014	0.4476	0.0331
	4	0.0970	0.6572	0.0240
	5	0.0928	0.3064	0.0412
	<i>m</i>	0.1006	0.4354	0.0334
A + F8	1	0.0250	0.0436	0.3712
	2	0.0192	0.0452	0.2804
	3	0.0243	0.0346	0.3302
	4	0.0362	0.0194	0.2758
	5	0.0272	Complex	Complex
	<i>m</i>	0.0262	0.0437	0.2598
A + F58	1	Complex	Complex	0.7257
	2	0.2212	0.0783	2.1096
	3	0.1671	0.0921	1.0861
	4	0.2162	0.0773	1.5340
	5	Complex	0.1085	Complex
	<i>m</i>	0.1771	0.1116	1.4478

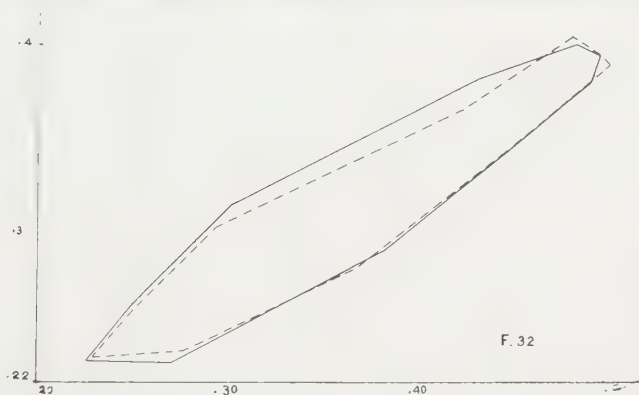
Table 3. Roots of the cubic equations.

Let us consider the invariants determined from the mean matches. The red invariant took the close positions (0.6794, 0.3260) and (0.6687, 0.3339) in the cases of white and yellow adaptations respectively, but it shifted towards the violet in the case of magenta adaptation (0.5816, 0.2284) and it fell outside the colour chart in the case of green adaptation (0.7529, 0.3559).

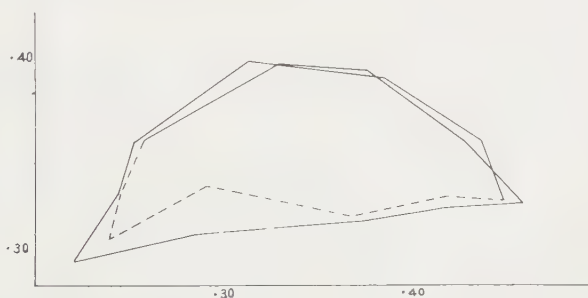
Larger shifts showed up in the case of invariants in the green region. The other invariants appeared below the blue region of the spectrum colours, with negative *y* coordinates.



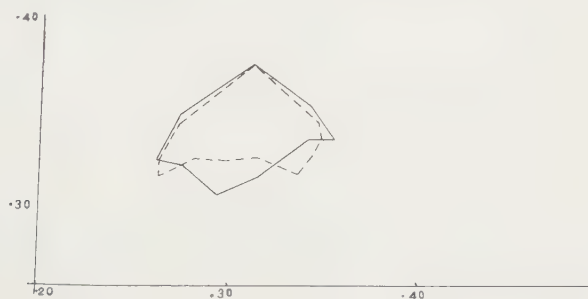
(a) Observed and computed matches under C for samples under illuminant A.



(b) Observed and computed matches under C for samples under illuminant A + F32.



(c) Observed and computed matches under C for samples under illuminant A + F8.



(d) Observed and computed matches under C for samples under illuminant A + F58.

Figure 4.

Case of adapt.	Observer	1		2		3	
A	1	0.6813	0.3383	0.1398	0.7713	0.1779	0.0610
	2	0.7399	0.2853	-0.2442	1.1675	0.1870	0.0943
	3	0.6188	0.3396	0.0074	1.075	0.1520	-0.0482
	4	0.6912	0.3208	0.1592	0.984	-0.1126	-0.9997
	5	0.641	0.342	Complex		Complex	
	<i>m</i>	0.6794	0.3260	0.0980	0.9825	0.1427	-0.0325
A + F32	1	0.5852	0.2373	0.2231	0.3780	0.0835	0.0135
	2	0.5282	0.2010	0.1980	0.2460	-0.0048	0.0053
	3	0.5936	0.2343	0.2175	0.3981	0.0254	-0.0087
	4	0.5742	0.2366	0.2628	0.3407	-0.1187	-0.0774
	5	0.555	0.200	0.156	0.359	0.132	0.014
	<i>m</i>	0.5816	0.2284	0.2071	0.3586	0.0552	-0.0752
A + F8	1	0.7154	0.2980	0.2483	0.7644	0.1151	0.0037
	2	0.7393	0.3025	0.3754	0.6950	0.0508	-0.0996
	3	0.7000	0.3149	0.1865	0.7986	0.1003	-0.0045
	4	0.6760	0.3298	2.5	-1.3	0.2045	0.0736
	5	0.684	0.335	Complex		Complex	
	<i>m</i>	0.6687	0.3339	0.1704	0.8855	0.1117	-0.0666
A + F58	1	Complex		0.6043	1.0150	Complex	
	2	0.6023	0.4785	0.1603	0.8083	0.2406	0.1485
	3	0.6891	0.4251	-0.1871	0.9064	0.1124	-0.2772
	4	0.6623	0.3377	0.1081	0.8746	0.1272	0.0126
	5	Complex		2.481	-0.656	Complex	
	<i>m</i>	0.7529	0.3559	-0.1728	1.0955	0.1745	-0.0971

Table 4. Invariant colours as determined from the means and from individual observer's data.

In view of the fact that the positions of the invariants are determined from the mean matches of only five observers resort must be made to statistical methods to test the significance of the recorded shifts.

Let us first consider the invariants in the red region of the chart, where the five observers gave remarkably close determinations under each case of adaptation. Significance of the effect of changing the adaptation condition on the location of the invariants may be tested with reference to the scatter of the invariants due to individual differences within the same adaptation condition. The scatter may be assessed by the standard deviation, s , of the individuals' invariants from the point which represents the invariant derived from the means. If s' is the standard deviation under another state of adaptation, and n and n' are the number of observers who made the matches in the two cases respectively, then the variance σ^2 of the shift associated with the change of adaptation may be computed from the formula

$$\sigma^2 = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} \right) \frac{ns^2 + n's'^2}{n + n' - 2}.$$

The ratio of the shift, d , to its standard deviation, σ , thus computed may be assumed to follow approximately the t -distribution. The quantities d and σ are given in table 5.

	Case	Shift on CIE chart	Standard deviation
Invariants in the red region	Illt. A & A + F32	0.138	0.0295
	Illt. A & A + F8	0.013	0.0350
	A + F32 & A + F8	0.137	0.0322
Invariants in the green region	Illt. A & A + F32	0.6334	0.1047
	Illt. A & A + F8	0.1201	0.0535
	A + F32 & A + F8	0.528	0.0644
Invariants in the blue region	Illt. A & A + F32	0.0974	0.1104
	Illt. A & A + F8	0.0451	0.1013
	A + F32 & A + F8	0.0572	0.0959

Table 5. Shifts between the invariants as determined from the means.

Consulting the tables of the *t*-distribution it was found that the invariant determined from matches made under magenta adaptation was significantly displaced from both the positions of the invariants determined under white and yellow adaptations. As regards the green adaptation, most of the observers did not give an invariant in the red region.

Similar treatment of the invariants which fell in the green region showed that the magenta adaptation gave rise to significant shifts of the position of the invariant in this region.

No statistical significance could be attached to the influence of the adaptation conditions on invariants falling in or about the blue region; probably because of the large scatter of the invariants.

On détermine, à partir de données d'équilibrage binoculaire, les couleurs qui conservent leurs aspects de la lumière du jour pour chacun de cinq observateurs dans trois cas d'adaptation chromatique et un cas d'adaptation blanche.

On montre que l'hypothèse de la linéarité de la relation entre les valeurs du tristimulus des couleurs correspondantes, qui est à la base du traitement analytique des données, est vérifiée dans tous les cas; ceci étant mis en évidence par l'accord entre les équilibres observés et ceux calculés à partir de la transformation linéaire.

Les couleurs invariantes pour chacune des conditions d'adaptation ont été calculées pour chaque observateur et aussi à partir des équilibres moyens de tous les observateurs.

La dispersion des invariants des individus par rapport aux invariants obtenus à partir des équilibres moyens fournit un critère pour juger de la signification des variations de ces derniers d'un état d'adaptation à l'autre.

L'analyse révèle clairement de nettes modifications des invariants dans deux régions.

Die Farben, die ihr Tageslicht-Aussehen für jeden von fünf Beobachtern beibehalten (in drei Fällen Farbadaptation und in einem Fall Weißadaptation), werden aus den binokularen Farbmischwerten bestimmt. Es zeigt sich, daß die Annahme, die lineare Beziehung zwischen den Reiztripeln entsprechender Farben sei der analytischen Behandlung zugänglich, in allen Fällen zutrifft. Dabei stimmen die beobachteten Mischwerte mit denen, die aus der linearen Transformation berechnet werden, offensichtlich überein.

Die invarianten Farben bei jeder der Adaptationsbedingungen werden für jeden Beobachter berechnet und ebenso aus den mittleren Mischungen aller Beobachter.

Die Streuung der Invarianten für jede einzelne Beobachtung gegenüber den Invarianten, die man aus den mittleren Mischwerten erhält, liefert ein Kriterium zum Nachweis der Bedeutung von Änderungen der letzteren beim Übergang von einem Adaptationszustand zu dem anderen.

Die Untersuchung zeigt deutlich die wichtigen Änderungen der Invarianten in zwei Bereichen.

REFERENCES

- [1] WRIGHT, W. D., 1946, *Researches on Normal and Defective Colour Vision* (London : Henry Kempton).
- [2] WALTERS, H. V., 1942, *Proc. roy. Soc. B*, **131**, 27.
- [3] HELSON, H., JUDD, D. B., and WARREN, M. H., 1952, *Illum. Engr, N.Y.*, **47**, 221.
- [4] MACADAM, D. L., 1956, *J. Soc. Mot. Pict. Tele. Engrs*, **65**, 455.
- [5] WASSEF, E. G. T., 1958, *Opt. Acta*, **5**, 101.
- [6] WASSEF, E. G. T., 1959, *Opt. Acta*, **6**, 378.

Extra-foveal colour metrics

by F. J. J. CLARKE

Technical Optics Section, Imperial College, London†

(Received 23 May 1960)

A series of monochromatic equal-brightness stimuli of subtense $40' \times 80'$ was established through the spectrum by direct comparison with a neighbouring $530\text{ m}\mu$ patch of retinal illumination $10\cdot8$ photopic trolands. The separated test and comparison fields lay at 10° eccentricity in the nasal meridian, had dark surrounds and were viewed by a flash-and-recovery cycle, using 2 or 30 flashes to establish the matches. These test stimuli were subsequently matched by comparison with a foveal patch consisting of matching stimuli $650\text{ m}\mu$, $530\text{ m}\mu$ and $460\text{ m}\mu$, results being plotted as a spectrum locus in the foveal chromaticity chart. Luminous efficiency functions were determined, both for heterochromatic matching and by computation from the foveal comparison colour matches. Selected colour stimuli were also matched using 4, 8, 16 or 30 flashes to establish the matches, and it was found that the matches varied systematically with the number of flashes. Series of equal-brightness mixtures of 430 and $530\text{ m}\mu$ and of 480 and $650\text{ m}\mu$ were calculated (assuming additivity to hold), and these were matched in both foveal and extra-foveal *RGB* systems. Gross failures of both chromatic and photometric additivity were always found. In a theoretical appendix it is shown that the presence of rod intrusion does not lead to additivity failures if there is no interaction between cone and rod responses. With cone-rod interaction it is shown that general additivity failure occurs, whether the *RGB* comparison field is presented either foveally or extra-foveally.

1. INTRODUCTION

A study of colour metrics involves a knowledge of relative luminous efficiency and of the basic laws of mixing coloured lights, with particular emphasis on the concepts of trichromacy and additivity. Without such knowledge a realistic system of colorimetry cannot be established. During the nineteenth century the colour metrics of foveal vision were gradually ascertained, though adequate Standard Observer Data were not adopted until 1924 and 1931. In contrast to the numerous foveal investigations that have been made over the years, extra-foveal colour metrics have been largely neglected, due principally to the difficulties of observations.

Early attempts at measuring extra-foveal luminous efficiency functions by Ebert (1888), Langley (1888), Hillebrand (1890), König (1891), Abney and Festing (1893), v. Kries (1896), Nagel (1898), Pflüger (1902) and Houstoun (1913) were concerned with low levels of illumination (the scotopic function). Only the studies of König [1], Pflüger [2] and Houstoun [3] achieved much success, but even these were beset with calibration difficulties. More reliable measurements were made by Abney and Watson [4], Hecht and Williams [5], Sloan [6], Stiles and Crawford [7], Weaver [8], Le Grand and Geblewicz [9], Stiles [10], Weigel and Knoll [11], Walters and Wright [12], Wald [13], Crawford [14], and Kinney [15, 16]. The results obtained in these studies where the levels

† Now at the National Physical Laboratory, Teddington, Middlesex.

of illumination were very low [1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14] or where various low or medium levels were used but with a dark adapted retina and dark surround [6, 12, 15, 16] are all in fair agreement. The functions are all basically single-humped and may show a Purkinje shift in appropriate cases. However, certain data show evidence for slight subsidiary humps [7, 12, 15, 16].

By contrast, studies by Stiles and Crawford [7] and by Weale [17, 18] showed that with a white surround the luminous efficiency function becomes markedly tripartite, the magnitude of the subsidiary peaks (especially the blue one) increasing with eccentricity [17, 18]. These last results have been adequately confirmed by the careful studies of Moreland [19] and Moreland and Cruz [20]. A recent study by Sperling and Hsia [21] has shown that the luminous efficiency function is irregular during recovery from a high level of white pre-adaptation. To summarize, these various studies show that the extra-foveal luminous efficiency function is not stable (except under strictly scotopic conditions) and that not only its position in the spectrum but also its shape depends markedly on the particular observing situation.

Towards the end of the nineteenth century the questions arose of whether the presence of rods in the extra-foveal retina would affect the trichromacy of vision, and of whether the additivity property that had been established for foveal vision would also apply in extra-foveal vision. König [22], v. Kries [23] and Tschermak [24] viewed bipartite colorimeter fields in paracentral vision and found a state of trichromacy as for foveal vision, i.e. it was always possible to establish a match with four lights, three of which could be varied continuously in luminance. The stability of colour matches with change in luminance level of all the components by a constant factor was investigated, and it was found that matches broke down under such conditions. As an example, on dimming a match between a white and a mixture of monochromatic red and blue-green, the white became darker than did the mixture, suggestive of a failure of photometric additivity. Le Grand and Geblewicz [25] have since confirmed that failures of photometric additivity occur in extra-foveal vision with a large field.

The first modern investigation of extra-foveal colour mixture data was that of Wright [26] who determined a spectrum locus at 4° eccentricity, a study that was followed up in turn by Gilbert [27] and by Moreland [19, 20]. Moreland presented monochromatic stimuli in extra-foveal vision and matched the colour appearance by means of a foveal comparison field consisting of Wright's primaries, a powerful technique since results can be plotted directly in the foveal W.D.W. system without invoking an unproven assumption of extra-foveal additivity. Moreland thus measured extra-foveal subjective spectrum loci at various eccentricities from 10° to 50° , and demonstrated a progressive contraction of peripheral colour gamut. Bongard *et al.* [28] have recently claimed that extra-foveal vision is tetrachromatic, in spite of the (admitted) fact that trichromatic matches are always possible; since four primary matches cannot be unique, it is difficult to see how reproducible data were obtained.

2. CONTROL OF THE CONDITIONS OF EXTRA-FOVEAL OBSERVATION

In any adequate study of colour metrics the provision of an instrumental exit-pupil is essential if the retinal illumination is to be known. The diameter should be less than the smallest reached in natural pupillary contractions, some $2\frac{1}{2}$ mm.

In extra-foveal vision a complication is introduced by virtue of the fact that the effective eye-pupil is an oblique projection of the natural pupil: to allow for eccentricities up to about 44° without vignetting, an instrumental exit-pupil could be no larger than 2.0 mm.

A serious subjective difficulty arises through the poor acuity of peripheral vision. If a normal sized bipartite colorimeter field (1° to 2° in subtense) is viewed extra-foveally, the two halves cannot in general be clearly distinguished. This is particularly so when a rough colour match has been established, and means that the conventional colorimeter field can only be validly employed for very small eccentricities. This difficulty was first overcome by Weale [17, 18], who separated the test and comparison fields by a small gap to assist resolution, a device adopted since by Moreland [19, 20] and by the present author [29]. (It should be mentioned that the studies of Stiles [30, 31, 32] and of Speranskaya [33] are valid in this respect because of the large field size of 10° , but the question of large field colour metrics is deferred to a later publication.)

The greatest obstacle to satisfactory extra-foveal observation, however, is the subjective 'fading' of extra-foveal stimuli that rapidly sets in after a few seconds [29, 34, 35], variously referred to as Troxler's Effect or local adaptation. This rapid process of adaptation accompanies all attempts at continuous fixation (which are necessary in extra-foveal work to locate the stimulus on a given retinal area), and its significance can be gauged by the fact that bright stimuli may totally disappear after only 5 sec viewing. Moreland [19, 20] introduced a flash-and-recovery cycle for presentation of the test and comparison fields in order to reduce and control the amount of local adaptation, the exposures being normally of $\frac{1}{2}$ sec duration with $1\frac{1}{2}$ sec dark recovery periods intervening. A few other workers [7, 10, 15, 21] have used flash presentation, apparently to achieve an unambiguous threshold setting. Since it has been shown by Clarke [29] that Troxler's Effect is operative at all levels of illumination (from $2.3 \times 10^3 \text{ cd/m}^2$ down to $4.1 \times 10^{-5} \text{ cd/m}^2$ near the dark-adapted absolute threshold), it is clear that all extra-foveal colour studies should employ such a technique.

From these considerations it follows that only Moreland's studies of extra-foveal colour perception have been performed under acceptably controlled conditions, i.e. using small exit-pupils, separated fields and a flashing cycle of presentation.

3. PROGRAMME

It was desired to repeat some of Moreland's observations for two main reasons: firstly to find out how precise and how reproducible extra-foveal colour matching can be made, and secondly, to add fresh evidence to the meagre data that so far exist on extra-foveal colour vision. Moreland's measurements were made under fairly closely controlled conditions. The only uncertainties concerned the number of flashes used for establishing the matches and the brightness level. The latter was only held constant through the spectrum within a factor of about 10:1. In view of the author's studies on local adaptation [29, 34, 35], it was decided to keep the number of flashes closely controlled, the basic number being fixed at 30 for most of the experiments. In view of the studies of König [22], v. Kries [23] and Tschermak [24] cited above, it was decided to try to keep the

subjective brightness exactly constant. This last requirement involved, effectively, a determination of the relative luminous efficiency for the location and level in question, and this has to be tackled first.

The most fundamental empirical fact about the foveal light sense and colour matching is additivity. Upon this depend the whole subjects of photometry and colorimetry. For extra-foveal vision very little information is available concerning the additivity concept, either photometric or chromatic. If any system of extra-foveal colorimetry (or even heterochromatic photometry) were envisaged this question would have to be settled before any proposed Extra-Foveal Standard Observer Data could be considered. For this reason, the author considered an investigation of additivity was vital and long overdue. The fact that recently several workers have tacitly assumed additivity to hold [28, 30, 31, 32, 33] has given a certain urgency to the project.

4. RELATIVE LUMINOUS EFFICIENCY BY DIRECT COMPARISON

In order to select a set of stimuli of constant subjective brightness, a series of spectral lights was matched against a constant comparison field to give equality of brightness. With suitably calibrated equipment, luminous efficiency data can be calculated as a by-product.

The equipment used throughout this paper was the Wright Colorimeter modified by the Moreland Attachment, which have been adequately described elsewhere [36, 37]. This was arranged initially to give a field of view as shown in figure 1 (*a*), the test and comparison fields of $40' \times 80'$ lying at 10° eccentricity in the nasal meridian with the centres separated by 2° to give adequate resolution with the poor acuity of the extra-foveal retina. Both stimuli were flashed simultaneously giving $\frac{1}{2}$ sec flashes every 2 sec, the remainder of the field of view being dark. Fixation was provided by a minute spot of red light which was illuminated throughout the cycle. A preliminary period of dark adaptation of a $\frac{1}{4}$ hour was employed, 5 min recovery in the dark ensuing between observations. Throughout this work the observer FC was used, a normal trichromat. The comparison field was of $530 \text{ m}\mu$ wavelength at a retinal illumination of 10.8 trolands. At this level and at 10° eccentricity, monochromatic stimuli look saturated and the usual difficulty of heterochromatic matching for equality of brightness was experienced.

A more serious difficulty was that the match depended on the number of flashes used, a consequence of local adaptation. Thus in order to obtain a strictly valid match for 30 flashes, the stimuli should initially be presented at the levels which will ultimately match, and be viewed without variation for 30 flashes. A '30-flash match' implies a pair of stimuli which after viewing for 30 flashes will match. In general, the pair will look dissimilar initially and will only match towards the end of the minute of viewing. Clearly, one has to have prior knowledge of how initially to adjust the test stimulus. This means that such a match cannot be established in one observation.

The method of observation adopted to solve this difficulty has been used in all the work described in this paper and subsequent studies. A preliminary observing session was first held and the various matches in the programme were attempted in turn. In this session the observer had to establish the matches as

best he could, so that the first 6 or 8 flashes resulted in a rough match being established by coarse 'bracketing'; then the observer continually re-adjusted the components by fine bracketing as required to keep the match established. The end-point, when the observer was satisfied some time between the 27th and 33rd flashes, was an approximation to a valid match, but was not finally plotted. During the second observing session the pairs of stimuli were presented with the end-points reached in the first session, and these were viewed without adjustment until 20 flashes had elapsed; then only very fine bracketing was required to establish the true match, between the 27th and 33rd flashes. During the third and subsequent observing sessions, the end-points for the previous session were initially presented.

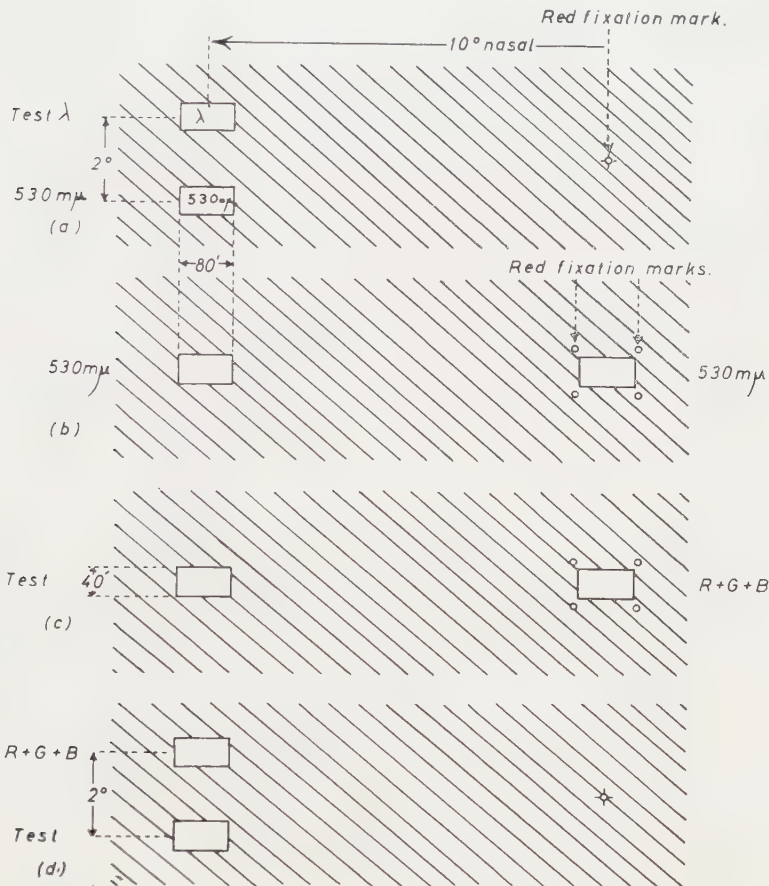


Figure 1. Fields of view. (a) Direct comparison through the spectrum. (b) Fading of a flashing field by foveal comparison. (c) Colour matching by foveal comparison (matching stimuli 650, 530 and 460 $m\mu$). (d) Colour matching by peripheral comparison (matching stimuli 650, 500 and 450 $m\mu$).

This method of successive approximation is considered valid because the observer only used the previous end-point to give correct local adaptation, and as a rough guide to save coarse bracketing. Stimuli were presented in random

order in an observing session, this being changed each session, so that any progressive change of state of adaptation during a session would have little effect on the averaged data.

Results for luminous efficiency are shown in figure 2(a), curve P_f . The C.I.E. functions V_λ and V'_λ are dotted in for comparison, all the curves being plotted on a logarithmic basis. It will be seen that the curve is typical of neither the photopic nor scotopic state, but resembles the scotopic function more nearly (peak wavelength 0.52μ). There is slight evidence for two subsidiary humps.

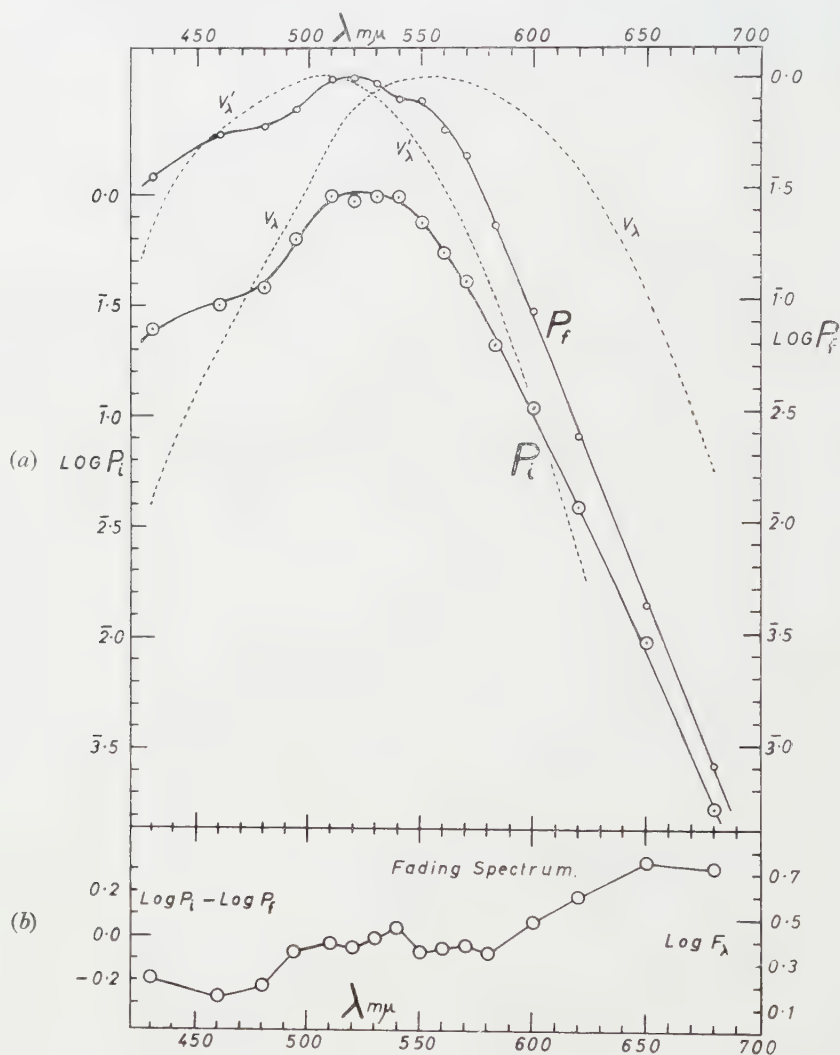


Figure 2. Above: (a) relative luminous efficiency functions by direct comparison with a 10.8 troland patch of 530 $m\mu$ wavelength (P_i after viewing pairs of $\frac{1}{2}$ sec flashes, P_f after 30 flashes). Below: (b) fading spectrum for equal-brightness stimuli.

To ascertain the effect of local adaptation, a further series of observing sessions was undertaken to try to obtain the initial spectral sensitivity before significant local adaptation had occurred. Only pairs of flashes at a time were viewed, a

recovery period of 30 sec elapsing before another pair of flashes was presented. These data are also shown in figure 2 (a), curve P_i being arbitrarily displaced in order to avoid confusion.

Superficially the two sets of data look similar (peak wavelength 0.52μ) but a systematic difference is revealed in what may be called the Fading Spectrum F_λ , shown in figure 2 (b). Since the comparison field is of $530\text{ m}\mu$ wavelength, the scale $(\log P_i - \log P_f)$ shows the fading through an equal-brightness spectrum relative to this comparison stimulus. The fading of the comparison stimulus itself was determined by foveal comparison, using a different field arrangement as shown in figure 1 (b), the stimuli being viewed and matched (a) for pairs of flashes and (b) for 30 successive flashes. The difference in comparison field luminances then gave the difference in fading for the two cases. Then the Fading Spectrum was provided with the scale F_λ , which gave the net fading for any wavelength. It will be seen that for an equal-brightness spectrum the red wavelengths show most local adaptation, which quantitatively confirms an effect noticed by Moreland [20, p. 121]. This tentative F_λ data was not followed up due to other commitments, but indicated an interesting line of investigation.

5. THE EXTRA-FOVEAL SPECTRUM LOCUS IN FOVEAL COLOUR SPACE

The above data enabled a set of spectral stimuli to be set up at the test spectrum of the colorimeter which were of equal subjective brightness after 30 flashes at eccentricity 10° (nasal). These were presented in the field arrangement shown in figure 1 (c), the comparison field having the standard Wright primaries of $650\text{ m}\mu$ R, $530\text{ m}\mu$ G and $460\text{ m}\mu$ B. The red fixation guides were small and dim

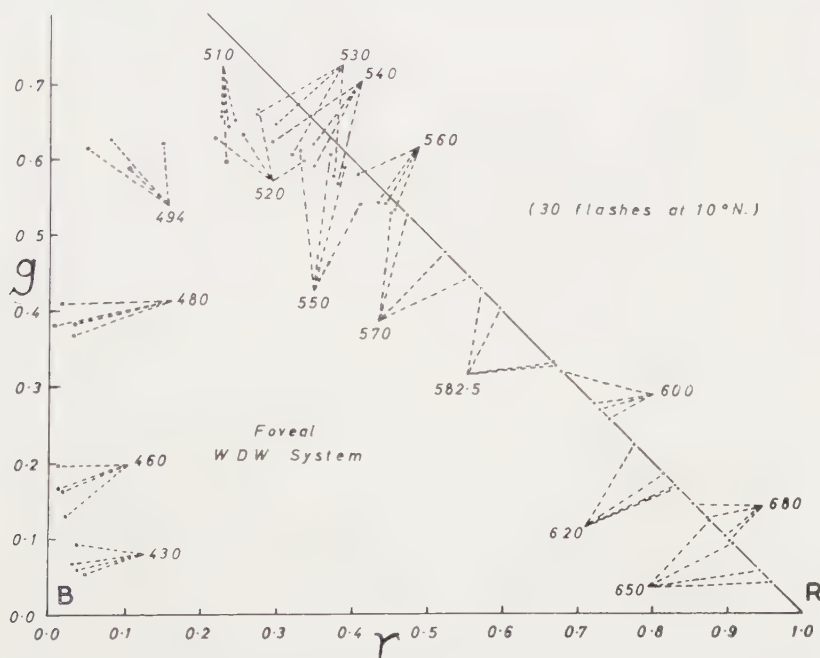


Figure 3. Extra-foveal spectrum locus data measured by foveal comparison, showing the mean chromaticities in four different observing sessions for each wavelength of stimulus (indicated in $\text{m}\mu$).

enough not to cause significant glare or retinal interaction. Matches were established by the viewing technique described above, the end-point being reached between the 27th and 33rd flash. The chromatic normalizing matches for the W.D.W. system were made on wavelengths 494 m μ and 582.5 m μ using alternate foveal glances at the test and comparison patches, and the chromaticities were calculated by the conventional method, to give the results shown in figure 3.

The points shown in this diagram are each the mean of two matches made in an observing session. For each wavelength of stimulus four different observing sessions were used. It was not possible to complete a spectrum locus in one session even with a fresh subject. Eight observing sessions were used in collecting these data, but several sessions had previously been undertaken (see below) and had provided training.

It is found that at 10° eccentricity, stimuli from most regions of the spectrum appear initially too saturated to be matched by any foveal patch within the colour gamut of the RGB system. As more flashes are observed, so the hue and saturation change, the saturation always becoming less. By the time about eight flashes have elapsed, only wavelengths longer than 560 m μ appear too saturated to match without using a peripheral desaturating component. The most persistent wavelengths are in the region of 620 m μ , and about 25 flashes have to elapse before this wavelength can be matched by a mixture of 650 m μ and 530 m μ in the fovea. Even then matching is exceedingly difficult at these wavelengths owing to an intensely saturated diffuse cloud of redder hue being perceived round the test stimulus, an effect first reported by Moreland [19]. The author had initially tried using a desaturating component in the test field, but it was found that the calculated chromaticities depended markedly on how much desaturation was used. Thus the use of additive colour geometry appeared invalid,

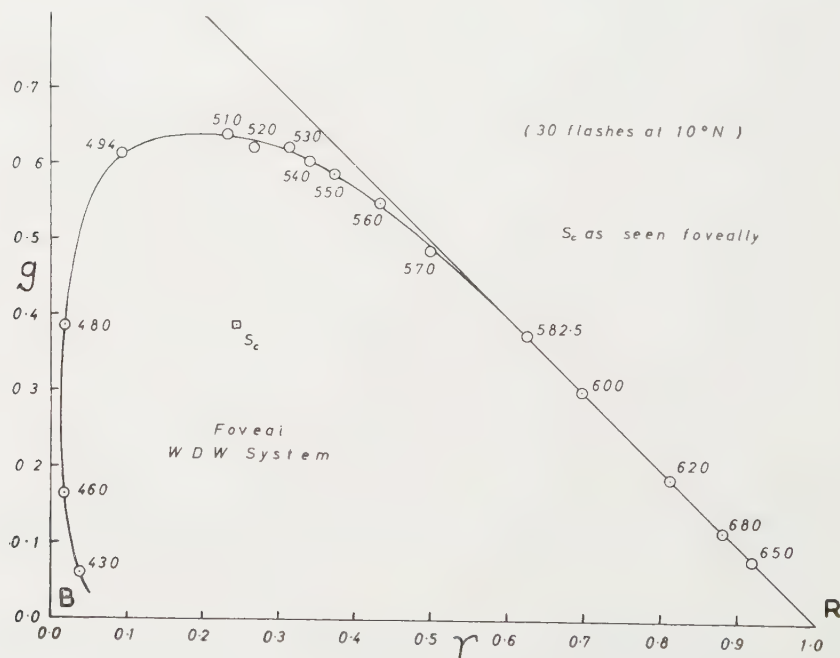


Figure 4. Mean spectrum locus derived from the data of figure 3.

and this suggested that a breakdown of additivity was occurring. For this reason only all-positive chromaticities on a foveal colour chart can validly be measured, hence 30 flashes were used.

The variance of colour matching from session to session can be readily seen on the chart, figure 3, and is clearly greater than in foveal colour matching. The mean chromaticities were calculated, and the mean spectrum locus appears in figure 4. The locus has a well-defined regular shape, and the mean points appear to be located fairly accurately on the diagram.

6. VARIATION OF COLOUR WITH EXPOSURE

Since the effect of local adaptation with repeated flashes produced appreciable changes of subjective colour, it was of obvious relevance to make some observations on this. The measurements above amount to subjective colour specification, since the chromaticities refer to a foveal *RGB* diagram, in particular the W.D.W. system. Four wavelengths 650, 530, 480 and 430 $m\mu$ (well spaced in figure 4) were chosen for this study, but of these only 530 $m\mu$ could be measured directly owing to the saturation and non-additivity problems. The others were desaturated slightly by the addition of suitable components, the stimuli then being 650 (+480), 530, 480 (+650) and 430 (+570) $m\mu$. These were treated as simple stimuli and their subjective colours specified by foveal matching as before, a valid procedure since it involved no extra-foveal additivity assumption.

Repeated matches were made using 4, 8, 16 and 30 flashes, each experimental condition being measured twice on each of three separate occasions (six sessions

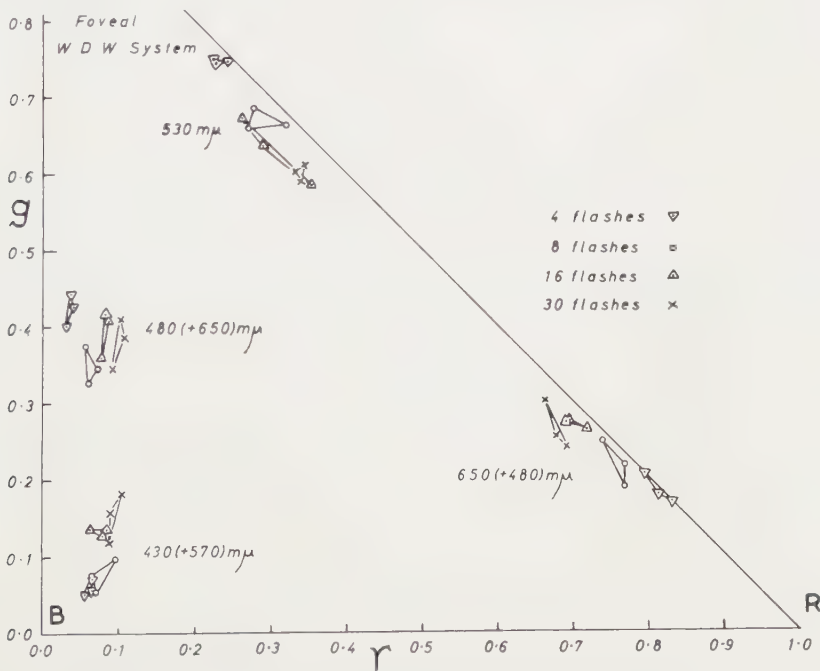


Figure 5. Chromatic effect of local adaptation when the number of viewing flashes is varied, for four selected colour stimuli. The data shown are the mean match points in different observing sessions.

in all). Individual mean match points for each session and condition are shown in figure 5, while the mean match points are shown in figure 6. For the 'red' and 'green' stimuli the results show progressive hue shifts, both becoming yellower. The 'cyan' stimulus shows complex hue shifts, while the 'violet' stimulus shows a slight shift towards the blue. All stimuli show a progressive desaturation with continued observation. The colour changes are significant,

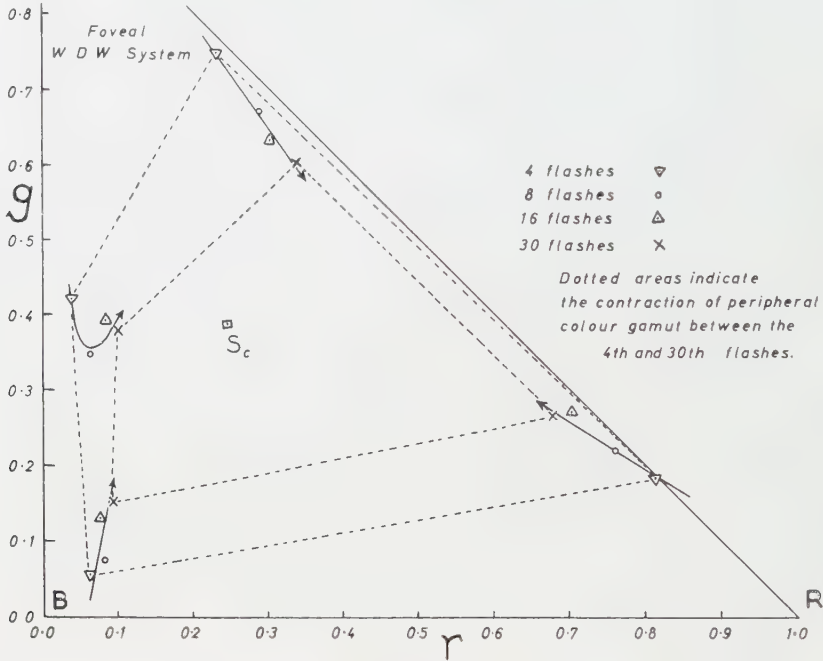


Figure 6. Mean chromaticities showing the chromatic effect of local adaptation, derived from the data of figure 5.

showing that for satisfactory peripheral measurements to be made, strict control must be exercised on the number of flashes used. The striking reduction in colour gamut with increasing number of flashes is indicated schematically by the dotted lines in figure 6. It is interesting to note that desaturation begins to occur immediately when a steady or flashing stimulus is viewed in peripheral vision.

7. THE ADDITIVITY CONCEPT

Grassmann [38] stated five principles, of which the first, second and fourth have become so well known as the first, second and third laws of Grassmann as not to need repeating here. There are three important corollaries of Grassmann's third law:

- (1) two lights a, b of the same colour, added to two other lights c, d that match visually, produce mixtures $(a + c)$ and $(b + d)$ that also match,
- (2) two lights a, b of the same colour, each subtracted from mixtures e, f that match, leave remainders $(e - a)$ and $(f - b)$ that also match,
- (3) increasing or decreasing the amount of two lights of equal colour by the same factor, keeping the relative spectral compositions unchanged, does not destroy the colour match.

Using these principles, trichromatic systems of colorimetry have been derived by which a stimulus C can be specified by a colour equation

$$c(C) \equiv R(R) + G(G) + B(B)$$

using the recommended notation of the C.I.E. [39]. If two stimuli C_1 and C_2 such that

$$c_1(C_1) \equiv R_1(R) + G_1(G) + B_1(B),$$

$$c_2(C_2) \equiv R_2(R) + G_2(G) + B_2(B),$$

are mixed by addition of light (optical superposition), then the colour match on the resultant ($C_1 + C_2$) is

$$c_1(C_1) + c_2(C_2) \equiv R_3(R) + G_3(G) + B_3(B)$$

and it is an experimental fact that

$$R_3 = R_1 + R_2, \quad G_3 = G_1 + G_2, \quad B_3 = B_1 + B_2.$$

This exemplifies the full additivity concept. There are, however, two distinct aspects of additivity which may be termed *chromatic additivity* and *photometric additivity*.

Chromatic additivity concerns, in essence, the prediction of the chromaticities (r_3, g_3) of a mixture C_3 of known amounts of stimuli C_1, C_2 whose chromaticities (r_1, g_1) and (r_2, g_2) are known. If n trichromatic units of C_1 are mixed with m units of C_2 , then if chromatic additivity holds

$$r_3 = \frac{n \cdot r_1 + m \cdot r_2}{n + m}, \text{ etc.,}$$

a result which shows that C_3 lies on the straight line C_1C_2 on the chromaticity chart, and at a distance such that $C_1C_3 : C_3C_2 : m : n$. It will be seen that this is fundamental to the commonest operation in technical colorimetry, computation of chromaticity coordinates from spectrophotometric data.

Photometric additivity is fundamental to the validity of what is sometimes called Abney's Law

$$F = K_m \int E_\lambda \cdot V_\lambda \cdot d\lambda$$

the basis of heterochromatic photometry, and in its simplest form involves the assumption that the luminance of a mixture is equal to the sum of the luminances of its constituents, which was originally given as the fifth of Grassmann's principles [38].

For foveal vision the validity of the various aspects of additivity mentioned above has been the subject of numerous researches. Whereas many of the studies have suggested that these principles are strictly true and verifiable to the limits of experimental precision, certain others have shown significant discrepancies not attributable to experimental error. Nevertheless, it is certainly true that these principles are a sufficiently good approximation to be used as a basis for realistic systems of photometry and colorimetry. The validity of these principles for extra-foveal vision forms the subject of the investigations described below.

8. CHROMATIC ADDITIVITY BY FOVEAL COMPARISON

Suppose that a light stimulus C is presented in extra-foveal vision and is matched, as described earlier, by means of a foveal comparison field consisting of a RGB mixture. This can be repeated for a second stimulus C' , and the chromaticities and numbers of trichromatic units can be computed for each. If one now mixes C and C' and views this mixture in peripheral vision, one should

be able to predict the resulting colour appearance in terms of the foveal *RGB* system, provided that additivity holds in peripheral vision as it does in foveal vision.

A complication is introduced by the need to keep the subjective brightness level approximately constant. Since studies described earlier indicate that extra-foveal colour equations are affected by gross changes of level (which might in itself indicate departure from additivity, but see Appendix), a more refined test of additivity can only be made if all matches are made at roughly the same level of brightness. Consider the case then the equal-brightness stimuli *C* and *C'* are mixed. Suppose the double densities for each filter in the rest spectrum of the colorimeter are *D* and *D'* respectively. Then a heterogeneous stimulus of equal brightness should be provided by making the double densities (*D* + *d*) and (*D'* + *d'*), such that the sum of the transmission factors *t*, *t'* is unity, where

$$t = 10^{-d}, \quad t' = 10^{-d'}.$$

The stimuli 430 and 530 *mμ*, as used before, and seven equal-brightness mixtures thereof were presented at 10° N for 30 flashes and the colour measured by foveal comparison. The mean matches for the individual sessions are shown in figure 7, while the final mean match-points are shown in figure 8. Similar mixtures were made with the stimuli 650 and 480 *mμ*. It was found that a very large proportion of 480 *mμ* was needed to shift the colour away from the 650 *mμ* match-point, so two sets of four sessions each were needed, 11 mixtures being used in addition to the original 480 and 650 *mμ* stimuli. Mean results for the individual sessions are shown in figure 9, while the mean match-points are shown in figure 10. The calculated results, predicted assuming chromatic additivity, are shown in figures 8 and 10, corresponding match-points and predicted points being appropriately labelled.

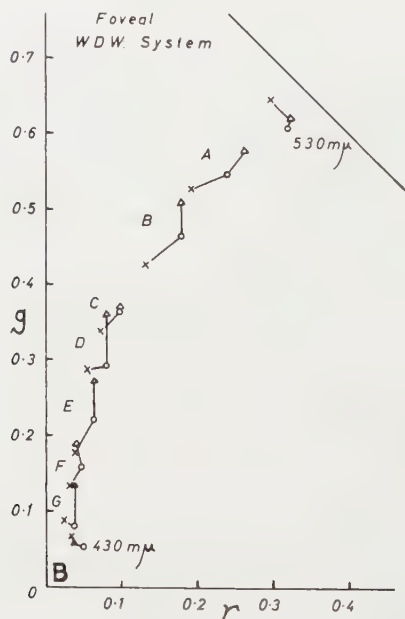


Figure 7. A series of extra-foveal mixtures of 430 *mμ* and 530 *mμ* matched by foveal comparison. Mean matches for each session.

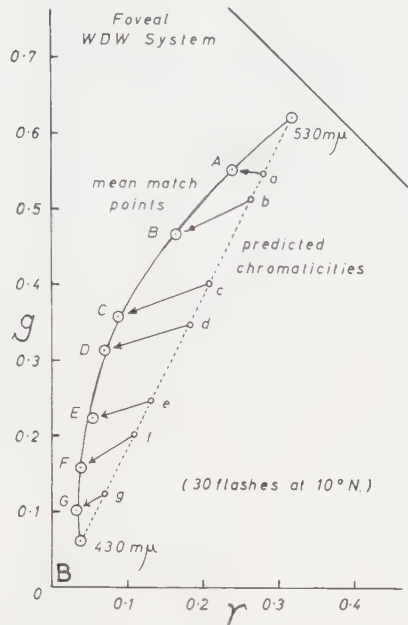


Figure 8. The mean chromaticities *A-G* from the data of figure 7, giving the curved mixture locus. Also shown are the predicted chromaticities *a-g* calculated on the additivity assumption.

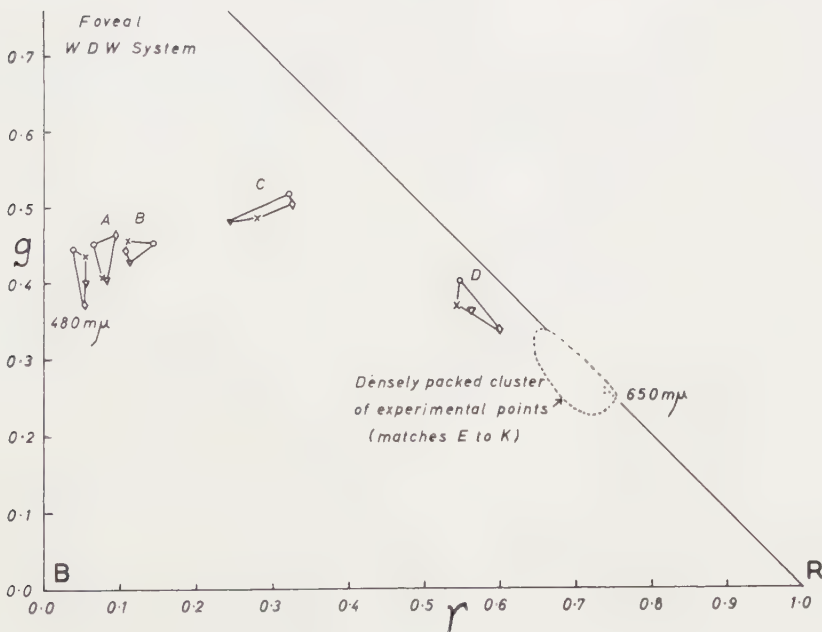


Figure 9. A series of extra-foveal mixtures of 480 $m\mu$ and 650 $m\mu$ matched by foveal comparison. Mean matches for each session.

It will be seen that match-points lie on 'mixture-loci' that are markedly curved. Further, the match-points are always biased towards one of the mixture stimuli. Both facts indicate chromatic additivity failure. The curvature of the mixture-loci cannot be due to a peculiarity of the observer's foveal vision, for figure 10 also shows the results of mixing 480 m μ and 650 m μ in foveal vision.

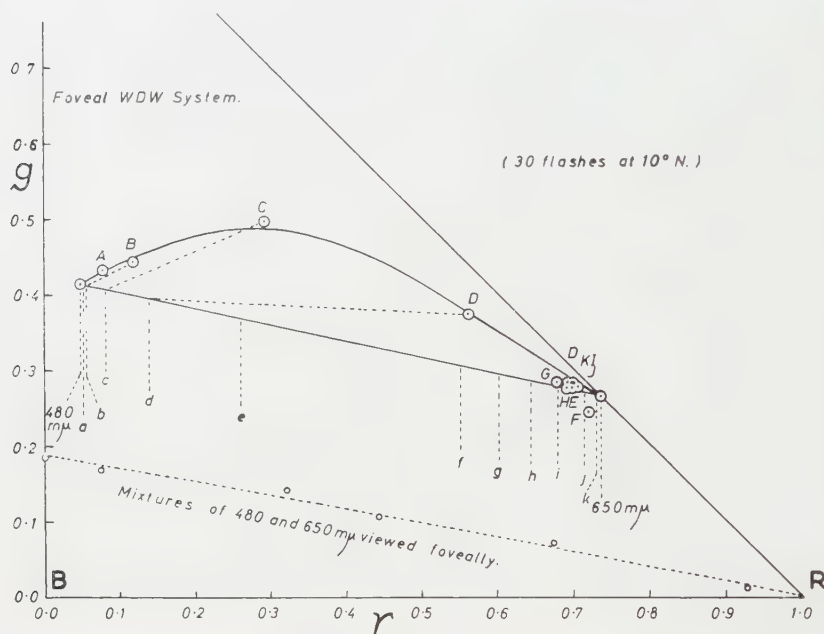


Figure 10. The mean chromaticities *A-K* from the data of figure 9, which give the curved mixture locus. The points *a-k* on the straight line show the chromaticities predicted on the additivity assumption. Also shown is a series of matches made foveally with an 80' square bipartite field, illustrating the normality of the observer's foveal vision in this respect.

9. CHROMATIC ADDITIVITY BY PERIPHERAL COMPARISON

It might be claimed that the experiments above are not absolutely conclusive, since the chromatic response functions of extra-foveal vision might be different from those of foveal vision (see Appendix). The only really convincing method of over-riding this objection was to locate both test and comparison fields in the same retinal region.

The equipment was set up to give the field of view of figure 1 (*d*). In order to obtain the greatest colour gamut with a peripheral *RGB* system, it was decided to change the primaries to 650 m μ *R*, 500 m μ *G* and 450 m μ *B*. The reason is clear from figure 4. The normalizing matches of this modified W.D.W. system were made on 480 m μ and 570 m μ , in peripheral vision. The experiments of the previous section were then repeated, but using only selected mixtures of the radiations that could be matched by all-positive mixtures of the 650, 500 and 450 m μ primaries.

For mixtures of 430 and 530 $m\mu$ results appear in figure 11 for the individual sessions and figure 12 for the mean match-points. For mixtures of 650 and 480 $m\mu$ results appear in figure 13 for individual sessions and figure 14 for the

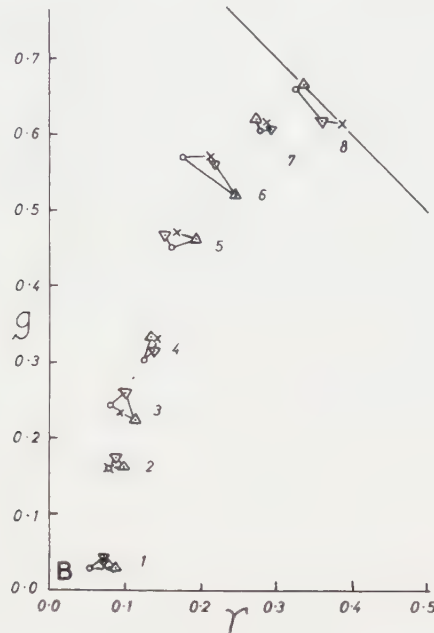


Figure 11. Mixture of 430 $m\mu$ and 530 $m\mu$ in an extra-foveal *RGB* system. Mean matches for each session.

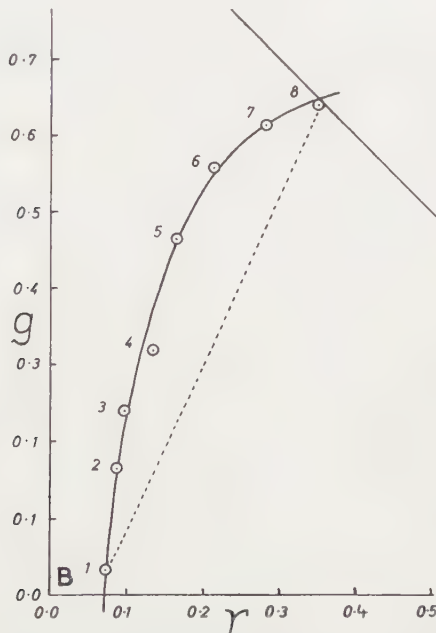


Figure 12. Mixture of 430 $m\mu$ and 530 $m\mu$ in an extra-foveal *RGB* system. Mean chromaticities from the data of figure 11 showing the curved mixture locus.

mean match-points. The failure of chromatic additivity is established conclusively by virtue of the significant curvatures of the mixture-loci.

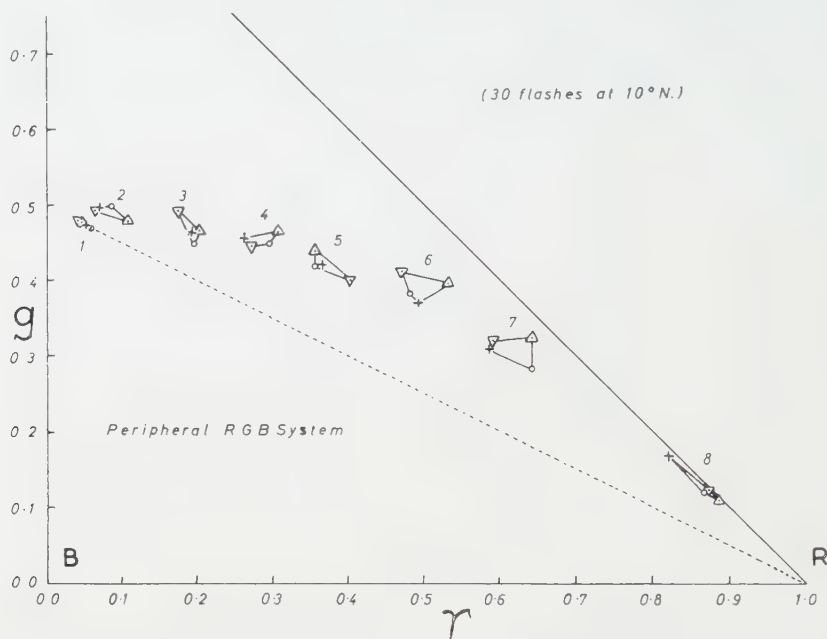


Figure 13. Mixtures of 480 $m\mu$ and 650 $m\mu$ in an extra-foveal RGB system. Mean matches for each session.

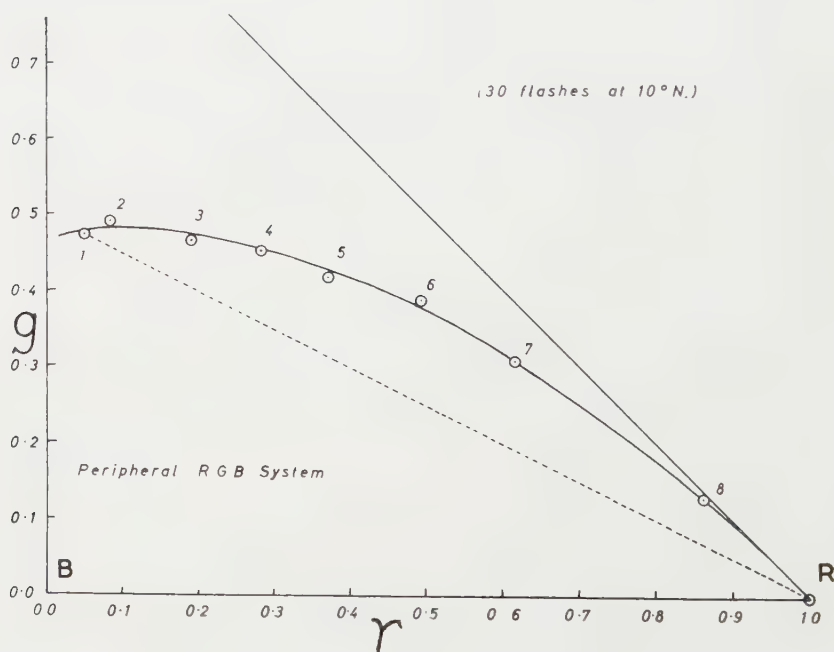


Figure 14. Mixture of 480 $m\mu$ and 650 $m\mu$ in an extra-foveal RGB system. Mean chromaticities from the data of figure 13.

10. LUMINOUS EFFICIENCY BY FOVEAL COMPARISON

The spectrum locus determination involved a complete match being established between the peripheral stimulus and foveal comparison patch. Since the latter was a *RGB* mixture and foveal vision is fully additive, the luminance of the comparison field could be calculated once the luminance of unit amounts of *R*, *G* and *B* had been measured. This provided an independent method of measuring the relative luminous efficiency. Although the precision of measurement is low by this method, with the repeated measurements that were made the accuracy was expected to be satisfactory for the final mean data.

Results are given in figure 15 which shows the mean matches of the individual sessions and the final means. The C.I.E. functions V_λ and V'_λ are dotted in for comparison. The peak is at 0.52μ as before, but the slight subsidiary humps are seen more clearly than in figure 2. This measurement is theoretically sound, since a complete match was involved.

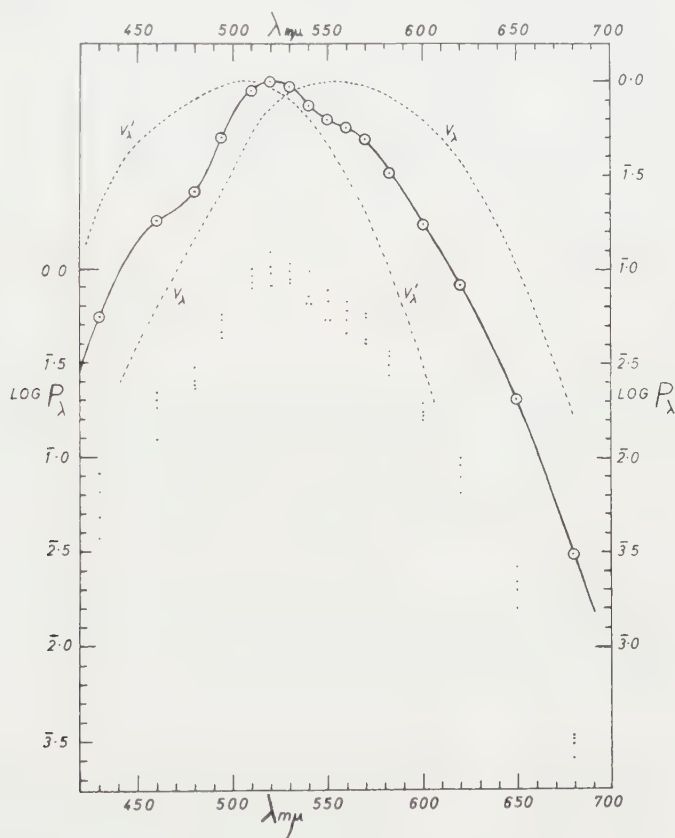
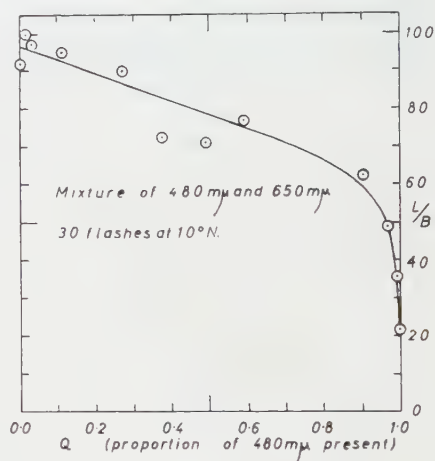
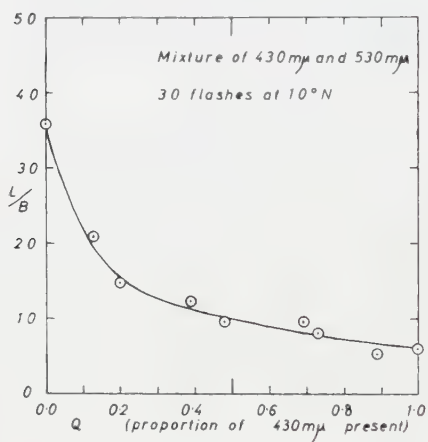


Figure 15. Relative luminous efficiency as calculated from the foveal comparison colour matching data. Values for each session are shown for left hand scale. Mean data are shown for the right hand scale.

11. PHOTOMETRIC ADDITIVITY

The luminous efficiency measurements provided two independent photometric scales, one by direct comparison (heterochromatic matches) and the other by foveal colour matching. The 'luminances' *B* of the various mixtures

of 430 and 530 $m\mu$ and of 650 and 480 $m\mu$ used in the chromatic additivity experiments above were calculated on an arbitrary photometric scale based on the direct comparison data and assuming additivity to hold. Unity of this scale B was given by the 'luminance' of the ideal 'equal-brightness' stimuli. (As sets of filters with finite intervals of density were available, it was not possible to keep $B=1.00$ for the various mixtures, but B was always kept in the range 0.9 to 1.2.) The fractions Q of 430 $m\mu$ and of 480 $m\mu$ present were calculated on this basis. The luminance L (cd/sq. m) of the comparison patch was calculated for all the foveal matches. If photometric additivity holds (direct comparison criterion) then L/B should be constant for all proportions Q of the mixtures. Results are shown in figures 16 and 17.



Figures 16 and 17. Photometric additivity failure, based on the heterochromatic matching criterion. L is the measured luminosity of the peripheral mixtures (the luminance of the foveal comparison field in cd/sq. m). B is the predicted luminosity, assuming photometric additivity on the basis of the direct comparison data, figure 2. B is unity for the ideal stimulus, and is kept within the range 0.9 to 1.2. Q also based on direct comparison data.

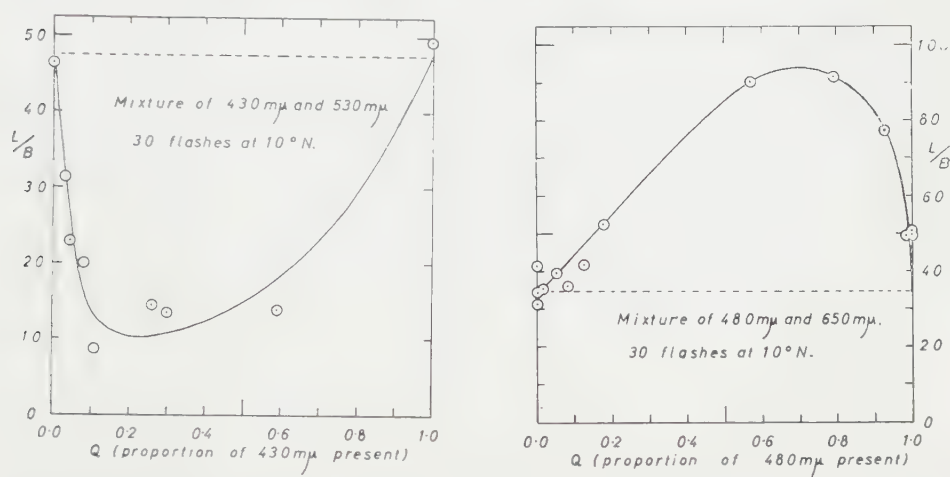
Similar calculations were made for the same matches, only this time based on the foveal comparison luminous efficiency data with $B=1.00$ for the 530 $m\mu$ stimulus. Results are shown in figures 18 and 19.

12. DISCUSSION

It is clear from figures 16 and 17 that the equality of brightness judgments on the monochromatic stimuli by direct comparison were in error. This is hardly surprising, since in foveal vision it is well known that heterochromatic matching by direct comparison does not give valid results. It is probable that it is the subjective difficulty of mentally abstracting one attribute of colour space (brightness) in the presence of gross differences of the other attributes (hue and saturation) that is responsible. Conceding this point, the curvature of the loci shown in figures 16 and 17 suggests (but does not prove) the breakdown of photometric additivity. However the curvatures of the loci shown in figures 18 and 19 conclusively demonstrate the failure of photometric additivity.

The evidence collected in this study shows that with $40' \times 80'$ stimuli viewed peripherally there are large departures of both chromatic and photometric additivity. The obvious question is whether this is due to (a) the significant amount of Troxler's Effect proved to occur even with flashing fields, or (b) an intrinsic property of the peripheral retina as such. Since the colour metrics of peripheral vision and the chromatic effects of local adaptation are both still largely unknown, it is not possible at present to dissociate these influences in interpreting extra-foveal colour matching data.

The mean spectrum locus in figure 4 substantiates Moreland's pioneer measurements especially as the individual matches, figure 3, in the region from 494 to 560 $m\mu$ indicate a deterioration of discrimination setting in there. The



Figures 18 and 19. Further evidence of photometric additivity failure. L , B and Q defined as in figures 16 and 17, but with B and Q based on the foveal comparison colour matching data, figure 15.

results of this study establish that reproducible data can be obtained in peripheral vision, provided that experimental conditions are closely controlled and that averaged results of several sessions are used. It would seem from the data that with a trained observer, separated fields, a flashing cycle and counting the flashes, the total scatter in chromaticity from session to session is about 0.08 in r or g over most of the chart, the total scatter in a session being of order 0.04 in r or g . The mean chromaticities for stimuli measured twice on each of several observing sessions appear to be correct to 0.01 in r or g over most of the chart, as evinced by the departures of mean data from the smooth curves in figures 4, 6, 8, 10, 12 and 14. This is noteworthy in view of the subjective difficulties of peripheral colour matching.

It will be seen that there is a discrepancy between the chromaticities of 650 $m\mu$ in the foveal charts of figures 3, 4 and of figures 9, 10, measured several months later; this is probably due largely to the exceptional difficulty of matching for monochromatic lights in the yellow-red region of the spectrum. The author tended to match the 'average' colour earlier, but later improved his matching criterion to concentrate more on the actual test patch, and to ignore the redder, more saturated and diffuse surrounding cloud.

It is interesting that the 680 m μ stimulus was always matched 'yellower' than the 650 m μ stimulus in any given session. Thus the yellowing of 680 m μ relative to 650 m μ shown in the mean locus, figure 4, appears to be significant. This would seem a manifestation of the long-wave yellowing discovered by Brindley [40]. The wavelength of maximum redness would appear to be in the region of 650 m μ for the author's experiments (Moreland was unable to find this effect since his longest wavelength was 650 m μ), whereas with centrally viewed fields Brindley and Stiles [41] found it to be in the region of 700 m μ . The hypothesis that the long-wave yellowing is characteristic of extra-foveal vision rather than of foveal vision is supported by the author's work and by the fact that Stiles using a 10° field and extra-foveal judgment found a more marked effect than Brindley who used a 6° 10' \times 3° 20' field. Further, using a 2° field Stiles did not find evidence of yellowing until a wavelength of 824 m μ had been reached. Thus in rod-free foveal vision there might well be no yellowing at all.

So far no mention has been made of the rods. Yet the rods must play a significant part in vision with the initially dark adapted extra-fovea at the moderate level of 10·8 trolands, for the rod population at 10° is some six times that of the cones, according to Polyak [42], while studies by Aguilar and Stiles [43] have suggested that the rod mechanism might not saturate until a level of 2000 scotopic trolands is reached. The hypothesis might therefore be advanced that non-additivity is due to rod intrusion. This would seem to demand the presence of interaction between the rod and cone responses, a matter for conjecture (see Appendix).

The stability of colour matches to proportional dimming of all constituents and v. Kries' law of coefficients could well be different aspects of the same phenomenon. If this were so, the suggestion by Wright [44], that breakdown of the law of coefficients might be due to local adaptation, is in accord with this author's suggestion that local adaptation is a possible cause of additivity failure. The additivity failure with proportionate dimming in extra-foveal vision demonstrated originally by König [22], v. Kries [23] and Tschermak [24] represents a form of additivity failure with two possibilities: (a) the failure was due to the gross change of level produced, or (b) the failure was general, even for a fixed level of stimulation. The former case could arise simply as a consequence of the instability of extra-foveal colour matches to changes of adaptation (see Appendix). It was to eliminate this uncertainty that an approximately constant level of brightness was used in this study.

The photometric additivity failures shown in figures 18 and 19 could be explained by supposing interactions between different chromatic responses: in the case of the responses excited by 430 m μ and 530 m μ an inhibition, and in the case of those excited by 480 m μ and 650 m μ a facilitation. If this were so, one could reasonably expect to see troughs and humps in the luminous efficiency functions at appropriate wavelengths. Examination of figure 2 and especially figure 15 shows that this is indeed so: between 430 and 530 m μ there is a marked trough around 480 m μ that could be explained by inhibition between 'blue' and 'green' responses, while there is a slight hump at around 550 m μ , figure 2, or at around 570 m μ , figure 15, between the supposed positions of the 'green' and 'red' mechanisms that could be explained by mutual facilitation. This explanation of the irregularities on luminous efficiency curves will not hold near thresholds or where there is markedly selective pre-receptive pigmentation. It appears to be in

accord with known facts, for normal photopic curves are regular, allowing for macular pigment, and additivity holds, whereas in extra-foveal vision irregularities are found and additivity fails. Furthermore, small field studies in foveal vision show marked irregularities, see Wright [45] and Thomson [46] for example. On this hypothesis one can predict that additivity failures should be found in small field foveal vision. These ideas seem to be supported by the studies of McCree [47] who found a chromatic 'fading' for small bipartite fields in central vision with continuous fixation. Although McCree did not actually test for additivity, his effects were analogous to the extra-foveal phenomena that have been described by Moreland [19, 20] and in this work.

ACKNOWLEDGMENTS

The author is indebted to Professor W. D. Wright for his interest and encouragement throughout this work. Thanks are due to the Medical Research Council for the award of a Research Scholarship and to the Beit Trustees for the subsequent award of a Research Fellowship.

APPENDIX

SPECULATIONS ON THE THEORY OF ROD INTRUSION

Introduction

It is supposed that in extra-foveal vision at mesopic levels there are three kinds of chromatic cone response U , V and W and that in addition the rods contribute to the net responses. (U), (V) and (W) will be taken as fundamental stimuli of the type calculated by Thomson and Wright [48] for foveal vision. The device will be adopted of separating the net responses U , V and W into the respective contributions that arise by cone and rod activity, and it is assumed that a colour match is obtained between a test field T and a comparison field C when

$$\left. \begin{aligned} U_C' + U_C'' &= U_T' + U_T'' \\ V_C' + V_C'' &= V_T' + V_T'' \\ W_C' + W_C'' &= W_T' + W_T'' \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

where U_C' , V_C' , W_C' and U_T' , V_T' , W_T' are the chromatic cone responses elicited by the comparison and test fields respectively without taking into account rod activity, and where U_C'' , V_C'' , W_C'' and U_T'' , V_T'' , W_T'' are the respective contributions to those responses elicited by the scotopic response. We assume that the scotopic response S is characterized by a certain fixed quality of 'whiteness', which means that the rod response always gives rise to fixed proportions of U , V and W response. This can be expressed as the trichromatic equation

$$S(S) \equiv U''(U) + V''(V) + W''(W) \quad (2)$$

and the scotopic sensation must have fixed chromaticity coordinates (u'' , v'' , w'') defined as

$$u'' = \frac{U''}{U'' + V'' + W''} \quad \text{etc.} \quad (3)$$

The use of conventional colorimetric notation is considered legitimate as we are dealing with fundamental responses of the type which Thomson and Wright [48] derived by transformation from an experimentally determined colorimetric system. The quantities U_C' etc. are measured in trichromatic units of the (UVW) system.

A special case of an extra-foveal colour match arises when the stimuli are such as to elicit identical responses for both cone and rod systems:

$$\left. \begin{aligned} U'_C &= U'_T, \\ V'_C &= V'_T, \\ W'_C &= W'_T, \\ S_C &= S_T, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

for the combination of equations (4) and (2) clearly satisfies the equations (1). Such a match would require four degrees of freedom assuming that the U , V , W and S spectral functions are linearly independent, and such a special case of a *physiological identity* must be the type of match that Bongard *et al.* [28] claim to have made. The statement that equations (1) are a necessary and sufficient condition for obtaining an extra-foveal colour match, recognizes the well-proven trichromacy of extra-foveal vision; the uniqueness of a three-variable match for a given stimulus and the multiplicity of matches possible with four or more variables then follow directly.

Assuming the Young-Helmholtz form of theory to be valid for foveal vision, and that the three spectral response functions are not altered in shape but only in magnitude by adaptation, the stability of foveal colour matches to changes of adaptation is assured since such matches are physiological identities also, and whatever changes occur to the responses elicited by the test field must also occur to the identical responses elicited by the comparison field. In peripheral vision colour matches are not normally such physiological identities as are specified by equations (4), and because equations (1) can be satisfied by a multiplicity of patterns of activity in the U' , V' , W' and S responses, it follows that adaptation will affect the test and comparison response patterns unequally. Thus without making further assumptions it follows that almost all extra-foveal colour matches in the mesopic range break down on changing the state of adaptation, whether of light adaptation or of chromatic adaptation.

The case of changing all components of a colour match by a constant factor of luminance needs special consideration, as it may be considered a particular test of additivity. If the change is large, the state of adaptation during the matching process is bound to be influenced by the change in the matching fields, even if the state of pre-adaptation has been held constant or there is a constant surround. This is especially so in extra-foveal vision, where the adaptation effects can be much more rapid and marked than in foveal vision (see earlier). Thus reported cases of colour matches breaking down with change of luminance may not be cases of intrinsic additivity failure at all, but may simply represent the instability of extra-foveal matches to changes of adaptation. We will now consider additivity in extra-foveal vision in cases where the state of adaptation has been held constant.

Rod intrusion with no interaction

We consider the case of viewing in turn the stimuli (c_1) , (c_2) and the additive colour mixture thereof $(c_3) = (c_1 + c_2)$. Additivity in the (UVW) system demands that

$$U_3 = U_1 + U_2 \quad \text{etc.} \quad (5)$$

As a hypothesis we assume that the cone responses U' , V' , W' are additively combined as is established for foveal vision, it being understood that this is not a physiological description but an algebraic convention of colour metrics, in terms transformable from empirically established stimulus relations. We first make the additional assumption that the rod response is combined with the cone responses in exactly the same way as the cone responses are with each other, and that the cone and rod component responses are mutually independent. The responses aroused by the stimulus $C_1(c_1)$ will be $(U_1' + U_1'')(U)$ etc., while those aroused by $C_2(c_2)$ will be $(U_2' + U_2'')(U)$ etc. On mixing the light stimuli $C_1(c_1)$ and $C_2(c_2)$ it is clear that on the assumptions above, the responses will be $(U_1' + U_2' + U_1'' + U_2'')(U)$ etc., and the colour metric will be fully additive as for foveal vision.

So far we have considered the extra-foveal (UVW) system, but if we assume that the extra-foveal cone response functions are the same as those operating in foveal vision, we can also consider the case where extra-foveal test stimuli are matched by a *foveal* $[RGB]$ mixture. As the foveal $[RGB]$ system is additive, the foveal fundamental response system is therefore additive and derivable by orthogonal transformation. When the extra-foveal stimulus is perceived as having the same colour appearance as the foveal comparison field, the net responses in the extra-foveal and foveal fundamental response systems (U , V , W) must be presumed equal:

$$\left. \begin{aligned} U_f &= U' + U'', \\ V_f &= V' + V'', \\ W_f &= W' + W'', \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

for the match on any stimulus, where U_f , V_f and W_f are the tristimulus values invoked by the foveal RGB mixture. Thus the foveal RGB mixture acts here as an indicator of both the state of activation of the foveal responses and the *net* state of activation of the extra-foveal U , V , W responses. It is therefore legitimate to transform orthogonally from the extra-foveal (U , V , W) system to the foveal $[RGB]$ system, and straight lines in the (u, v) chart appear as straight lines in the $[r, g]$ chart, while curves transform as curves with the same sense of curvature. Clearly, rod intrusion with no interaction, which leads to additivity in the (U, V, W) system, could not explain the experimental results shown earlier in figures 7, 8, 9, 10, 16, 17, 18 and 19.

Rod intrusion with small amounts of cone-rod interaction

It is now assumed that the rod response is combined in the same way as are the chromatic cone responses, but that the rod response is influenced by the net effective cone response P ; otherwise the assumptions are as before. In general there might be a non-linear relation between the amount of interaction and the quantity P , such that the intrinsic rod response $S(S)$ is modified to $S(1 + k_1P + k_2P^2 + k_3P^3 + \dots)(S)$, the interaction being expressed as a polynomial in P . For modest levels of mesopic vision, the amount of interaction may be expected to be small, and P , k , k_2 , k_3 etc. may be taken to be of fractional magnitude only, and the approximation $S(1 + k_1P)(S)$ may be considered valid. For simplicity we write $S(1 + kP)(S)$ for the inhibited rod response and $kP \ll 1$ for the conditions specified. The constant k will be termed the *interaction constant*.

When stimulus (c_1) is viewed in extra-foveal vision, let the responses be expressed as

$$C_1(c_1) \equiv (U_1' + U_1'')(U) + (V_1' + V_1'')(V) + (W_1' + W_1'')(W). \quad (7)$$

In the absence of any interaction, the rod contributions would have been

$$\left(\frac{U_1''}{1+kP_1} \right) (U) \quad \text{etc.},$$

so that

$$C_1(c_1) \equiv \left(U_1' + \frac{U_1''}{1+kP_1} \right) (U) + \left(V_1' + \frac{V_1''}{1+kP_1} \right) (V) + \left(W_1' + \frac{W_1''}{1+kP_1} \right) (W) \quad (8)$$

represents the colour responses that would have arisen in the absence of cone-rod interaction, expressed in terms of the responses actually aroused. For the second stimulus, one can similarly write

$$C_2(c_2) \equiv \left(U_2' + \frac{U_2''}{1+kP_2} \right) (U) + \left(V_2' + \frac{V_2''}{1+kP_2} \right) (V) + \left(W_2' + \frac{W_2''}{1+kP_2} \right) (W) \quad (9)$$

for the intrinsic responses elicited in the absence of interaction.

As we have assumed that in extra-foveal vision the various intrinsic responses are combined additively as for foveal vision (expressed in terms of tristimulus values), it follows that on mixing the stimuli the intrinsic responses can be expressed as

$$\begin{aligned} C_1(c_1) + C_2(c_2) \equiv & \left(U_1' + U_2' + \frac{U_1''}{1+kP_1} + \frac{U_2''}{1+kP_2} \right) (U) \\ & + \left(V_1' + V_2' + \frac{V_1''}{1+kP_1} + \frac{V_2''}{1+kP_2} \right) (V) \\ & + \left(W_1' + W_2' + \frac{W_1''}{1+kP_1} + \frac{W_2''}{1+kP_2} \right) (W) \end{aligned} \quad (10)$$

while the actual components manifest will be expressed by

$$\begin{aligned} (C_1(c_1) + C_2(c_2)) \equiv & \left\{ U_1' + U_2' + (1+kP_1+kP_2) \left(\frac{U_1''}{1+kP_1} + \frac{U_2''}{1+kP_2} \right) \right\} (U) \\ & + \left\{ V_1' + V_2' + (1+kP_1+kP_2) \left(\frac{V_1''}{1+kP_1} + \frac{V_2''}{1+kP_2} \right) \right\} (V) \\ & + \left\{ W_1' + W_2' + (1+kP_1+kP_2) \left(\frac{W_1''}{1+kP_1} + \frac{W_2''}{1+kP_2} \right) \right\} (W). \end{aligned} \quad (11)$$

Full additivity demands that the responses aroused should conform to the equation:

$$\begin{aligned} C_1(c_1) + C_2(c_2) \equiv & (U_1' + U_2' + U_1'' + U_2'')(U) \\ & + (V_1' + V_2' + V_1'' + V_2'')(V) \\ & + (W_1' + W_2' + W_1'' + W_2'')(W). \end{aligned} \quad (12)$$

It is clear that additivity in the (UVW) system will not be satisfied unless it happens that

$$U_1'' + U_2'' = (1+kP_1+kP_2) \left(\frac{U_1''}{1+kP_1} + \frac{U_2''}{1+kP_2} \right) \quad (13)$$

for the tristimulus value of (U), etc. As $kP_1 \ll 1$ and $kP_2 \ll 1$ for the conditions specified, then a valid approximation is

$$U_1'' + U_2'' = (1+kP_1+kP_2) \{ U_1''(1-kP_1) + U_2''(1-kP_2) \} \quad \text{etc.} \quad (13a)$$

and it follows that the conditions for full additivity are

$$0 = k(U_1''P_2 + U_2''P_1) - k^2(P_1 + P_2)(U_1''P_1 + U_2''P_2) \quad \text{etc.} \quad (14)$$

Now for mesotopic vision, U_1'' , U_2'' , P_1 , P_2 are always positive and finite, and the only situation where equations (13), or equations (14), can be satisfied is given by $k=0$. This serves as an algebraic confirmation of the previous result that rod intrusion does not of itself necessarily lead to additivity failures; such failures arise when there is cone-rod interaction, $k \neq 0$.

It is instructive to consider the effect of such additivity failures on the chromaticity chart. Equation (7) can be rewritten

$$C_1(c_1) \equiv U_1'(U) + V_1'(V) + W_1'(W) + S_1(S) \quad (7a)$$

in terms of the chromatic cone responses and the net rod response. Repetition of the above treatment leads to the condition

$$0 = k(S_1P_2 + S_2P_1) - k^2(P_1 + P_2)(S_1P_1 + S_2P_2) \quad (14a)$$

to be satisfied for full additivity, and the excess of rod response over the amount predicted is given by

$$\Delta S = k(S_1P_2 + S_2P_1) - k^2(P_1 + P_2)(S_1P_1 + S_2P_2). \quad (14b)$$

The colour C_3 actually obtained by mixture of $C_1(c_1)$ and $C_2(c_2)$ can be regarded as the result of mixing M (the predicted colour assuming additivity to hold) and $\Delta S(S)$ in additive colour vision.

If k is positive (facilitation), then ΔS is positive also, and C_3 will lie on the straight line SM between M and S in the chromaticity chart of the (UVW) system. If k is negative (inhibition), then ΔS is negative also, and C_3 will lie on SM produced. The chromaticity shift MC_3 is thus given by

$$MC_3 = MS \left(\frac{\Delta S}{C_1 + C_2} \right). \quad (15)$$

When a large quantity of stimulus (c_1) is mixed with a small quantity of (c_2), or vice versa, the equation (14b) shows that ΔS must be very small since the first degree term in kP only contains cross products; conversely, maximal values of ΔS (and hence, of chromaticity shift) are obtained when comparable proportions of (c_1) and (c_2) are involved. The hypothetical results of mixing various proportions of (c_1) and (c_2) are shown in figure 20(a) with cone-rod facilitation (k positive) and in figure 20(b) with cone-rod inhibition (k negative), for the (UVW) system. As shown earlier, we can also apply these results to the foveal $[RGB]$ system for the experiments where an extra-foveal stimulus was matched by foveal comparison, and figure 20 can also be deemed to show the hypothetical results of mixing various proportions of c_1 and c_2 in extra-foveal vision and matching in the foveal $[RGB]$ system.

On the basis that 'rod colour' lies near the centre of the chart as specified earlier (a 'white' sensation), figure 20 shows that facilitation leads to a mixture-locus convex towards the centre, while inhibition leads to a mixture locus concave towards the centre. Further, it is clear that facilitation leads to co-punctal chromaticity shifts converging on a point on the convex side of the curve, while inhibition leads to co-punctal chromaticity shifts converging on a point on the concave side of the curve.

The experimental data given earlier, when pairs of stimuli were mixed in various proportions in extra-foveal vision and matched by foveal RGB mixtures, indicate clearly that inhibition rather than facilitation must be the operative factor, for in figures 7, 8, 9 and 10 the concave side of the mixture locus always faced the centre of the chart. Further, the chromaticity shifts calculated for figures 8 and 10 are very roughly co-punctal, and in each case converge on a

region that lies on the concave side of the mixture locus. The results of this speculation seem also to be in accord with previously known findings, for there is physiological and psychophysical evidence that the rod response is indeed inhibited by cone activity.

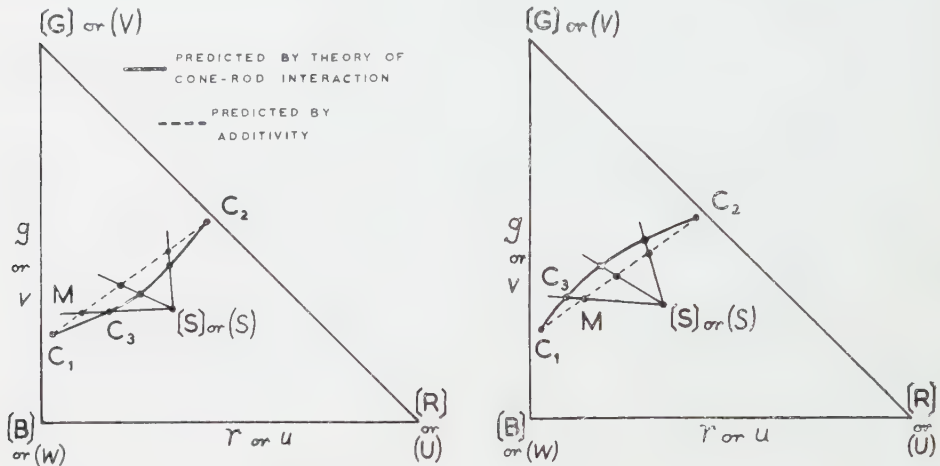


Figure 20. Hypothetical effects of cone-rod interaction on extra-foveal colour mixture, as measured by foveal comparison. (a) Facilitation (k positive). (b) Inhibition (k negative). The diagram applies equally to the fundamental response system (UVW).

The effect of cone-rod interaction in an extra-foveal [RGB] system

So far we have only considered the case when an extra-foveal stimulus is matched by foveal comparison, and we have had to assume that the extra-foveal fundamental cone responses U , V , W are the same as those of foveal vision. We will now remove this restriction and deal with the question of additivity in the extra-foveal [RGB] system. Apart from this, the assumptions are as before. Consider the match on a stimulus $[c_1]$:

$$C_1[c_1] \equiv R_1[R_1] + G_1[G] + B_1[B]$$

The responses invoked by $[c_1]$ in the test field can be written

$$C_1[c_1] \equiv (U_1' + U_1'')[U] + (V_1' + V_1'')[V] + (W_1' + W_1'')[W] \quad (16)$$

keeping the units in terms of the [RGB] system and using the same approach as before in separating the contributions to U , V , W from cones and rods. The components in the comparison field also give rise to responses: unit quantities of $[R]$, etc. give rise to responses expressible by

$$[R] \equiv (U_R' + U_R'')[U] + (V_R' + V_R'')[V] + (W_R' + W_R'')[W] \quad \text{etc.} \quad (17)$$

The three conditions for a colour match are

$$U_1' + U_1'' = R_1(U_R' + U_R'') + G_1(U_G' + U_G'') + B_1(U_B' + U_B'') \quad \text{etc.} \quad (18)$$

for the U response, etc.

If we confine our attention to the U response, equations (18) can also be written

$$U_1' + U_1'' = (R_1 U_R' + G_1 U_G' + B_1 U_B') + (R_1 U_R'' + G_1 U_G'' + B_1 U_B'') \quad (18a)$$

or more conveniently

$$U_1' + U_1'' = U_{c1}' + U_{c1}''. \quad (18b)$$

Similarly for stimulus $[c_2]$ we have:

$$U_2' + U_2'' = U_{c2}' + U_{c2}''. \quad (19b)$$

These responses are the ones that actually arise in the conditions of the colour

match; the intrinsic responses of the rods in the absence of interaction would be $U_1''/(1+kP_1)$ etc. On admixture of $[c_1]$ and $[c_2]$ the U response becomes, as before:

$$T(U) = U_1' + U_2' + (1+kP_1+kP_2) \left(\frac{U_1''}{1+kP_1} + \frac{U_2''}{1+kP_2} \right). \quad (20)$$

If the $[R_1+G_1+B_1]$ and $[R_2+G_2+B_2]$ comparison fields are mixed, the U response becomes:

$$C(U) = U_{c1}' + U_{c2}' + (1+kP_{c1}+kP_{c2}) \left(\frac{U_{c1}''}{1+kP_{c1}} + \frac{U_{c2}''}{1+kP_{c2}} \right). \quad (21)$$

On applying the approximations $(1+kP_1)^{-1} = 1-kP_1$, etc., as before, we have for the test field:

$$T(U) = U_1' + U_2' + (1+kP_1+kP_2)\{U_1''(1-kP_1) + U_2''(1-kP_2)\} \quad (20a)$$

and for the comparison field:

$$C(U) = U_{c1}' + U_{c2}' + (1+kP_{c1}+kP_{c2})\{U_{c1}''(1-kP_{c1}) + U_{c2}''(1-kP_{c2})\}. \quad (21a)$$

The condition for additivity in U is that

$$T(U) = C(U). \quad (22)$$

Combining equations (18b), (19b), (20a), (21a) and (22) we have:

$$0 = k\{U_1''P_2 + U_2''P_1 - U_{c1}''P_{c2} - U_{c2}''P_{c1}\} - k^2\{(P_1+P_2)(U_1''P_1 + U_2''P_2) - (P_{c1}+P_{c2})(U_{c1}''P_{c1} + U_{c2}''P_{c2})\} \text{ etc.} \quad (23)$$

and the three expressions of this form in U , V , W are the three conditions for full additivity in the $[RGB]$ system.

One solution of equations (23) is given by $k=0$, which serves as further confirmation of the fact that rod intrusion with no interaction gives additivity. If $k \neq 0$ and there is cone-rod interaction, it is not easy to see how equations (23) can be satisfied, except for combinations of certain stimuli which satisfy (23) by chance. In general, additivity failure is to be expected. The discrepancy in U may be written as ΔU , the excess of U invoked by the test field over that invoked by the comparison field, and

$$\Delta U = k(U_1''P_2 + U_2''P_1 - U_{c1}''P_{c2} - U_{c2}''P_{c1}) - k^2\{(P_1+P_2)(U_1''P_1 + U_2''P_2) - (P_{c1}+P_{c2})(U_{c1}''P_{c1} + U_{c2}''P_{c2})\}. \quad (24)$$

As we have assumed that $[S]$ is located at a fixed point in the chromaticity chart, then the three expressions for ΔU , ΔV and ΔW can be added to give

$$\Delta S = k(S_1P_2 + S_2P_1 - S_{c1}P_{c2} - S_{c2}P_{c1}) - k^2\{(P_1+P_2)(S_1P_1 + S_2P_2) - (P_{c1}+P_{c2})(S_{c1}P_{c1} + S_{c2}P_{c2})\}.$$

From this we see that two given stimuli $[c_1]$ and $[c_2]$ can be mixed to give admixtures C_3 which differ from those predicted by additivity, M , only in respect of a discrepancy of rod response. Thus we can regard the actual mixtures C_3 as equivalent to the admixture of the predicted mixtures M and stimuli $\Delta S[S]$ in additive vision. The chromaticities of C_3 always lie on SM if ΔS is positive, or on SM produced if ΔS is negative, and

$$MC_3 = MS \left(\frac{\Delta S}{C_1 + C_2} \right) \quad (25)$$

if ΔS , C_1 and C_2 are measured in terms of the $[RGB]$ system. The chromaticity shifts are of the same general type as shown in figure 20. Unfortunately one cannot say *a priori* whether ΔS is positive or negative when k is assigned positive or negative values. This means that the sense of curvature of the mixture loci in

the extra-foveal $[RGB]$ diagram does not indicate (without making additional assumptions) whether the interaction causing the additivity failures is inhibition or facilitation.

There will, in general, be certain pairs of stimuli for which equations (23) will be satisfied. A trivial case is when the test stimuli $[c_1]$ and $[c_2]$ are in fact two mixtures of $[R]$, $[G]$ and $[B]$ —it is obvious that the appearance of additivity would be obtained in such a case. Another case is when the respective test and comparison stimuli $C_1[c_1]$ and $[R_1 + G_1 + B_1]$, although spectrally dissimilar, are such as to give identical responses for both cone and rod systems, as in equations (4). Such colour matches are the *physiological identities*, mentioned earlier; both of the stimuli being mixed would have to be of this special type to give additivity. Of all the possible pairs of stimuli that might be selected for such experiments as are reported here, the proportion of such special cases is negligible. In general, experiments of the type illustrated in figures 11, 12, 13 and 14 are expected on this treatment to give additivity failures of the type actually found.

The inadequacies of these speculations

In spite of the success of the treatment above in explaining the form of the experimental results, it must be admitted that it does not fully account for all the experimental findings, for there is a gross discrepancy between the chromaticity coordinates of 'rod-colour' as deduced from the convergence of the chromaticity shifts in figures 8 and 10. Neither of the respective regions (0.6, 0.5) and (0.04, 0.39) in the foveal chart seems very plausible. The fact must be faced that a theoretical treatment of the influence of rod intrusion would need to be far more complex than the speculations given here, in order to account fully for all the findings. In addition to cone-rod interaction, the treatment would need to include the possibility of mutual interactions between the chromatic cone responses (as suggested in the main paper) and even of rod-cone interaction. However, as more constants, parameters and coefficients are introduced, more arbitrary assumptions need to be made, and such a theory would tend to lose its plausibility. Alternatively, the additivity failures might not be due to cone-rod interaction, etc. at all, but to the influence of Troxler's Effect. It seems likely, however, that both Troxler's Effect and cone-rod interaction are contributing to the experimental findings.

Une série de stimuli monochromatiques d'égale brillance provenant d'une source uniforme de $40' \times 80'$ a été établie à travers le spectre par comparaison directe avec une tâche voisine de $530 \text{ m}\mu$ et d'illumination rétinale 10.8 trolands photopiques. Le test et le champ de comparaison étaient séparés et se trouvent à 10° d'excentrement dans le méridien nasal. On a fait les observations en fond obscur avec un cycle alternative d'éclairs et rétablissements en employant 2 ou 30 éclairs pour établir les égalités. Les tests stimuli ont été postérieurement égalisés par comparaison avec une tâche fovéale qui se composait de stimuli de comparaison $650 \text{ m}\mu$, $530 \text{ m}\mu$ et $460 \text{ m}\mu$. Les résultats ont été représentés graphiquement comme un spectrum locus dans la carte des chromaticités fovéales. Les fonctions d'efficacité lumineuse ont été obtenues à la fois par comparaison hétérochromatique et par le calcul numérique en partant de la comparaison fovéale des égalités de couleurs. Les stimuli de couleurs sélectionnées ont été aussi comparés en employant 4, 8, 16 ou 30 éclairs. On a trouvé que les correspondances variaient systématiquement avec le nombre d'éclairs. Des séries de mélanges de 430 et $530 \text{ m}\mu$ et de 480 et $650 \text{ m}\mu$ d'égale luminosité ont été calculés (en supposant valide l'additivité) et comparés à la fois dans les

systèmes fovéal et extra-fovéal *RGB*. On a toujours trouvé des grandes discrédances aussi bien dans l'additivité chromatique que dans l'additivité photométrique. Dans un appendice théorique on montre que l'activité des bâtonnets ne conduit pas aux discrédances d'additivité quand il n'y a pas interaction entre les réponses des cônes et des bâtonnets. Avec interaction cône-bâtonnet on montre que les discrédances d'additivité se produisent en général, soit que le champ de comparaison *RGB* se présente fovéalement ou extra-fovéalement.

Eine Reihe monochromatischer Reize von gleicher Helligkeit und unter einem Öffnungswinkel $40' \times 80'$ wurde über das ganze Spektrum hin direkt mit einem benachbarten $530 \text{ m}\mu$ Vergleichsfeld verglichen, dessen Netzhautbeleuchtung 10^{-8} photopische Troland betrug. Die getrennten Test- und Vergleichsfelder lagen bei 10° Exzentrität im nasalen Meridian; sie hatten dunkles Umfeld und die Beobachtung erfolgte in einem Zyklus von Blitz und Erholung. Die Einstellung auf Gleichheit erfolgte bei 2 oder 30 Blitzen. Diese Testreize wurden in der Folge auf einem Fovealfleck mit den Meßvalenzen $650 \text{ m}\mu$, $530 \text{ m}\mu$ und $460 \text{ m}\mu$ abgestimmt. Die Ergebnisse wurden als Spektralfarbenzug in die Fovealfarbtabelle eingetragen. Spektrale Hellempfindlichkeitskurven wurden für heterochromatische Gleichheit und auch durch Berechnung aus der Farbgleichheitseinstellung bei Fovealvergleich bestimmt. Die ausgewählten Farbreize wurden auch bei 4, 8, 16 und 30 Blitzen verglichen. Dabei ergab sich, daß die Qualität der Einstellung systematisch von der Blitzzahl abhängig war. Unter der Annahme der Additivität wurden Reihen gleichheller Mischungen von 430 und $530 \text{ m}\mu$ bzw. 480 und $680 \text{ m}\mu$ berechnet und diese sowohl im Fovealen als auch extrafovealen *kGB*-System auf Gleichheit eingestellt. Es ergaben sich immer starke Abweichungen von der chromatischen wie auch von der photometrischen Additivität. In einem theoretischen Anhang wird gezeigt, daß das Auftreten von Stäbchenaktivität nicht zu Additivitätsabweichungen führt, wenn keine Wechselwirkung zwischen Zapfen- und Stäbchenenerregung besteht. Dass jedoch allgemeine Additivitätsabweichungen vorkommen, wenn zwischen Zapfen und Stäbchen eine Wechselwirkung besteht, unabhängig davon, ob das *RGB*-Vergleichsfeld foveal oder extrafoveal dargeboten wird.

REFERENCES

- [1] KÖNIG, A., 1891, *Z. Psychol. Physiol. Sinnesorg*, **2**, 309.
- [2] PFLÜGER, A., 1902, *Ann. Phys., Lpz.*, **9**, 185.
- [3] HOUSTOUN, R. A., 1913, *Phil. Mag.*, **25**, 715.
- [4] ABNEY, W. DE W., and WATSON, W., 1916, *Phil. Trans. A*, **216**, 91.
- [5] HECHT, S., and WILLIAMS, R. E., 1922, *J. gen. Physiol.*, **5**, 1.
- [6] SLOAN, L. L., 1928, *Psychol. Monogr.*, **38**.
- [7] STILES, W. S., and CRAWFORD, B. H., 1933, *Proc. roy. Soc. B*, **113**, 496.
- [8] WEAVER, K. S., 1937, *J. opt. Soc. Amer.*, **27**, 36.
- [9] LE GRAND, Y., and GEBLEWICZ, E., 1938, *Rev. d'Opt.*, **17**, 257.
- [10] STILES, W. S., 1939, *Proc. roy. Soc. B*, **127**, 64.
- [11] WEIGEL, R. G., and KNOLL, O. H., 1942, *Licht*, **12**, 192.
- [12] WALTERS, H. V., and WRIGHT, W. D., 1943, *Proc. roy. Soc. B*, **131**, 340.
- [13] WALD, G., 1945, *Science*, **101**, 653.
- [14] CRAWFORD, B. H., 1949, *Proc. phys. Soc. Lond. B*, **62**, 321.
- [15] KINNEY, J. A. S., 1955, *J. opt. Soc. Amer.*, **45**, 507.
- [16] KINNEY, J. A. S., 1958, *J. opt. Soc. Amer.*, **48**, 185.
- [17] WEALE, R. A., 1951, *J. Physiol.*, **114**, 435.
- [18] WEALE, R. A., 1953, *J. Physiol.*, **119**, 170.
- [19] MORELAND, J. D., 1955, Ph.D. Thesis, London.
- [20] MORELAND, J. D., and CRUZ, A., 1959, *Opt. Acta*, **6**, 117.
- [21] SPERLING, H., and HSIA, Y., 1957, *J. opt. Soc. Amer.*, **47**, 707.
- [22] KÖNIG, A., 1896, *S.B. Akad. Wiss. Wien*, 805-829.
- [23] v. KRIES, J., 1896, *Z. Psychol. Physiol. Sinnesorg*, **9**, 81.
- [24] TSCHERMAK, A., 1898, *Pflüg. Arch., Ges. Physiol.*, **70**, 297.
- [25] LE GRAND, Y., and GEBLEWICZ, E., 1937, *Ann. Psych.*, **38**, 1.

- [26] WRIGHT, W. D., 1946, *Researches on Normal and Defective Colour Vision* (London: Kimpton), p. 154.
- [27] GILBERT, M., 1947, Ph.D. Thesis, London.
- [28] BONGARD, M. M., SMIRNOV, M. S., and FRIEDRICK, L., 1957, N.P.L. Symposium: "Visual Problems of Colour", Paper 29.
- [29] CLARKE, F. J. J., 1959, Ph.D. Thesis, London.
- [30] STILES, W. S., 1955, *The Physical Society Yearbook*, pp. 44-65.
- [31] STILES, W. S., and BURCH, J. M., 1955, *Opt. Acta*, **2**, 168.
- [32] STILES, W. S., and BURCH, J. M., 1959, *Opt. Acta*, **6**, 1.
- [33] SPERANSKAYA, N. I., 1957, N.P.L. Symposium: "Visual Problems of Colour", Paper 36.
- [34] CLARKE, F. J. J., 1957, *Opt. Acta*, **4**, 69.
- [35] CLARKE, F. J. J., 1960, *Opt. Acta*, **7**, 219.
- [36] WRIGHT, W. D., 1946, *Researches on Normal and Defective Colour Vision* (London: Kimpton), pp. 43-70.
- [37] MORELAND, J. D., 1955, *Opt. Acta*, **2**, 101.
- [38] GRASSMAN, H., 1854, *Phil. Mag.*, **7**, 254.
- [39] WRIGHT, W. D., 1958, *The Measurement of Colour*, 2nd Ed. (London: Hilger), pp. 69-119.
- [40] BRINDLEY, G. S., 1955, *J. Physiol.*, **130**, 35.
- [41] STILES, W. S., 1957, N.P.L. Symposium: "Visual Problems of Colour", Paper 7.
- [42] POLYAK, S. L., 1942, *The Retina* (Chicago: Chicago Univ. Press), pp. 211-221.
- [43] AGUILAR, M., and STILES, W. S., 1954, *Opt. Acta*, **1**, 59.
- [44] WRIGHT, W. D., 1946, *Researches on Normal and Defective Colour Vision* (London: Kimpton), p. 282.
- [45] WRIGHT, W. D., 1946, *Researches on Normal and Defective Colour Vision* (London: Kimpton), pp. 88-95.
- [46] THOMSON, L. C., 1951, *J. Physiol.*, **112**, 114.
- [47] MCCREE, K. J., 1958, Ph.D. Thesis, London.
- [48] THOMSON, L. C., and WRIGHT, W. D., 1953, *J. opt. Soc. Amer.*, **43**, 890.

Restitution des images aberrantes par le filtrage des fréquences spatiales

II. Restitution de l'image dont le spectre comprend une partie négative

par JUMPEI TSUJIUCHI
Institut d'Optique, Paris†

(Manuscrit reçu le 13 juillet 1960)

On restitue l'image prise par un objectif, dont le facteur de transmission des fréquences spatiales peut être négatif et nul, par un filtrage des fréquences spatiales à l'aide de la combinaison d'un filtre absorbant et d'un filtre déphasant. On trouve qu'une image parasite apparaît dans l'image restituée par suite des zéros du facteur de transmission des fréquences spatiales de l'objectif de prise de vue.

1. INTRODUCTION

Dans la première partie de ces études [1], nous avons étudié la restitution de l'image formée par un objectif dont le facteur de transmission des fréquences spatiales était toujours positif. Comme on l'a vu dans cet article, quand le facteur de transmission des fréquences spatiales est toujours positif on peut faire parfaitement la restitution de cette image en utilisant le restituteur muni d'un filtre absorbant qui atténue le spectre de Fourier de l'image floue.

Mais ce n'est pas le cas général et on a souvent un objectif dont le facteur de transmission des fréquences spatiales comprend une partie négative et une partie nulle dans la région de fréquences nécessaire pour former l'image nette. La restitution dans ce cas peut être possible en utilisant un filtre déphasant de π qui renverse le signe du spectre dont le gain d'amplitude est négatif. Nous avons étudié dans ce travail le cas où l'aberration de l'objectif est un défaut de mise au point et son facteur de transmission des fréquences spatiales a une partie négative et une partie nulle dans la région des basses fréquences.

2. PRINCIPES

2.1. Caractère de l'image à restituer

Dans la figure 1, soit L le rayon d'ouverture circulaire de l'objectif E , I le plan de l'image, I' le point conjugué à l'objet, B la distance entre E et I , et δ , le défaut de mise au point. Si l'objet et l'image sont très près de l'axe et si l'objectif n'a aucune aberration en dehors du défaut de mise au point, les caractères de l'image deviennent symétriques par rapport à l'axe; on peut donc prendre une coordonnée normalisée :

$$x = X/L \quad (1)$$

dans le plan de pupille E , et aussi

$$u = k\alpha U \quad (2)$$

† Adresse présente: The Government Mechanical Laboratory, Suginami-ku, Tokio, Japon.

dans le plan de l'image, où X et U sont les coordonnées géométriques dans chaque plan respectivement, $k=2\pi/\lambda$, et

$$\alpha = L/B. \quad (3)$$

Dans ces conditions, on peut exprimer le rayon de l'image étendue d'un point dans le plan I par

$$\rho = \kappa \alpha \delta \left(\frac{L}{B - \delta} \right) = \kappa \alpha^2 \delta \left(1 + \frac{\delta}{B} \right). \quad (4)$$

Si δ n'est pas petit, la répartition d'intensité dans l'image d'un point est exprimée, dans l'approximation de l'optique géométrique, par

$$\begin{aligned} h(u) &= 1 & \text{pour } u < \rho \\ &= 0 & \text{pour } u > \rho. \end{aligned} \quad (5)$$

L'aberration de défaut de mise au point est donnée, si α est petit, par

$$W(x) = \frac{1}{2} \alpha^2 \delta \left(1 + \frac{\delta}{B} \right)^2 x^2. \quad (6)$$

En écrivant $W(1) = W$, on a d'après l'équations (4) et (6)

$$\rho \doteq 2kW \quad (7)$$

si δ/B est petit.

Alors, on peut calculer la transmission des fréquences spatiales en prenant la transformée de Hankel de l'équation (5):

$$H(x) = \frac{2 \int_0^\infty h(u) J_0(xu) u du}{2 \int_0^\infty h(u) u du} = \frac{2J_1(2kWx)}{2kWx}. \quad (8)$$

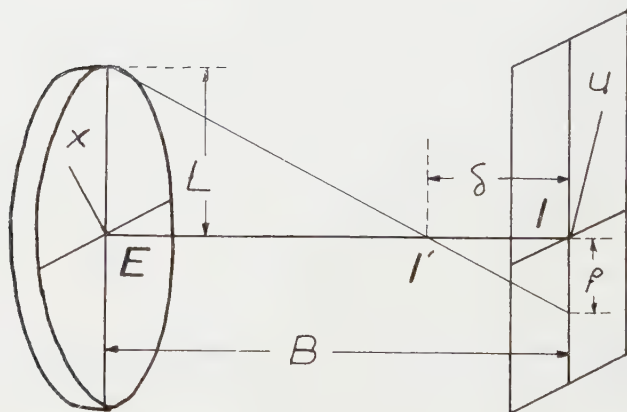


Figure 1.

2.2. Restitution

Considérons maintenant la restitution de l'image formée par l'objectif ci-dessus. Le restituteur est montré dans la figure 2 [1, 2]. S est une source ponctuelle monochromatique, S' son image formée par un collimateur O_1 . Le cliché qui a enregistré l'image à restituer est mis très près de O_1 . On obtient ainsi le spectre de Fourier de ce cliché en S' . En mettant un filtre de restitution F

en S' et un deuxième collimateur O_2 derrière F , on peut obtenir l'image restituée dans le plan P' , plan conjugué de P par rapport à O_2 .

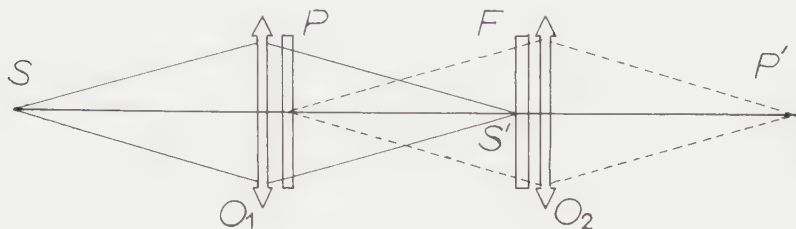


Figure 2. Restituteur.

Dans ces conditions, si le contraste de l'image est assez faible et si le 'gamma' du cliché n'est pas grand, la transmission d'amplitude du filtre $F(X')$ doit être donnée par l'équation suivante [1]:

$$F(X')H(X') = C^{te}, \quad (9)$$

où X' est la coordonnée radiale géométrique dans le plan du filtre, qui est aussi exprimée par

$$X' = (B'/B)Lx \quad (10)$$

en posant B' la distance entre P et F dans le restituteur. Il faut donc préparer un filtre:

$$F(X') = C^{te}/H(X') \quad (11)$$

dans le but de la restitution. Mais, comme on le voit dans l'équation (8), $H(X')$ s'annule pour des fréquences, où l'équation (11) n'est plus valable. Donc, il y a une difficulté dans la réalisation de ce filtre.

On considère un filtre dont la transmission d'amplitude complexe est proportionnelle à $1/H(X')$ sauf aux environs des fréquences X_1', X_2', \dots, X_n' , qui donnent $H(X_n') = 0$:

$$X_n' = \mu_n B' L / 2kWB, \quad (12)$$

où μ_n est la n -ième racine de $J_1(x) = 0$.

Ce filtre est réalisé par la combinaison d'un filtre absorbant dont la transmission d'amplitude s'exprime, en posant b une constante,

$$F(X') = 1/(bH(X')) \quad \text{sauf pour } X_n' \quad (\text{figure 3 B}) \quad (13)$$

et un filtre déphasant dont le déphasage s'exprime

$$\begin{aligned} P(X') &= 0 \quad \text{pour } X_{2n}' < X' < X_{2n+1}' \quad (\text{figure 3 C}) \\ &= \pi \quad \text{pour } X_{2n+1}' < X' < X_{2n}' \end{aligned} \quad (14)$$

Le filtre absorbant atténue le gain du spectre pour les basses fréquences, gain qui est beaucoup plus élevé que celui pour les hautes fréquences, de telle façon que le gain du spectre pour $X' = 0$ devient

$$1/b = 10^{-D_0/2}, \quad (15)$$

où D_0 est la densité maximum du filtre absorbant, et il rend le gain constant pour toutes les fréquences sauf aux environs de X_n' . Le filtre déphasant renverse le signe du spectre dont le gain complexe est négatif. Alors, comme on peut le voir dans la figure 3 D, on obtient un spectre d'amplitude beaucoup plus

élevée que celle de l'original pour les hautes fréquences nécessaires pour former l'image nette, sauf aux environs de X'' . Par suite, il y a possibilité d'améliorer la qualité des images abîmées par le défaut de mise au point.

Pour les fréquences X'' , puisque le gain du spectre original est nul, on n'a aucune possibilité de l'augmenter par cette méthode. On a donc une discontinuité en X'' dans le spectre restitué, qui empêchera la restitution parfaite.

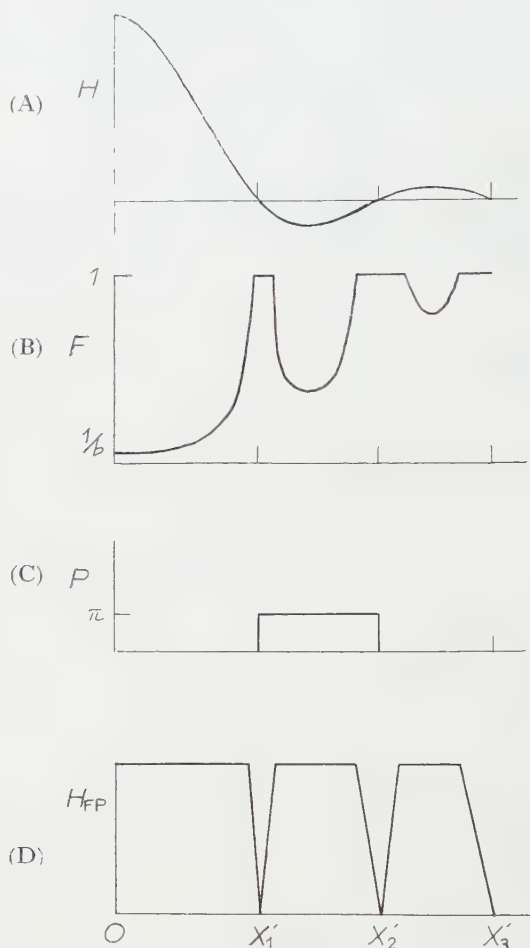


Figure 3. Restitution du spectre: (A) spectre original, (B) facteur de transmission d'amplitude du filtre absorbant, (C) déphasage du filtre déphasant, et (D) spectre restitué par les filtres (B) et (C) (abscisse: coordonnée géométrique dans le plan du filtre).

3. EXPÉRIENCES

3.1. Préparation du cliché à restituer

Nous avons utilisé pour l'expérience un objectif photographique dont la longueur focale est 200 mm (1:6,3) et un filtre à deux foyers [3] ayant 20 zones déphasantes de diamètre 30 mm.

Nous avons mis le plan de l'image au foyer intérieur en mettant ce filtre diaphragmant jusqu'à $L = 11$ mm dans le plan de la pupille, et puis nous avons photographié l'objet après avoir détaché le filtre à deux foyers du plan de la pupille. L'aberration de défaut de mise au point correspond à

$$H' = 20\lambda \times (11/15)^2 = 10,8\lambda,$$

B' , distance entre l'objectif et le plan de l'image, est 216 mm. L'émulsion enregistrant cette image est immergée dans une lame de phtalate de buthyle entre deux plaques de verre bien polies pour éviter le déphasage de la surface d'onde qui traverse ce cliché quand on le met dans le restituteur. Comme émulsion enregistrant l'image, nous avons choisi 'Panatomic' de Kodak et nous avons développé cette émulsion avec du D78 avec $\gamma \div 1$.

3.2. Préparation du filtre de restitution

3.2.1. Filtre absorbant

Considérons maintenant un disque tournant sur lequel nous prenons des coordonnées rectangulaires (ξ, η) ayant son origine O au centre de rotation (figure 4). On dessine sur ce disque deux courbes qui s'expriment par

$$\eta = \pm g(\xi) \quad (16)$$

et l'on laisse blanche la région entourée par ces courbes et noire la région extérieure. En tournant ce disque, on a une répartition d'éclairement $a|g(\xi)|/\xi$ (a : une constante) si l'amplitude de ces courbes n'est pas grande. Quand

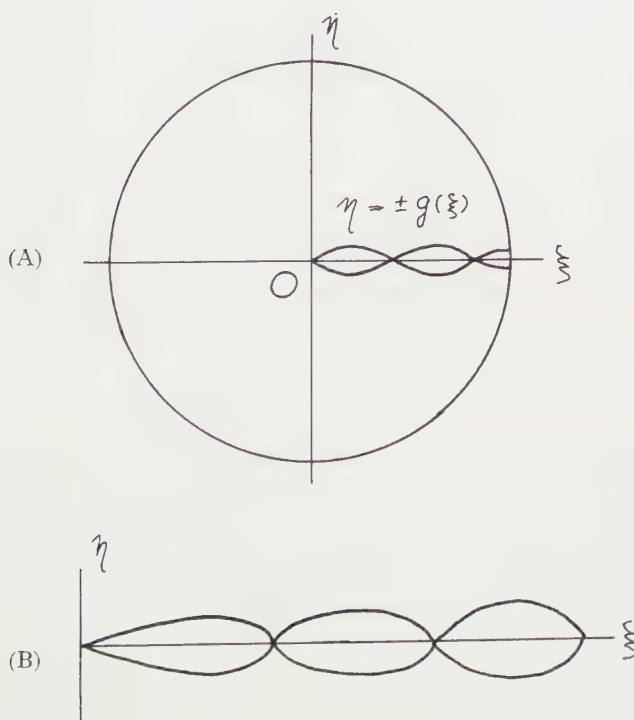


Figure 4. Préparation du filtre absorbant: (A) disque tournant, (B) les courbes à dessiner sur ce disque.

on enregistre l'image de ce disque tournant sur une émulsion avec le grossissement pour lequel la coordonnée ξ coïncide exactement avec X' , on a une répartition de densité:

$$D(X') = \gamma \log_{10}\{|g(X')|/X'\},$$

où γ est donné par l'émulsion utilisée. On a ainsi un filtre absorbant dont la transmission d'amplitude est

$$F(X') = \left\{ \frac{X'}{|g(X')|} \right\}^{\gamma/2}. \quad (17)$$

Dans ce cas, on obtient, à un facteur constant près, d'après les équations (8), (12) et (17)

$$g(X') = \left[J_1 \left(2kW \frac{BX'}{B'L} \right) \right]^{2/\gamma} \left[2kW \frac{BX'}{B'L} \right]^{1-2/\gamma}, \quad (18)$$

et aussi d'après les équations (12)

$$X_1' = 0,60 \text{ mm}, \quad X_2' = 1,10 \text{ mm}$$

à l'aide des données numériques suivantes: $W = 10,8\lambda$, $\lambda = 0,00058 \text{ mm}$, $B = 216 \text{ mm}$ et $B' = 390 \text{ mm}$.

Pour enregistrer la distribution de densité du filtre absorbant, nous avons choisi comme émulsion le 'Collodium' de Guillemot avec comme révélateur du D 11 qui donne $\gamma \div 4$, nous avons donc (figure 4 B), à un facteur constant près,

$$g(\xi) = \sqrt{[\xi J_1(\xi)]}. \quad (19)$$

Nous avons dessiné quatre paires des courbes

$$\pm \eta = \pm a' \sqrt{[\xi J_1(\xi)]}, \quad \pm \xi = \pm a' \sqrt{[\eta J_1(\eta)]}, \quad (a': \text{une constante})$$

sur le disque noir en rendant blanche la région entourée par chaque paire de courbes, et puis nous avons pris son image de telle façon que le rayon du premier anneau dans l'image, X_1' , devienne 0,60 mm.

Nous avons ainsi obtenu un filtre absorbant dont la densité maximum est 1,64, et qui donne, d'après les équations (15), 0,15 de la transmission d'amplitude au centre du filtre. Ce filtre n'atténue que le spectre pour la région $X' < X_0'$, où

$$H(X_0') = 0,15, \quad (20)$$

parce que, comme on le verra dans la figure 6 A, la valeur maximum de $H(X')$ pour la région $X' > X_0'$ est inférieure à 0,15.

3.2.2. Filtre déphasant

Le filtre déphasant est, comme on le voit dans la figure 3 C, préparé par les anneaux transparents qui donnent le déphasage de π . Pour faciliter l'expérience, nous avons seulement fait un anneau dont le rayon intérieur correspond à X_1' et l'extérieur à X_2' . En fait, dans ce cas, car l'effet de restitution pour $X' > X_3'$ n'est pas assez grand pour qu'il agisse sur la netteté de l'image restituée, le renversement de signe du spectre est pratiquement suffisant pour la région $X_1' < X' < X_2'$.

Cet anneau est préparé par évaporation de MgF_2 sous vide en donnant l'épaisseur optique

$$nd = \frac{n}{2(n-1)}\lambda, \quad (21)$$

où n est l'indice de réfraction du milieu de la couche. La technique suivante est utilisée pour sa préparation†: on fait d'abord une couche mince d'argent sur une plaque de verre bien polie, puis on met une émulsion de colle sensible de photogravure sur cette couche d'argent. D'autre part, on dessine un anneau blanc sur un papier noir dont les rayons intérieur et extérieur sont proportionnels à X_1' et X_2' respectivement. En formant l'image de cet anneau sur une émulsion de reproduction de telle façon que les rayons intérieur et extérieur de cette image correspondent exactement aux rayons X_1' et X_2' , on obtient un cliché négatif de l'anneau, et, quand on enregistre l'image de l'anneau sur l'émulsion de colle sensible, par le contact du cliché négatif, sous éclairage ultra-violet, on peut avoir un anneau de la couche d'argent soluble dans un bain d'acide. Après avoir fait dissoudre cet anneau d'argent et puis la couche de colle exposée, on fait une couche de MgF_2 par évaporation sous vide dont l'épaisseur optique est $nd=1,8\lambda$ (obtenue en mettant $n=1,38$ dans l'équation (21)). Cette épaisseur de couche mince est obtenue par la superposition de sept couches de MgF_2 , chaque couche étant une couche anti-réfléchissante. Puis, on met la plaque évaporée dans un bain d'acide qui dissout à la fois la couche d'argent et la couche de MgF_2 mise sur cette couche d'argent et on peut enfin obtenir un anneau de MgF_2 qui donne le déphasage de π .

3.2.3. Combinaison de deux filtres

Comme on le voit dans la figure 5, l'émulsion enregistrant le filtre absorbant 2 est immergée dans une lame de phtalate de buthyle 3 entre le support de l'émulsion 1 et celui du filtre déphasant 4. Un côté de la plaque 4 sur lequel l'anneau déphasant 5 est formé doit être face à l'extérieur, et les centres des deux filtres doivent bien coïncider. En outre, pour éviter la parallaxe dans le restituteur, l'épaisseur du support du filtre déphasant doit être aussi mince que possible.

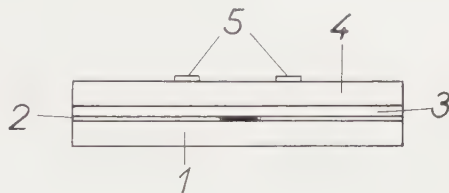


Figure 5. Combinaison des filtres: 1 support du filtre absorbant, 2 filtre absorbant, 3 lame de phtalate de buthyle, 4 support du filtre déphasant et enfin 5 anneau déphasant.

4. RÉSULTATS DE LA RESTITUTION

4.1. Effet de la restitution

Dans la figure 6, on montre l'effet de la restitution pour le spectre. (A) est le spectre original, (B) le spectre restitué par le filtre absorbant seulement, et (C) le spectre restitué par le filtre combinaison d'un filtre absorbant et un filtre déphasant. Dans ce cas, la densité maximum du filtre absorbant est 1,64 ce qui donne 0,15 comme gain du spectre pour $X'=0$, et ainsi, comme on l'a vu dans l'équation (20), le spectre pour $X' > X_0'$ ne subit là aucune restitution si ce n'est l'augmentation relative du gain par rapport à celui correspondant à $X'=0$. Pour faciliter le calcul, on peut faire l'approximation des courbes pointillées de telle façon

† On peut trouver la même technique pour la préparation d'un filtre à deux foyers [3] et d'un réseau déphasant [4].

que l'intégrale de la courbe originale devienne la même que celle de la courbe pointillée. On peut aussi considérer que le caractère de l'image à restituer est presque défini par la fréquence $X' < X_2'$; nous avons donc limité la fréquence jusqu'à X_2' dans le calcul. La transformée de Hankel de ces courbes donne la répartition d'amplitude de l'image d'un point. On fait d'abord le calcul en supposant qu'il n'y a aucune perte de gain pour X_1' , et les résultats sont montrés dans la figure 7: (A) est l'image originale, (B) l'image restituée par le filtre absorbant, et (C) l'image restituée par le filtre combiné. Les courbes pointillées montrent la répartition d'intensité de l'image. Comme on peut le voir dans ces résultats, l'image restituée avec le filtre absorbant a tendance à faire l'image dédoublée et, par conséquent, on ne peut pas attendre une amélioration de la netteté de l'image, tandis que l'image restituée par le filtre combiné donne une remarquable augmentation de la qualité de l'image.

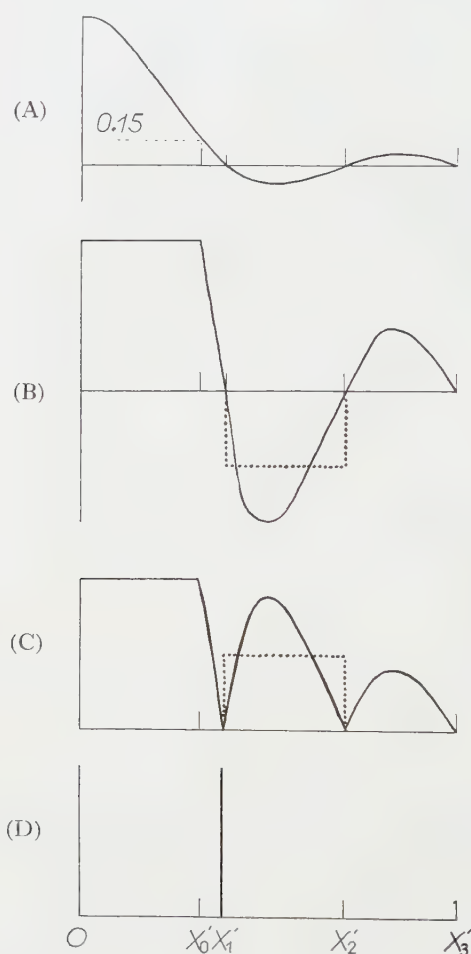


Figure 6. Restitution du spectre: (A) spectre original, (B) spectre restitué par le filtre absorbant, (C) spectre restitué par le filtre combiné, et (D) spectre perdu d'après la partie zéro de (A) (ordonnée: gain du spectre à facteur constant près, abscisse: coordonnée géométrique dans le plan du filtre).

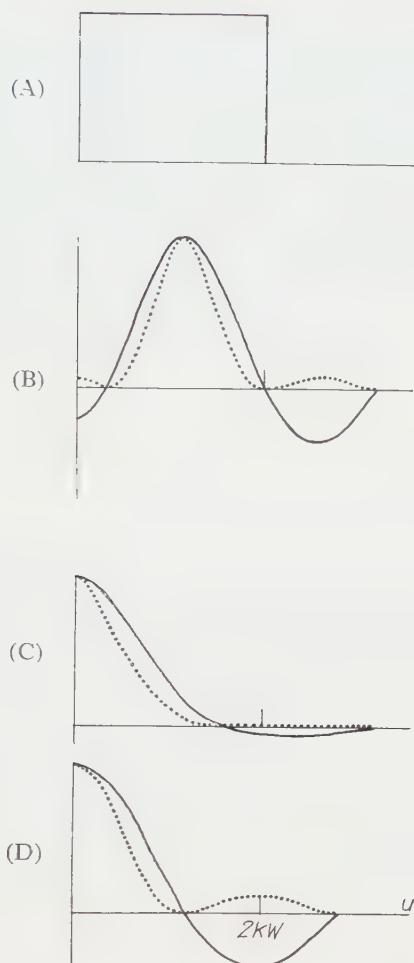


Figure 7. Répartition d'amplitude et d'intensité (courbes pointillées) de l'image d'un point : (A) image originale, (B) image restituée par le filtre absorbant, (C) image restituée par le filtre combiné et (D) image parasite due au spectre perdu (ordonnée : amplitude ou intensité à un facteur constant près, abscisse : coordonnée normalisée dans le plan de l'image).

Mais, en même temps, il y a une discontinuité du spectre restitué à cause de la perte de gain pour X_1' . Cette discontinuité produit, à un facteur constant près, une répartition d'amplitude :

$$2 \int_0^\infty \delta(x - x_1) J_0(ux) x dx = C^{te} \cdot J_0\left(\mu_1 \frac{u}{2kW}\right), \quad (\text{figure 7 D}) \quad (22)$$

et elle donne une structure périodique très remarquable dans l'image. On a donc en fait comme image une superposition de cette structure périodique à l'image restituée ce qui est montré dans (B) ou (B) de la figure 7, ou plutôt, à vrai dire, une soustraction d'amplitude entre ces deux images selon leur rapport de constitution dans l'image finale. Dans ces conditions, le premier maximum de l'image (22) se trouve à peu près pour $u = 2kW$ ce qui coïncide avec le rayon

de l'image floue originale d'un point. Or, dans l'image restituée, la valeur de l'amplitude aux environs de $u = 2kW$ est très petite, donc la structure périodique près de $u = 2kW$ devient, dans ce cas, très remarquable. Ainsi l'image finale est formée d'une image parasite considérable qui entoure l'image restituée.

Au point de vue de la théorie de l'information, l'objectif de prise de vue ne permet pas de transmettre l'information à la fréquence X_1' , alors l'image obtenue ne donne aucune information sur la répartition du spectre de l'objet pour X_1' . L'effet de la restitution réalisée est d'atténuer le gain du spectre de basse fréquence par rapport à la haute fréquence, gain qui est si grand qu'il abîme l'image. On ne peut donc jamais s'attendre à retrouver le gain du spectre perdu lors de la prise de vue. Cette perte d'information sur la répartition du spectre est cause d'une image parasite apparente dans l'image restituée, et, par conséquent, l'effet de l'image parasite est dû à la répartition du spectre de l'objet original.

4.2. Résultats de l'expérience

Dans la figure 8, on montre les résultats de l'expérience. (A) est l'image originale, (B) l'image restituée par le filtre absorbant, et (C) l'image restituée par le filtre combiné.

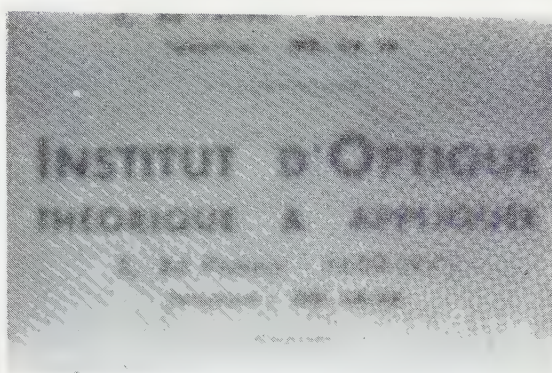
Comme on l'a vu dans ce qui précède, la restitution de l'image (B) n'est pas parfaite, on peut voir l'image dédoublée pour les caractères fins et les lignes. Au contraire, l'image (C) est tellement bien restituée qu'on peut lire les caractères fins qui ne sont pas lisibles dans l'image originale.

On peut voir également un bord blanc autour de l'image restituée dans ces deux cas. Il nous semble que c'est une image parasite due à la discontinuité du spectre restitué. En fait, dans la figure 9, on trouve les résultats de la mesure de la répartition de densité de l'image photographique d'un grand caractère 'I' prise dans le restituteur. (A) est l'image originale, (B) l'image restituée par le filtre absorbant, et enfin (C) l'image restituée par le filtre combiné; on peut reconnaître que la distance entre le bord blanc et le bord du caractère coïncide avec le rayon étendu de l'image originale. Par suite, on peut savoir que ce bord blanc est une image parasite due à la discontinuité du spectre en X_1' .

Pour l'image de la figure 8, l'information perdue lors de la prise de vue peut être compensée par certaines connaissances préalables sur l'objet, par exemple dans la figure 8, on trouve que la figure des caractères s'est confondue dans l'image floue. Cette image parasite n'est pas tellement gênante, et la restitution par cette méthode est très efficace. Mais, pour une image sur laquelle on n'a aucune connaissance au préalable, autrement dit pour une image dont la répartition d'intensité doit être fidèle à celle de l'objet, cette image parasite devient très nuisible et cette restitution n'est pas encore suffisante. On trouvera un exemple de ce cas dans la figure 10, où le bord blanc autour de l'image nous donnera une figure curieuse de l'Arc de Triomphe ou plutôt une fausse figure.

Dans cette expérience, nous avons rencontré comme difficulté technique la non-linéarité d'enregistrement dans l'émulsion et le déphasage de la surface d'onde à travers le cliché et le filtre absorbant. Nous avons alors utilisé un objet de très faible contraste pour éviter la première difficulté, et, pour éviter la deuxième, nous avons immergé l'émulsion dans une lame de phtalate de buthyle entre deux plaques de verre bien polies [1]. Il y a d'ailleurs une autre difficulté dans ce cas: c'est la parallaxe entre le filtre absorbant et le filtre déphasant.

(A)



(B)



(C)

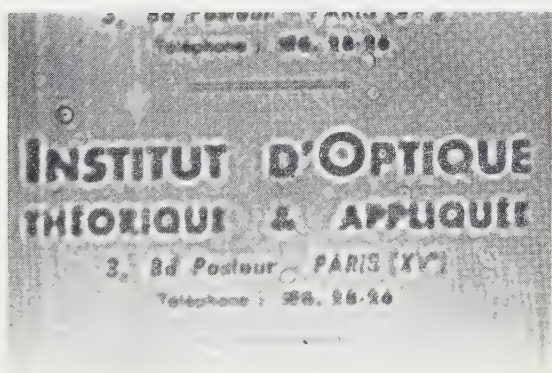


Figure 8. Résultats de l'expérience: (A) image originale, (B) image restituée par le filtre absorbant et (C) image restituée par le filtre combiné.

Dans cette expérience, la distance entre le cliché à restituer et le filtre de restitution est de 390 mm ainsi que celle entre le filtre absorbant et le filtre déphasant, l'épaisseur du support du filtre déphasant est de 2,0 mm, et les deux essais de mise au point du collimateur O_1 , mise au point dans le plan du filtre absorbant puis dans le plan du filtre déphasant ne nous donnent aucune différence dans l'image finale. Il nous semble donc que l'influence de parallaxe dans ce cas est assez petite pour être négligeable.

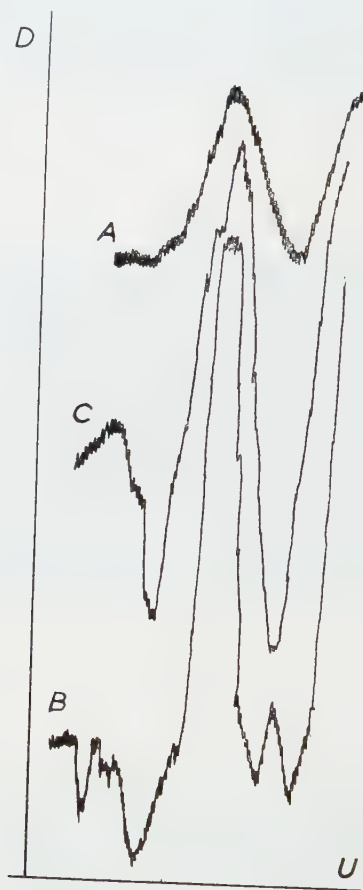


Figure 9. Répartition d'intensité dans l'image restituée: (A) image originale, (B) image restituée par le filtre absorbant, et (C) image restituée par le filtre combiné (ordonnée: densité, abscisse: coordonnée géométrique dans le plan de l'image).

5. CONCLUSION

La restitution de l'image aberrante est étudiée d'une manière plus générale: la combinaison d'un filtre absorbant et d'un filtre déphasant est alors efficace, mais la qualité de l'image restituée n'est pas suffisante par suite de la perte de l'information sur l'objet due à la partie zéro de la transmission des fréquences spatiales de l'objectif de prise de vue. Cette perte sur l'information donne une



Figure 10. Un exemple de l'image restituée: (A) image originale, (B) image restituée par le filtre absorbant et (C) image restituée par le filtre combiné.

image parasite et abîme la fidélité de l'image restituée à l'objet. Si l'on peut compenser cette perte de fidélité, autrement dit cette perte d'information sur l'image, à l'aide de quelques connaissances préalables de l'objet, cette méthode de restitution est très efficace. Mais pour l'image au sujet de laquelle on n'a aucune connaissance, ce qui rend nécessaire la fidélité de l'image à l'objet, cette restitution n'est pas encore suffisante.

Cette méthode de restitution est, bien entendu, valable non seulement pour une image rendue floue par un défaut de mise au point, mais aussi pour une image abîmée par une aberration quelconque, si tous les champs de l'image à restituer sont isoplanétiques, et on peut faire la restitution en utilisant un filtre combiné préparé suivant la transmission des fréquences spatiales de l'objectif de prise de vue.

The image formed by an objective whose response function takes zero and negative values is modified by filtering of spacial frequencies, using a combination of phase and amplitude filters. It is found that a parasitic image appears in the modified image, produced by the zero values of the response function of the taking objective.

Wenn die Übertragungsfunktion eines Objektives den Wert 0 oder auch negative Werte annimmt, so kann man trotzdem damit ein Bild erhalten, indem man eine Frequenzfilterung durch die Kombination eines Absorptionsfilters mit einem phasenverschiebenden Filter vornimmt. Es entsteht allerdings ein 'parasitäres Bild' als Folge der Nullstellen in der Übertragungsfunktion des Aufnahmeobjektives.

RÉFÉRENCES

- [1] TSUJIUCHI, J., 1960, *Opt. Acta*, **7**, 243.
- [2] CROCE, P., 1956, *Rev. d'Opt.*, **35**, 596, 642.
- [3] TSUJIUCHI, J., 1958, *Rev. d'Opt.*, **37**, 1.
- [4] ENNOS, A. E., 1960, *J. opt. Soc. Amer.*, **50**, 14.

Phase dispersion in interferometry

by P. E. CIDDOR

Division of Metrology, National Standards Laboratory, C.S.I.R.O.,
Chippendale, N.S.W., Australia

(Received 29 January 1960)

It is shown that the interference equation for interferometers exhibiting phase-change effects should take the form $M\lambda = 2d - \lambda\nu/\pi$, where ν is $(\beta - \pi)$ and β is the phase-change at reflection for one reflecting surface. Several recent treatments of the phase-change on reflection are critically examined and it is shown that the phase-dispersion deduced from them is inconsistent with generally accepted experimental results for interferometers with silver films.

1. INTRODUCTION

In the measurement of wavelengths by interferometry, it is essential to apply a correction for the variation with wavelength of the phase change which accompanies reflection. A similar correction is required when channelled-spectra fringes are used to measure the thickness of thin films. The correction term (phase-dispersion) has been determined for silver by Buisson and Fabry [1] and others [2, 3, 4, 5].

More recently phase change on reflection has been calculated and measured for silver and for dielectric multilayers by Koehler [6, 7], Rank and Bennett [8], Schultz [9], and others. The phase dispersion deduced from the formulae of these workers is inconsistent with the published results for silver, although in some cases an *ad hoc* modification has been applied to the equations, which removes the inconsistency. In this note it is shown that by careful attention to the formulation of the condition for interference, a consistent set of equations can be derived, which will account for the phase-dispersion of all types of reflecting surfaces.

2. DERIVATION OF EQUATIONS

The usual procedure in the measurement of phase-dispersion is to determine the orders of interference M and M_1 for the reference wavelength λ and another wavelength λ_1 by the method of exact fractions. A simpler procedure is to use channelled-spectra fringes in combination with Fizeau fringes. This method has been used by Bauer [4] and by Brue and Ciddor [10]. In both methods it is assumed that the integral part of the order of interference is not affected by the phase-change component. The phase-dispersion between λ and λ_1 is then defined as

$$\phi_1 = M_1 - M\lambda/\lambda_1. \quad (1)$$

This value may be compared with a theoretical value calculated from the fundamental equation of interference and the reflecting properties of the interferometer plates. The analysis given by Koehler [6, 7] and by Shkliarevskii [11] may

be shown to lead to values of ϕ_1 for silver much larger than those quoted by experimental workers. The fundamental equation of interference is taken by most authors to be

$$M\lambda = 2d - \lambda\beta/\pi \quad (2)$$

for a transmission interferometer with spacing d and with reflecting surfaces producing a phase change β at reflection.

The phase change is taken to be an advance, which accounts for the negative sign in (2). An alternative form of this equation is discussed in the next section.

It follows immediately from (2) and from the corresponding equation for λ_1 that the phase-dispersion, as defined by (1), is

$$\phi_1 = (\lambda/\lambda_1)\beta/\pi - \beta_1/\pi. \quad (3)$$

The value generally taken for β is π for glass, and about 0.8π for silver. (The exact values are found from Fresnel's equations. For silver these equations yield a value of about -0.5 for $\tan \beta$. If β is measured, as is usual, anti-clockwise from the reference direction, which is the direction of the vector representing the incident wave, this value of $\tan \beta$ corresponds to $\beta \approx 0.8\pi$.)

It follows that ϕ_1 , evaluated between $\lambda = 6438 \text{ \AA}$ and $\lambda_1 = 4358 \text{ \AA}$, is 0.477 for glass and 0.517 for silver. These values contrast with experimental values of 0 and 0.040 respectively.

There is clearly a need for revision of (2) and (3), or a reinterpretation of the experimental results.

Since β lies near π , for reflecting surfaces of interest, and with air as the spacer medium, we may replace β by $\pi + \nu$ in (2). This equation then becomes

$$M\lambda = 2d - \lambda - \lambda\nu/\pi. \quad (4)$$

λ_1 (\AA)	Glass			Silver			7-layer film		
	Equation (3) ϕ_1	Equation (6) ϕ_1	$\phi_1 A_1$	Equation (3) ϕ_1	Equation (6) ϕ_1	$\phi_1 A_1$	Equation (3) ϕ_1	Equation (6) ϕ_1	$\phi_1 A_1$
6057	0.063	0	0	0.066	0.003	0.048	0.147	0.084	1.335
5460	0.179	0	0	0.190	0.011	0.061	0.402	0.223	1.247
4358	0.477	0	0	0.517	0.040	0.084	1.150	0.673	1.410

Phase dispersion according to equations (3) and (6) (reference wavelength $\lambda = 6438 \text{ \AA}$).

The term λ on the right-hand side of (4) represents a uniform phase-change of 2π at all wavelengths, and is therefore unobservable [12]. This may also be expressed by saying that a simple renumbering of the fringes will eliminate this term for all wavelengths. It follows that the physically significant form of (2) is

$$M\lambda = 2d - \lambda\nu/\pi. \quad (5)$$

The corresponding equation for ϕ_1 is

$$\phi_1 = (\lambda/\lambda_1)\nu/\pi - \nu_1/\pi \quad (6)$$

Clearly ϕ_1 (equation 6) = ϕ_1 (equation 3) - $(\lambda/\lambda_1 - 1)$.

Since for glass $\nu = 0$, and for silver $\nu \approx -0.2\pi$, the theoretical values of ϕ_1 now agree with experiment [10].

When (5) is applied to an interferometer whose plates are coated with dielectric multi-layers, another correction is needed. The method of determining fringe

orders used by Bauer [4] consists of counting the number N_1 of channelled-spectral fringes between two wavelengths λ and λ_1 and writing

$$M\lambda = (M + N_1 - \phi_1)\lambda_1. \quad (7)$$

M is found from (7) to be

$$M = N_1 A_1 - \phi_1 A_1, \quad A_1 = \lambda_1 / (\lambda - \lambda_1). \quad (8)$$

For silver films $\phi_1 A_1$ is very small, but for multi-layers it is approximately 1 (table), the exact value depending on the wavelength and on the number of films in the multi-layer. In practice the value of M is taken to be the sum of the nearest integer to $N_1 A_1$ and the observed fractional order [10]. Consequently M is over-estimated by one unit for the multi-layers, but is correct for silver. It is necessary to apply this correction to M , and to M_1 , before inserting them into (1). Excellent agreement with experiment is then obtained [10]. Koehler [6, 7] found it necessary to apply corrections of 1 for an interferometer with two silvered plates, 1.5 when one plate was silvered and one a multi-layer, and 2.0 when both plates were multi-layers. These corrections correspond to the values of $\phi_1 A_1$ calculated using (3) instead of (6).

3. COMPARISON WITH EARLIER TREATMENTS

A critical examination of the papers dealing with this subject shows that in only a few cases has the need for altering (2) and the importance of the $\phi_1 A_1$ term in (8) been recognized. Koehler [6, 7], found it necessary to apply an empirically determined $\phi_1 A_1$ correction to his results in order to obtain a linear relation between $M\lambda$ and λ , i.e. he used (8), but with values of ϕ_1 corresponding to the use of (2) rather than (5). Rank and Bennett [8] started with (2), but used a 'reduced order' $\bar{M} = M - 1$ in calculating phase corrections, thus obtaining small values of ϕ_1 . Schultz [9] used a quantity ψ , whose value for air-silver reflection is about 0.2π , and which he called the phase change on reflection. This nomenclature is a very unconventional one, as the phase change at reflection is generally defined, as mentioned above, by the angle between incident- and reflected-wave vectors, which in this case must be near π in order to account for the appearance of the dark central spot in Newton's rings. Schultz's ψ is equivalent to $-\nu$ in the notation used here.

Equation (2) was also the starting point for Baumeister and Jenkins [13], but at one point in their calculation they assumed that only the integral part of the order of interference was affected by the phase term. Thus they were virtually assuming that the correct equation was (5), and from their results, small values of ϕ_1 can be deduced.

The fundamental equation used by Koester [14] was

$$M\lambda = 2d + \lambda\beta/\pi \quad (9)$$

but β was taken to be greater than π . This amounts to measuring β clockwise instead of anti-clockwise. It is necessary to use $\beta > \pi$ with the positive sign in (9) in order to accord with the experimental observation that a slip gauge has a greater optical length when wrung to a metal surface than when wrung to a glass surface. Conversely, it is necessary to use the negative sign, as in (3) when β is taken as less than π . Koehler [6] took $\beta < \pi$ but used (9), although in a later paper [7] he used (2).

Koester [14] did not take the step of substituting ν for β in (9), and consequently his results imply values of ϕ_1 corresponding to (3).

An interesting attempt to settle by experiment the correct choice of the interference equation was made by Shkliarevskii [11]. He computed the positions at which Fizeau fringes would appear in a wedge of zinc sulphide bounded by

- (a) air and glass,
- (b) air and silver,
- (c) silver and silver.

He considered equations (2) and (5), and also corresponding equations with positive phase terms, and reasoned that only (2) was compatible with observations in all cases. However, the alternative equations which he considered were not relevant to the interferometer under consideration in case (b). Shkliarevskii's equation for transmission fringes in the system air-zinc sulphide-silver is

$$M\lambda = 2nd - \lambda\beta/(2\pi) \quad (10)$$

where n is the refractive index of zinc sulphide and β is the phase change at reflection in zinc sulphide at silver ($\beta \approx 0.67\pi$). He showed that simple substitution of ν for β in (10) leads to a distribution of fringes, which is not observed. However, if we substitute $\pi + \nu$ for β in (10), we obtain

$$M\lambda = 2nd - \lambda/2 - \lambda\nu/2\pi \quad (11)$$

and the term $\lambda/2$ cannot be suppressed by simply renumbering the fringes. Consequently (11) must be used in this case, and therefore the predicted fringe pattern is just the same as that predicted by (10). Since this was the only case where the use of ν instead of β appeared to Shkliarevskii to be inadmissible, it is clear that his objections to (5) are invalid.

4. CONCLUSION

The preceding discussion has established the following points.

(i) The use of equation (2) to compute the phase dispersion leads to values which are not generally accepted for glass and silver. While there is a certain amount of arbitrariness in the convention that glass surfaces exhibit no dispersion of the phase change, it is considered that the convention is worth preserving. The convention receives strong support from the impossibility of observing the effect of a term λ appearing for all wavelengths in the expression for the order of interference. The mathematical equivalent of this fact is the arbitrariness of the expression of the phase angle of a vector in the complex plane, $\beta = (2m + 1)\pi + \nu$, where m may be any integer or zero. In accordance with the convention, the correct equation for M is (5).

(ii) It is not permissible to choose the sign of the term in β or ν arbitrarily in (2) or (5), without simultaneously choosing a corresponding value of β or ν . For the commonly accepted value of $\beta \approx 0.8\pi$ for silver, it is necessary to choose the negative sign as used in (2) and (5), in order to accord with the known fact that the optical length of a gauge wrung to a metal surface is larger than when it is wrung to a glass surface.

(iii) In using the method of coincidences (equation (7)) or equivalent methods, to determine the integral part of the order of interference M , it is necessary to apply a correction amounting to $-\phi_1\lambda_1/(\lambda-\lambda_1)$ to the calculated value of M , where ϕ_1 is the computed phase dispersion between λ and λ_1 . This correction takes different values according to whether (3) or (6) is used. The values corresponding to (6), for an air-spaced interferometer, are

for two silver surfaces	0
for one silver and one multi-layer surface	-0.5
for two multi-layer surfaces	-1.0

ACKNOWLEDGMENTS

The author wishes to thank Dr. C. F. Bruce, Dr. R. M. Hill, and Mr. R. S. Fisher, of the Division of Metrology, C.S.I.R.O., for valuable discussions.

On montre que l'équation fixant la position des franges dans les interféromètres qui montrent des effets dus au déphasage par réflexion, devrait être de la forme $M\lambda = 2d - \lambda\nu/\pi$ où $\nu = (\beta - \pi)$ et β est le déphasage par réflexion sur une seule surface réfléchissante. Plusieurs études récentes du changement de phase par réflexion sont examinées de façon détaillée et l'on montre que la dispersion du déphasage qui s'en déduit n'est pas compatible avec des résultats expérimentaux généralement admis pour les interféromètres à couches d'argent.

Die Interferenzbedingung für Interferometer, die eine Phasenverschiebung zeigen, sollte die Form annehmen $M\lambda = 2d - \lambda\nu/\pi$ wo $\nu = (\beta - \pi)$ und β die Phasenverschiebung bei der Reflexion an einer reflektierenden Oberfläche ist. Untersucht man einige neuere Arbeiten über die Phasenverschiebung bei der Reflexion kritisch, so zeigt sich, daß die Phasendispersion, die man auf diese Weise erhält, mit den allgemein anerkannten Ergebnissen für Interferometer mit Silberschicht nicht übereinstimmt.

REFERENCES

- [1] BUISSON, H., and FABRY, Ch., 1908, *J. Phys.*, **7**, 169.
- [2] BARRELL, H., and TEASDALE-BUCKELL, P., 1951, *Proc. phys. Soc. Lond. B*, **64**, 418.
- [3] MEISSNER, K. W., 1916, *Ann. Phys., Lpz.*, **51**, 95.
- [4] BAUER, J., 1934, *Ann. Phys., Lpz.*, **20**, 481.
- [5] MEGGERS, W. F., 1915, *Sci. Pap. U.S. Bur. Stand.*, **12**, 198.
- [6] KOEHLER, W. F., 1953, *J. opt. Soc. Amer.*, **43**, 738.
- [7] KOEHLER, W. F., 1955, *J. opt. Soc. Amer.*, **45**, 934.
- [8] RANK, D. H., and BENNETT, H. E., 1955, *J. opt. Soc. Amer.*, **45**, 69.
- [9] SCHULTZ, L. G., 1951, *J. opt. Soc. Amer.*, **41**, 261.
- [10] BRUCE, C. F., and CIDDOR, P. E., 1960, *J. opt. Soc. Amer.*, **50**, 295.
- [11] SHKLIAREVSKII, I. N., 1956, *J. tech. Phys., Moscow*, **26**, 333. (Translated in *Soviet Physics, Tech. Physics*, **1**, 327, 1956.)
- [12] FRANCON, M., 1956, *Handb. Phys.*, **24**, 192.
- [13] BAUMEISTER, P. W., and JENKINS, F. A., 1957, *J. opt. Soc. Amer.*, **47**, 57.
- [14] KOESTER, C. J., 1958, *J. opt. Soc. Amer.*, **48**, 255.



REVIEWS

Einführung in das Korrigieren optischer Systeme. F. I. HAVLICEK. Wissenschaftliche Verlagsanstalt, Stuttgart, 1960. 91 S, 38 Abb., 8 Leinin. DM. 18.50.

JEDER, der sich mit den Aufgaben der Berechnung und des Korrigierens optischer Systeme genauer beschäftigen muß, empfindet den Mangel an Literatur über dieses Thema. Er muß sich also im wesentlichen selbst all die Verfahren erarbeiten, die ihn zum Ziele führen. Dabei ist ihm freilich wohl bewußt, daß es auch noch andere Wege gibt, die nicht weniger brauchbar sind, aber er ist damit nicht in gleicher Weise vertraut und es sprechen auch manche Gründe dagegen, mehrere Methoden gleichzeitig in einem Rechenbüro zu betreiben. Das hindert ihn aber, ein Buch über das Korrigieren optischer Systeme selbst zu schreiben; denn er könnte dabei kaum eine Vollständigkeit der Darstellung der verschiedenen Berechnungsarten erreichen und sie kritisch werten. Hinzu kommt, daß die vielen kleinen Tricks, die der Rechner zu entwickeln und anzuwenden pflegt, um schnell zum Ziele zu kommen, sich einer knappen Darstellung entziehen, für eine ausführliche Behandlung aber nicht bedeutungsvoll genug sind. Unter solchen Betrachtungen verliert ein 'would-be-author' meistens den Mut zu seinem Vorhaben, zumal, wenn er bedenkt, wie klein der Leserkreis doch ist.

Es ist deswegen besonders dankenswert, wenn ein erfahrener Fachmann auf diesem Gebiet doch alle Bedenken überwindet und die erforderliche Zähigkeit aufbringt, um die Schwierigkeiten der literarischen Behandlung des Themas zu überwinden. Alle, die das Büchlein zur Hand nehmen, auch die routinierten Kollegen, werden darin eine Fülle von Anregungen und nützlichen Gedanken finden. Es wird sich zwar zeigen, daß man selbst dieses und jenes anders zu machen pflegt, aber vielleicht es sich auch lohnt, einmal nach diesen Vorschlägen vorzugehen. Deswegen gehört das Werklein in jedes Büro, dessen Aufgabe die Linsenberechnungen bilden.

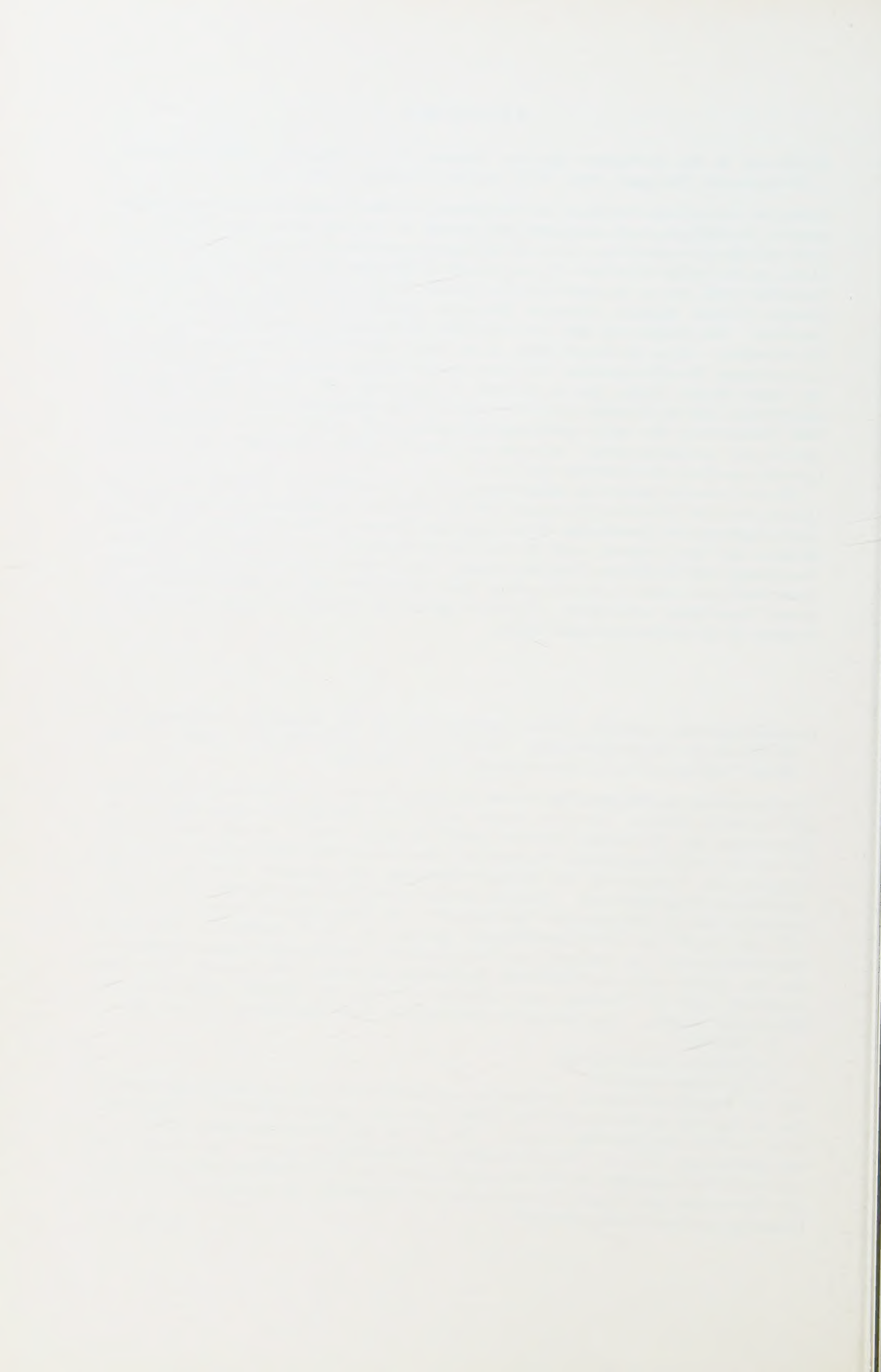
Qualitätsbewertung optischer Bilder, Samml. Dr. E. H. LINFOOT. Verfahrens und Meßkunde der Naturwissenschaft. Heft 15, 11 Abb., 57S, DIN A 5, brosch. Verlag Friedr. Vieweg and Sohn, Braunschweig, 1960. DM. 9.80.

DIE Beurteilung der Bildgüte, mit der ein optisches System ein bestimmtes Objekt wiedergibt, ist nicht einfach. Die dem System anhaftenden Restfehler, welche sich bei der Berechnung der Korrektur entzogen haben, bewirken nämlich weniger eine Vergrößerung des einem leuchtenden Objektpunkt zugeordneten Beugungsscheibchens, sondern vielmehr eine Verlagerung der Beleuchtungsstärke vom zentralen Kern zu den ihn umgebenden Beugungsringen. Dadurch werden bei strukturierten Objekten die Kontraste gemindert und die Erkennbarkeit herabgesetzt. Aus dieser Einsicht heraus hatte Strehl 1902 den Begriff der Definitionshelligkeit geprägt, der das Verhältnis der maximalen Beleuchtungsstärke im Zentrum des Beugungsbildes eines punktförmigen Objektes zu dem bei idealer optischer Abbildung theoretisch geltenden Wert darstellt. Von hier ausgehend, gibt der Verfasser eine schärfere Deutung der Bildgüte insbesondere für flächenhafte Objekte. Man kann sie in verschiedener Weise formulieren und zwar als.

- (1) Fidelität.
- (2) Relativer Strukturinhalt.
- (3) Korrelationsqualität.

Alle drei Begriffe sind jeweils voneinander verschieden aber nicht unabhängig voneinander. Für die Beurteilung photographischer Bilder muß nun noch der Einfluß der photographischen Schicht berücksichtigt werden. Das ist nur mit Einschränkungen, nämlich für den gradlinigen Teil der Schwärzungskurve durchgeführt worden. Im unteren und oberen Krümmungsgebiet der Schwärzungskurve werden die Verhältnisse sehr kompliziert. Die Anwendung der Fourier-Transformation ist nämlich an die Bedingung der linearen Übertragungscharakteristik geknüpft.

GG. FRANKE.



INDEX OF AUTHORS (WITH TITLES)

	PAGE
Aebischer-Néoschil, Mme, Gaultier du Marache, Mlle, Duffieux, P. M., Viénot, J. Ch., et Obert, W. J.: Analyse spectrale des images photographiques	1
Aziz, Evone, with Wassef, Elaine G. T.: Changes in the positions of the invariant colours with the state of adaptation of the eye	341
Baker, L. R.: Construction and performance of a position-sensitive photo-transistor	191
Baumgardt, E.: Mesure pyrométrique du seuil visuel absolu	305
Below, F., und Grabke, H.: Eine Methode zur schnellen Prüfung der Leistungs- fähigkeit von Objektiven	311
Book Reviews:	
KÖNIG, A., und KÖHLER, H.: Die Fernrohe und Entfernungsmesser	199
GORLICH, Paul (Herausgeber): Jenaer Jahrbuch 1959	199
HAVLICEK, F. I.: Einführung in das Korrigieren optischer Systeme	405
LINFOOT, E. H.: Qualitätsbewertung optischer Bilder	405
Ciddor, P. E.: Phase dispersion in interferometry	399
Clarke, F. J. J.: A study of Troxler's effect	219
Clarke, F. J. J.: Extra-foveal colour metrics	355
Dean, T. J., Jones, G. O., Martin, D. H., Mawer, P. A., and Perry, C. H.: Super- conducting bolometers and spectrometry in the far infra-red	185
Duffieux, P. M., Aebischer-Néoschil, Mme, Gaultier du Marache, Mlle, Viénot, J. Ch., et Obert, W. J.: Analyse spectrale des images photographiques	1
Ericsson, J., and Sjöfall (Johansson), L. P.: Spectral line broadening measured by shearing interferometric methods	105
Fender, D. H., and Mayne, Stella: Visibility of a fine line in intermittent illumination	129
Gaultier du Marache, Mlle, Aebischer-Néoschil, Mme, Duffieux, P. M., Viénot, J. Ch., et Obert, W. J.: Analyse spectrale des images photographiques	1
Girard, A.: Nouveaux dispositifs de spectroscopie à grande luminosité	81
Grabke, H., und Below, F.: Eine Methode zur schnellen Prüfung der Leistungs- fähigkeit von Objektiven	113
Hands, R. A., Heslop, W. A., and Littlefield, T. A.: Calculation of wavelengths from reflecting echelon patterns	325
Herzberger, Max: Allvar Gullstrand	237
Heslop, W. A., with Hands, R. A., and Littlefield, T. A.: Calculation of wavelengths from reflecting echelon patterns	325
Heynacher, E.: Einige Bemerkungen zum Problem der optischen Bildgütebeurteilung	173
Ingarden, Roman S.: The problem of optimum optical systems	179
Isaacs, L. D., Price, W. C., and Ridley, R. G.: A monochromator for the vacuum ultra-violet	263
Jacquiot, P.: Extension du concept d'espaces de Fourier à la spectroscopie	291
Jones, G. O., with Dean, T. J., Martin, D. H., Mawer, P. A., and Perry, C. H.: Superconducting bolometers and spectrometry in the far infra-red	185
Kapany, N. S.: Electro-optical systems using fibre optics	201
Lacomme, P.: Influence du nombre de traits des mires sur la precision des mesures du facteur de transmission	331

	PAGE
Lee, D. H., and Roberts, D. H.: New infra-red detectors for the 1 to 7 micron region	271
Linfoot, E. H.: Contrast transmission and the image evaluation problem	65
Littlefield, T. A., with Hands, R. A., and Heslop, W. A.: Calculation of wavelengths from reflecting echelon patterns	325
McCree, K. J.: Colour confusion produced by voluntary fixation	281
McCree, K. J.: Small-field tritanopia and the effects of voluntary fixation	317
McFee, R. H.: Electrical and optical techniques in the operation of infra-red detectors	35
Martin, D. H., with Dean, T. J., Jones, G. O., Mawer, P. A., and Perry, C. H.: Superconducting bolometers and spectrometry in the far infra-red	185
Mawer, P. A., with Dean T. J., Jones, G. O., Martin, D. H., and Perry, C. H.: Superconducting bolometers and spectrometry in the far infra-red	185
Mayne, Stella, with Fender, D. H.: Visibility of a fine line in intermittent illumination	129
Obert, W. J., Aebischer-Néoschil, Mme, Gaultier du Marache, Duffieux, P. M., et Viénot, W. J.: Analyse spectrale des images photographiques	1
Perry, C. H., with Dean, T. J., Jones, G. O., Martin, D. H., and Mawer, P. A.: Superconducting bolometers and spectrometry in the far infra-red	185
Price, W. C., with Isaacs, L. D., and Ridley, R. G.: A monochromator for the vacuum ultra-violet	632
Pastor, Jose: Le solide de tolérances d'un système optique travaillant à de faibles fréquences spatiales	159
Philip, R.: Constantes optiques et variations de phase de l'or en couches minces	47
Ridley, R. G., with Isaacs, L. D., and Price, W. C.: A monochromator for the vacuum ultra-violet	263
Roberts, D. H., with Lee, D. H.: New infra-red detectors for the 1 to 7 micron region	271
Rössler, Fritz: Temperaturmessungen an einer Russflamme	20
Sjöfall (Johansson), L. P., with Ericsson, J.: Spectral line broadening measured by shearing interferometric methods	105
Smith, R. A.: Semiconductors and infra-red spectroscopy	137
Sommer, A. H.: Semiconducting photo-emitters	121
Tsujuchi, Jumpei: Restitution des images aberrantes par le filtrage des fréquences spatiales	243
Tsujuchi, Jumpei: Restitution des images aberrantes par la filtrage des fréquences spatiales. II: Restitution de l'image dont le spectre comprend une partie négative	385
Viénot, J. Ch., Aebischer-Néoschil, Mme, Gaultier du Marache, Mlle, Duffieux, P. M., et Obert, W. J.: Analyse spectrale des images photographiques	1
Wassef, Elaine G. T., and Aziz, Evone: Changes in the positions of the invariant colours with the state of adaptation of the eye	341
Wolter, Hans: Nachweis für die Überschreitbarkeit der von den Sampling-Expansion-Theoremen postulierten Informationsschranken	53